

کشف آفست‌های سری‌های زمانی مختصات شبیه‌سازی شده‌ی ایستگاه‌های دائم GPS با استفاده از آنالیز چند متغیره

مهین حسینی اصل^{۱*}، علیرضا امیری سیمکویی^۲، جمال عسگری^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی - گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده فنی مهندسی - دانشگاه اصفهان

Mahin_hoseiniasl@eng.ui.ac.ir

^۲ استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده فنی مهندسی - دانشگاه اصفهان

{Amiri, Asgari}@eng.ui.ac.ir

(تاریخ دریافت تیر ۱۳۹۱، تاریخ تصویب دی ۱۳۹۱)

چکیده

با توجه به کاربردهای متفاوت سری‌های زمانی GPS در مباحث ژئودتیکی و ژئوفیزیکی مانند بررسی حرکات تکتونیک، حرکات ایزوستاتیک یخبندان، تغییرشکل پوسته زمین، دینامیک زلزله و غیره نیاز است که سری‌های زمانی با دقت بالا تقریب گردند. سری‌های زمانی GPS ممکن است شامل یک روند خطی، حرکات متناوب با فرکانس‌های سالیانه و نیم سالیانه (سیگنال‌ها)، آفست‌های احتمالی و یکسری رفتارهای دیگر تحت عنوان نویز باشند. کشف صحیح آفست، نیازمند برآورد صحیحی از نویز و ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات می‌باشد. بدین منظور از روش برآورد مولفه‌های واریانس، مبتنی بر روش کمترین مربعات استفاده خواهد شد. صرفنظر کردن از نویز رنگی موجود در سری‌های زمانی، تاثیر نامطلوب بر کشف آفست‌ها می‌گذارد. ابتدا از آنالیز تک‌متغیره‌ی سری زمانی استفاده کرده و سپس جهت افزایش قدرت تشخیص، آنالیز چندمتغیره معرفی خواهد شد. در آنالیز تک‌متغیره تنها از یکی از مولفه‌های مختصاتی ایستگاه دائم و در آنالیز چندمتغیره از هر سه مولفه‌ی مختصاتی در یک ایستگاه استفاده خواهد شد که ساختار نویز و آفست آنها یکسان می‌باشد. نتایج بدست آمده از آنالیز چندمتغیره بسیار بهتر از آنالیز تک‌متغیره می‌باشد و تعداد آفست‌های بیشتری کشف خواهد شد. در این مقاله از سری‌های زمانی شبیه‌سازی شده در اپک‌های روزانه، با طول دوره‌ی ۸ سال و دارای سه مولفه‌ی مختصاتی در هر ایستگاه استفاده شده است. سپس آفست‌های مختلف با بزرگی‌های متفاوت و در مکان‌های مختلف در آنها گنجانده شده است که این روش بخوبی قادر به کشف آفست‌ها می‌باشد. این تحقیق برای آفست‌ها به بزرگی ۲ برابر انحراف معیار نویز، نتیجه‌ی صد در صد به همراه داشته و همچنین ۸۰ درصد از آفست‌ها به بزرگی ۱ برابر انحراف معیار نویز نیز کشف شده‌اند.

واژگان کلیدی: برآورد مؤلفه‌های واریانس، آفست، آنالیز چندمتغیره.

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

علاوه بر وجود یکسری رفتارهای متناوب در سری‌های زمانی ایستگاه‌های دائم GPS که به عنوان سیگنال توسط مدل‌های تابعی^۱ کشف می‌گردند، رفتارهای دیگری نیز باقی می‌ماند که تحت عنوان نویز توسط مدل‌های تصادفی^۲ قابل ارائه است. جهت بررسی نویز سری‌های زمانی از روش برآورد مؤلفه‌های واریانس مبتنی بر قاعده کمترین مربعات^۳ استفاده می‌شود [۱، ۲، ۳]. اما در کنار این رفتارها، وجود آفست‌ها و شیفت‌هایی در مقادیر تابع موردنظر انکارنشده‌ی است. هدف اصلی این تحقیق کشف صحیح این آفست‌هاست.

در مورد کشف آفست‌های ناشناخته، در سال ۱۹۹۰م مدلی ارائه شد که شیفت‌های اتفاقی^۴ نامیده می‌شود. اما این مدل تنها قادر به کشف آفست‌های غیرمنتظره با سایز بزرگ بود و بنابراین در مورد آفست‌های کوچک کارآمد نبود [۴]. در سال ۲۰۰۳م، الگوریتمی توسط ویلیامز^۵ ارائه شده به نام الگوریتم کشف تغییرات^۶ که علاوه بر کشف آفست‌های کوچک، زمان و بزرگی آنها را نیز تخمین می‌زند [۵]. اما این روش مبتنی بر فرض سفید بودن نویز سری زمانی است، در حالیکه نویز رنگی نیز در سری‌های زمانی وجود دارد. این مورد نیز در کشف صحیح آفست‌ها تأثیرگذار خواهد بود. در سال ۲۰۰۴م، تلاشی برای اصلاح مؤلفه‌های مختصاتی ایستگاه‌های دائم GPS اروپایی^۷ صورت گرفت و آفست‌هایی که زمان و علت وقوع آنها معلوم بوده، مانند تعویض تجهیزاتی چون آنتن، شناسایی و به مشاهدات اعمال شده است [۶]. همچنین در سال ۲۰۰۵م پرفتی^۸ به کشف آفست‌های موجود در ایستگاه‌های دائم GPS در ایتالیا^۹ پرداخته

است. وی از مدل فانکشنال استفاده نموده و روش وی قادر به کشف ۷۰ درصد از آفست‌های شناخته شده در مؤلفه‌های مختصاتی ایستگاه‌ها بوده است. اما در بعضی ایستگاه‌ها قادر به کشف آفست‌ها نبوده است که خود دلیل آن را وجود نویز رنگی در سری‌های زمانی معرفی کرده است [۷].

می‌توان تنها از یک سری زمانی جهت کشف آفست‌ها [۴، ۵، ۷] و یا بطور مشابه در برآورد مؤلفه‌های نویز [۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] استفاده نمود. اما گاهی اوقات ممکن است تعداد نویز و آفست‌ها زیاد و یا بزرگی آفست‌ها به قدری کوچک باشد که تنها با استفاده از یک سری زمانی، نتوان آنها را بخوبی کشف نمود؛ بلکه با ترکیب چند سری زمانی که آفست مربوطه در اپک‌های یکسان در آنها اتفاق افتاده است، می‌توان قدرت کشف را افزایش داد. بطور مثال می‌توان از سه مؤلفه‌ی مختصاتی در یک ایستگاه و یا از مؤلفه‌های مختصاتی چندین ایستگاه با ساختار مشترک از لحاظ وجود نویز و آفست استفاده نمود. این تلاش در مورد برآورد مؤلفه‌های نویز با استفاده از آنالیز چندمتغیره^{۱۰}، ارائه گردیده است [۱۳، ۱۴]. بنابراین هدف اصلی این تحقیق، کشف آفست با استفاده از آنالیز چندمتغیره خواهد بود که روابط مربوطه جهت کشف آفست ارائه خواهد شد. بخش اول اختصاص دارد به برآورد مؤلفه‌های نویز و آفست با استفاده از آنالیز تک-متغیره، بخش دوم شامل روابط مربوط به آنالیز چند-متغیره و بخش سوم شامل نتایج عددی خواهد بود. از سری‌های زمانی شبیه‌سازی شده با طول تقریبی ۸ سال استفاده شده که شامل ترند خطی، نویز سفید و رنگی و آفست‌ها با بزرگی و طول متفاوت می‌باشند. ابتدا از فرآیند برآورد مؤلفه‌های نویز استفاده نموده و در مراحل بعد آفست‌های موجود کشف و بررسی خواهند شد.

۲- آنالیز تک‌متغیره‌ی سری‌های زمانی^{۱۱}

منظور از آنالیز تک‌متغیره استفاده از تنها یک سری زمانی است، عبارتی هر یک از سه مؤلفه‌ی مختصاتی ایستگاه دائم بصورت مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد. در

^۱ Functional model^۲ Stochastic model^۳ LS-VCE: Least Squares Variance Component Estimation^۴ RLS: Random Level Shifts^۵ Williams^۶ Change Detection Algorithm^۷ EPN (EUREF Permanent Network) is a European Network of more than 200 continuously operating GNSS reference stations^۸ Nicola Perfetti^۹ Italian GPS Fiducial Network^{۱۰} Multivariate Least-Squares Harmonic Estimation^{۱۱} Univariate time-series

۲-۲- ماتریس واریانس - کواریانس مشاهدات، مدل تصادفی

ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات را می‌توان از طریق مدل تصادفی بصورت زیر بدست آورد:

$$Q_y = E\{(y - Ax)(y - Ax)^T\} = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \quad (5)$$

که Q_k ها ماتریس‌های کوفاکتور معلوم، σ_k فاکتور واریانس‌های مجهول و Q_0 قسمت معلوم ماتریس کواریانس مشاهدات می‌باشند. چنانچه سری زمانی شامل نویزهای سفید^۲ و دو نویز رنگی فلیکر^۳ و رندوم واک^۴ با واریانس‌های σ_w^2 و σ_f^2 و σ_{rw}^2 باشد و Q_0 را برابر صفر در نظر بگیریم، ماتریس کواریانس سری زمانی به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_y = \sigma_w^2 Q_w + \sigma_f^2 Q_f + \sigma_{rw}^2 Q_{rw} \quad (6)$$

در این حالت p برابر سه خواهد بود. ماتریس‌های کوفاکتور که ماتریس‌هایی با ابعاد $m \times m$ می‌باشند را می‌توان از روابط زیر بدست آورد که m تعداد مشاهدات در سری زمانی است.

$$Q_w = I_{m \times m} \quad (7)$$

عناصر ماتریس کوفاکتور نویز رنگی فلیکر می‌تواند از رابطه‌ی زیر محاسبه گردد [۱۵]:

$$q_{ij}^{(f)} = \begin{cases} \frac{9}{8} & \text{if } \tau = 0 \\ \frac{9}{8} \left(1 - \frac{\log \tau}{\log 2} + 2 \right) & \text{if } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\tau = |t_j - t_i|$$

این بخش روابط مورد نیاز جهت برآورد مولفه‌های نویز و آفست بصورت تک‌متغیره ارائه خواهد گشت.

۲-۱- برآورد مولفه‌های نویز

جهت کشف رفتارهای متناوب (سیگنال‌ها) از مدل تابعی استفاده می‌گردد. با معلوم بودن ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات، می‌توان از بهترین برآوردگر خطی ناریب^۱ جهت محاسبه‌ی مجهولات استفاده نمود:

$$\hat{x} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} y \quad (1)$$

که y بردار m مولفه‌ای از مشاهدات (مختصات روزانه مربوط به هر یک از مولفه‌ها)، x بردار مجهولات و A ماتریس ضرائب می‌باشد.

$$\hat{e} = P_A^\perp y \quad \text{و} \quad \hat{y} = P_A y \quad (2)$$

$\hat{y}$ مشاهدات برآوردشده و $\hat{e}$ باقیمانده‌های کمترین مربعات می‌باشند. P_A و $P_A^\perp$ نیز تصویرگرهای قائم می‌باشند:

$$P_A = A(A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} \quad (3)$$

$$P_A^\perp = I_m - P_A$$

زمانی که یک ترند خطی و همچنین سیگنال‌های متناوب (به تعداد q) در سری داده‌ها وجود داشته باشد، مدل فانکشنال بصورت زیر خواهد بود:

$$E\{y(t)\} = y_0 + rt + \sum_{k=1}^q (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (4)$$

جملات سینوسی و کسینوسی بیان‌کننده‌ی موج سینوسی همراه با فاز اولیه مخالف صفر می‌باشد. بردار مجهولات x شامل y_0 (عرض از مبدأ)، r (شیب خط) و ضرائب a_k و b_k است.

^۲ White noise

^۳ Flicker noise

^۴ Random walk noise

^۱ BLUE: Best Linear Unbiased Estimation

نویز رندوم واک نویز رنگی است که نسبت به زمان تغییر می‌کند. همچنین ماتریس کوفاکتور مربوط به نویز رندوم واک بصورت زیر می‌باشد [۱۲، ۱۵].

$$Q_{rw} = f_s^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & m \end{bmatrix} \text{ و } f_s = \frac{m-1}{T} \quad (9)$$

T زمان کل مشاهدات بر حسب سال (yr) و f_s فرکانس نمونه‌برداری با واحد $(yr)^{-1}$ می‌باشد.

۲-۳- برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات

به منظور برآورد مولفه‌های واریانس و دقت آنها، از روش مبتنی بر قاعده کمترین مربعات استفاده خواهیم نمود [۱، ۲، ۳].

$$\hat{\sigma}_{p \times 1} = N_{p \times p}^{-1} l_{p \times 1} \quad (10)$$

که عناصر آن به ازای $l, k = 1, 2, \dots, p$ از روابط زیر بدست می‌آید:

$$n_{kl} = \frac{1}{2} tr \left(Q_k Q_y^{-1} P_A^+ Q_l Q_y^{-1} P_A^+ \right) \quad (11)$$

و

$$l_k = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^T Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1} \hat{\epsilon} - \frac{1}{2} tr \left(Q_k Q_y^{-1} P_A^+ Q_0 Q_y^{-1} P_A^+ \right) \quad (12)$$

نتایج حاصل از برآورد مولفه‌های واریانس در سری‌های زمانی ایستگاه‌های دائم GPS، بیانگر این مطلب بوده است که یکسری نویز رنگی نیز همراه با نویز سفید، در سری‌های زمانی وجود داشته و معمولا دو نویز رنگی فلیکر و رندوم واک تواما وجود ندارند و از طرفی در سری‌های زمانی موقعیت، حضور نویز فلیکر به‌همراه نویز سفید نتیجه گرفته شده است [۳، ۱۶].

۲-۴- کشف آفست در سری‌های زمانی

وقوع آفست‌ها در سری‌های زمانی ژئودتیک تقریبا اجتناب‌ناپذیر است. به منظور افزایش دقت نتایج برآورد شده از سری‌های زمانی، آنالیز صحیح سری‌ها امری واجب می‌باشد. بنابراین در کنار برآورد نویز و سیگنال‌ها، آفست‌های رخ داده نیز بایستی با دقت بالا کشف و اصلاح گردند. آفست‌ها معمولا به حرکات پوسته‌ای واقعی مثل زلزله، رویدادهای مصنوعی مانند تأثیرات محیطی، خرابی و تعویض تجهیزات و خطاهای انسانی مثل گزارش نادرست تاریخ و اطلاعات ورودی به پایگاه داده طبقه‌بندی می‌گردند.

پس از مرحله‌ی برآورد مولفه‌های نویز، جهت کشف آفست می‌توان آزمون آماری زیر را در نظر گرفت: در فرض صفر، هیچ آفستی وجود ندارد:

$$H_0: E(y) = Ax \quad (13)$$

$$E\{y(t)\} = y_0 + rt + \sum_{k=1}^q (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$$

که بردار مجهولات بصورت زیر خواهد بود:

$$x = [y_0 \ r \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_q \ b_q]^T$$

اما در فرض مقابل علاوه بر وجود نویز، آفست نیز وجود دارد:

$$H_a: E(y) = Ax + A_{off} x_{off} \quad (14)$$

که در آن A_{off} برابر است با:

$$A_{off} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$p_i = \begin{cases} 1; & t_i \geq t_{off} \\ 0; & t_i < t_{off} \end{cases}, \quad x_{off} = c_{off}$$

c_{off} بزرگی آفست ایجاد شده می‌باشد. جهت یافتن t_{off} در فرض مقابل، از حل مسأله زیر استفاده می‌شود:

$$t_{off} = \underset{t_j}{\operatorname{argmax}} P(t_j) \quad (16)$$

پس از یافتن اولین آفت و تست آن، جهت یافتن آفت‌های دیگر (در صورت وجود) مراحل قبلی تکرار می‌گردد. به اینصورت که این بار یک ستون، یعنی A_j مربوط به آفت کشف شده، به ماتریس A اضافه می‌گردد. سپس با جایگذاری A جدید با بدست آوردن تصویرگر قائم $P_A^\perp$ از رابطه‌ی ۳ و بردار باقیمانده‌ها $\hat{e}$ ، رابطه ۲، t_{off} جدید بدست آمده و تست می‌گردد. این مراحل هر بار با اضافه شدن یک ستون جدید به ماتریس A تکرار می‌شود تا زمانیکه فرض صفر قبول گردد.

۳- آنالیز چندمتغیره‌ی سری‌های زمانی^۳

جهت افزایش قدرت تشخیص، می‌توان به جای استفاده از یک بردار مشاهداتی، از چندین بردار با ساختار یکسان و بازه‌ی زمانی برابر استفاده نمود، مانند سری‌های مربوط به مؤلفه‌های سه‌گانه مختصات در یک ایستگاه دائم.

۳-۱- برآورد مؤلفه‌های نویز در آنالیز چند-متغیره

جهت برآورد مؤلفه‌های نویز چندین سری زمانی بصورت همزمان، از روش برآورد هارمونیک چندمتغیره^۴ استفاده خواهیم نمود [۱۳]. چنانچه g سری زمانی داشته باشیم، ماتریس مجهولات و مشاهدات بصورت زیر خواهد بود:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_g \end{bmatrix}_{n \times g}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_g \end{bmatrix}_{m \times g} \quad (21)$$

که در آن y_i بردارهای $m \times 1$ و x_i بردارهای $n \times 1$ و $i = 1, 2, \dots, g$ می‌باشد. مدل فانکشنال نیز در آنالیز چندمتغیره، بصورت زیر خواهد بود:

$$E(\text{vec}(Y)) = (I_g \otimes A) \text{vec}(X) \quad (22)$$

که در آن $P(t_j)$ به ازای هر یک از اپک‌ها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$P(t_j) = \hat{e}^T \hat{Q}_y^{-1} A_j (A_j^T \hat{Q}_y^{-1} P_A^\perp A_j)^{-1} A_j^T \hat{Q}_y^{-1} \hat{e} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

که بردار A_j بصورت زیر می‌باشد:

$$A_j = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$p_i = \begin{cases} 1; & i \geq j \\ 0; & i < j \end{cases}$$

در حقیقت اپکی که به ازای آن $Ax + A_{off}x_{off}$ به بهترین نحو ممکن به y برازنده (نزدیک) می‌شود، به عنوان اپک شامل آفت در نظر گرفته می‌شود. در معادله‌ی فوق $\hat{Q}_y$ و $P_A^\perp$ از مرحله‌ی برآورد مؤلفه‌های نویز بدست آمده است. به ازای تمامی j ها، $j = 1, 2, \dots, m$ ، بردار A_j محاسبه و مقادیر $P(t_j)$ در هر اپک محاسبه شده و سپس اپکی که دارای بیشترین مقدار $P(t_j)$ است به عنوان آفت انتخاب می‌گردد.

۲-۵- تست آفت‌های کشف شده در سری‌های زمانی

پس از بدست آوردن t_{off} ، جهت معنی‌دار بودن آفت از نظر آماری از تست زیر استفاده شده است:

$$T = \max_{t_j} P(t_j) \quad , \quad T \sim \chi^2_{(1, 1-\alpha)} \quad (19)$$

در این تست از آماره T و تابع توزیع خی دو^۱ با یک درجه آزادی استفاده می‌شود، چون آنالیز تکمتغیره^۲ را داریم و α سطح معنادار می‌باشد.

$$\begin{cases} \text{if } T < \chi^2 & : H_0 \text{ قبول می‌شود} \\ \text{if } T > \chi^2 & : H_0 \text{ رد می‌شود} \end{cases} \quad (20)$$

^۳ Multivariate analysis

^۴ Multivariate least-squares harmonic estimation

^۱chi square distribution

^۲ Univariate analysis

که $\otimes$ ضرب کرونکر می‌باشد. در این تحقیق از سه مؤلفه‌ی مختصاتی x, y, z در یک ایستگاه استفاده خواهیم نمود. بنابراین در هر ایستگاه GPS، سه سری زمانی خواهیم داشت، یعنی $g = 3$. با معلوم بودن ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات $Q_{m \times m}$ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} Y \\ \hat{E} &= P_A^{\perp} Y \quad \text{و} \quad \hat{Y} = P_A Y \end{aligned} \quad (23)$$

$\hat{X}$ مجهولات برآوردشده، $\hat{Y}$ مشاهدات برآوردشده و $\hat{E}$ باقیمانده‌های کمترین مربعات می‌باشند و P_A و $P_A^{\perp}$ نیز تصویرگرهای قائم می‌باشند، همانند رابطه‌ی ۳. چنانچه مؤلفه‌های واریانس-کواریانس مربوط به نویز سفید و فلیکر را در نظر بگیریم:

$$D(\text{vec}(Y)) = Q_{\text{vec}(Y)} = \Sigma_w \otimes I + \Sigma_f \otimes Q_f \quad (24)$$

Σ_w و Σ_f ماتریس‌های مجهول $g \times g$ می‌باشند که g تعداد سری‌های زمانی است:

$$\Sigma_w = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^w & \sigma_{12}^w & \dots & \sigma_{1g}^w \\ \sigma_{12}^w & \sigma_{22}^w & \dots & \sigma_{2g}^w \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1g}^w & \sigma_{2g}^w & \dots & \sigma_{gg}^w \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^f & \sigma_{12}^f & \dots & \sigma_{1g}^f \\ \sigma_{12}^f & \sigma_{22}^f & \dots & \sigma_{2g}^f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1g}^f & \sigma_{2g}^f & \dots & \sigma_{gg}^f \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

اما چنانچه تعداد سری‌های زمانی g و همچنین تعداد مشاهدات m زیاد باشد، وارون‌گیری از ماتریس $Q_{\text{vec}(Y)}$ که یک ماتریس $mg \times mg$ می‌باشد، محاسبات را سنگین و وقت‌گیر خواهد نمود. بنابراین می‌توان از مدل خاصی که در ذیل آن را توضیح می‌دهیم استفاده نمود [۱۳].

فرض می‌کنیم که ساختار دو نویز سفید و رنگی برای سری‌های زمانی متفاوت، یکسان بوده و همچنین ماتریس همبستگی نیز برای هر دو نویز نیز یکسان می‌باشد. در این صورت ماتریس‌های مجهول Σ_f و Σ_w تنها در ضرائب اسکالر λ_f و λ_w متفاوت خواهند بود.

$$\Sigma_f = \lambda_f \Sigma, \quad \Sigma_w = \lambda_w \Sigma \quad (26)$$

با در نظر گرفتن دو نویز سفید و رنگی فلیکر ماتریس کواریانس بصورت زیر خواهد بود (با ابعاد $m \times m$).

$$Q = \lambda_w I + \lambda_f Q_f \quad (27)$$

در این حالت دو ضریب مجهول $p = 2$ خواهیم داشت:

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_w \\ \hat{\lambda}_f \end{bmatrix} \quad (28)$$

که جهت برآورد این ضرائب نیز از روش مبتنی بر قاعده کمترین مربعات استفاده می‌شود:

$$\hat{s}_{p \times 1} = N_{p \times p}^{-1} l_{p \times 1} \quad (29)$$

که در آن به ازای $l, k = 1, 2, \dots, p$:

$$n_{kl} = \frac{g}{2} \text{tr}(Q^{-1} P_A^{\perp} Q_k Q^{-1} P_A^{\perp} Q_l) \quad (30)$$

$$l_k = \frac{m-n}{2} \text{tr}(\hat{E}^T Q^{-1} Q_k Q^{-1} \hat{E} (\hat{E}^T Q^{-1} \hat{E})^{-1}) \quad (31)$$

باقیمانده‌های برآورد شده نیز از رابطه‌ی ۲ بدست می‌آید:

$$\hat{E} = P_A^{\perp} Y$$

پس از برآورد این ضرائب و بدست آوردن ماتریس واریانس-کواریانس برآورد شده می‌توان ماتریس Σ را برآورد نمود:

$$\hat{Q} = \hat{\lambda}_w I + \hat{\lambda}_f Q_f \quad (32)$$

$$\Sigma = \frac{\hat{E}^T \hat{Q}^{-1} \hat{E}}{m-n}$$

۳-۲- کشف آفست با استفاده از آنالیز چندمتغیره

پس از مرحله‌ی برآورد مولفه‌های نویز، جهت کشف آفست آزمون آماری زیر در نظر گرفته می‌شود. در فرض صفر، هیچ آفستی وجود ندارد:

$$H_0: E(\text{vec}(Y)) = (I_g \otimes A) \text{vec}(X) \quad (33)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_g \end{bmatrix}_{n \times g} \quad \text{که}$$

$$x_i = [y_0 \ r \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_q \ b_q]^T \quad \text{و}$$

$$i = 1, 2, \dots, g$$

اما در فرض مقابل علاوه بر وجود نویز، آفست نیز وجود دارد:

$$H_a: E(\text{vec}(Y)) = \quad (34)$$

$$= (I_g \otimes A) \text{vec}(X) + (I_g \otimes A_{\text{off}}) \text{vec}(X_{\text{off}})$$

که در آن

$$A_{\text{off}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}, \quad p_i = \begin{cases} 1; & t_i \geq t_{\text{off}} \\ 0; & t_i < t_{\text{off}} \end{cases} \quad (35)$$

$$X_{\text{off}} = \begin{bmatrix} x_{\text{off}_1} & x_{\text{off}_2} & \dots & x_{\text{off}_g} \end{bmatrix}_{1 \times g}$$

$$x_{\text{off}_i} = c_{\text{off}} \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots, g$$

جهت یافتن t_{off} در این فرض، از رابطه‌ی ۱۶ استفاده می‌شود:

$$t_{\text{off}} = \underset{t_j}{\text{argmax}} P(t_j)P(t_j)$$

به ازای هر یک از زمان‌ها بدست می‌آورد که در حالت چندمتغیره بصورت زیر می‌باشد:

$$P(t_j) = \text{tr}(\hat{E}^T Q^{-1} A_j (A_j^T Q^{-1} P_A^{-1} A_j)^{-1} A_j^T Q^{-1} \hat{E} \Sigma^{-1}) \quad (36)$$

که Q و P_A^{-1} از مرحله‌ی برآورد مولفه‌های نویز بدست آمده است. به ازای تمامی j ها، $j = 1, 2, \dots, m$ بردار A_j محاسبه، از رابطه ۱۸ و مقادیر $P(t_j)$ در هر یک محاسبه شده و سپس اپکی که دارای بیشترین $P(t_j)$ است به عنوان آفست انتخاب می‌گردد.

۳-۳- تست آفست‌های کشف شده در آنالیز چندمتغیره

تست زیر جهت صحیح بودن آفست بدست آمده انجام می‌گیرد. همانند رابطه‌ی ۱۹:

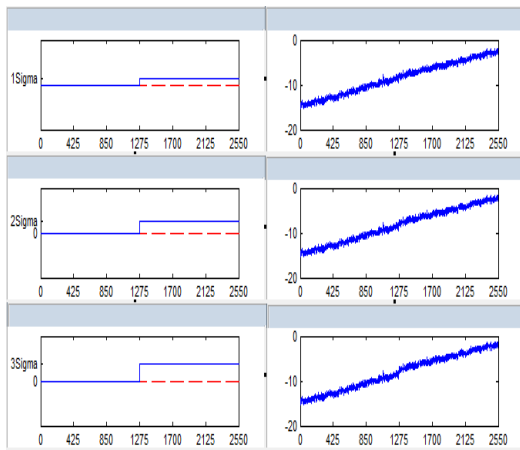
$$T = \max_{t_j} P(t_j) \sim \chi^2_{(g, 1-\alpha)}$$

در این تست از آماره T و تابع توزیع χ^2 دو با درجه آزادی g استفاده می‌شود که g تعداد سری‌های زمانی و α سطح معنادار می‌باشد. در این مقاله مقدار $g = 3$ است چرا که از سه مولفه‌ی مختصات در هر ایستگاه GPS استفاده شده است. پس از یافتن اولین آفست و تست آن، جهت یافتن آفست‌های دیگر (در صورت وجود) مراحل قبلی تکرار می‌گردد. این تکرارها هر بار با اضافه شدن یک ستون به ماتریس A ادامه می‌یابد تا زمانی که فرض صفر قبول گردد.

۴- نتایج عددی

در این تحقیق از یکسری داده‌های شبیه‌سازی شده با ۲۵۵۰ مشاهده در اپک‌های روزانه و طول بازه‌ی ۸ سال استفاده شده است و نویز تولید شده برای این سری‌های زمانی، نویزی با توزیع نرمال می‌باشد. مزیت استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده نسبت به داده‌ی واقعی اینست که بزرگی و محل دقیق آفست‌ها از قبل برایمان معلوم می‌باشد. ابتدا مشاهدات با در نظر گرفتن یک ترند خطی شبیه‌سازی شده و سپس نویزهای سفید و رنگی به آنها اضافه گشته است.

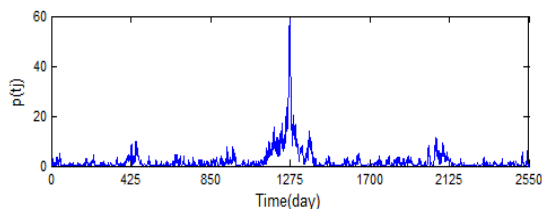
نحوه‌ی تولید نویز نیز بدین صورت می‌باشد که ابتدا ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات را بر اساس نویز



شکل ۱- آفست‌های شبیه‌سازی شده در سری‌های زمانی، از اپک ۱۲۷۵ به بعد (اپک مرکزی)، با بزرگی‌های متفاوت یک برابر، دو برابر و سه برابر انحراف معیار نویز.

۴-۲- آنالیز تک‌متغیره‌ی سری‌های زمانی

در اینجا تنها از مولفه‌ی x هر سری استفاده شده است. شکل (۲) نمونه‌ای از یک آفست کشف شده در یکی از سری‌ها (آفست در اپک مرکزی) را که اپک آفست‌دار در آن دارای ماکزیمم توان می‌باشد، نشان می‌دهد. تمامی مدل‌ها و حالت‌های مختلف برای ۱۰۰ سری زمانی بصورت مجزا اجرا شده است. نکته‌ی قابل توجه اینست که در شمارش هر اپک آفست‌دار، یک بار دقیقاً خود اپک آفست‌دار شمارش شده و بار دیگر اپک‌های اطراف در بازه‌ی زمانی مثبت پنج روز تا منفی پنج روز نیز بعنوان آفست مورد نظر لحاظ شده است، (جدول ۱). همان‌طور که در جدول مشاهده می‌نمایید، بدترین نتایج مربوط به زمانی است که نویز شبیه‌سازی شده در سری-های زمانی دو نویز سفید و رنگی بوده است، اما در مرحله‌ی برآورد تنها نویز سفید در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- نمودار $P(t_j)$ برای آفست کشف شده در اپک ۱۲۷۵

سفید و رنگی ساخته شده و سپس ماتریس مثلثی تجزیه‌ی چولسکی^۱ آن بدست می‌آید. ترانهاده‌ی^۲ این ماتریس در برداری به سائز مشاهدات و حاوی مقادیر دارای توزیع نرمال^۳ ضرب شده و به بردار مشاهدات که از قبل شامل روند خطی می‌باشد، اضافه می‌گردد.

۴-۱- توصیف مدل‌ها و داده‌ها

در سری‌های زمانی شبیه‌سازی شده سه حالت با توجه به مکان قرارگیری آفست (ابتدا، مرکز و انتهای بازه) در نظر گرفته شده است. در حالت اول، آفست از اپک ۴۲۵ به بعد ایجاد شده است. در حالت دوم، آفست در اپک مرکزی ۱۲۷۵ و در حالت سوم در اپک ۲۱۲۵ به بعد. هدف بررسی وابستگی یا عدم وابستگی روش به مکان وقوع آفست می‌باشد. همچنین هر سه این حالت‌ها برای آفست‌ها با بزرگی‌های متفاوت ۱ برابر، ۲ برابر و ۳ برابر انحراف معیار نویز تست شده است. همانند شکل ۱ در حالت دوم، همچنین در مورد نویزهای سفید و رنگی شبیه‌سازی شده در سری‌های زمانی نیز سه مدل متفاوت بصورت زیر در نظر گرفته شده است. مدل اول: سری‌های زمانی در مرحله‌ی شبیه‌سازی شامل هر دو نویز، یعنی سفید و رنگی بوده، اما در مرحله‌ی برآورد مولفه‌های نویز، تنها نویز سفید در نظر گرفته می‌شود. مدل دوم: سری‌های زمانی ذاتاً شامل هر دو نویز، یعنی سفید و رنگی بوده و در مرحله برآورد نیز مولفه‌های هر دو نویز در نظر گرفته می‌شود. مدل سوم: سری‌های زمانی خود شامل تنها نویز سفید بوده که در مرحله برآورد نیز فقط نویز سفید در نظر گرفته می‌شود. اما ترکیب مراحل فوق را در دو مدل عمده خواهیم داشت؛ مدل اول: استفاده از آنالیز تک‌متغیره، با استفاده از یکی از مؤلفه‌های مختصات. مدل دوم: استفاده از آنالیز چند-متغیره که استفاده از هر سه مؤلفه‌ی مختصات x ، y و z مربوط به یک ایستگاه، بطور همزمان می‌باشد. محاسبات عددی و نتایج آنها در قالب دو بخش مجزا (آنالیز تک متغیره و چندمتغیره) توضیح داده خواهد شد.

^۱ Cholesky factorization

^۲ Transpose

^۳ Normally distributed pseudorandom numbers

جدول ۱- انواع مدل‌های مورد بررسی در آنالیز تک‌متغیره

معیار نویز		معیار نویز		معیار نویز		معیار نویز	
نویز شبیه- سازی	نویز برآورد شده	اپک آفست دار	درصد کشف دقیق اپک	درصد کشف با خطای ± 5 روز	درصد کشف دقیق اپک	درصد کشف با خطای ± 5 روز	آفست با بزرگی ۱ برابر انحراف
سفید	سفید	۴۲۵	۲۲	۷۹	۵۸	۹۸	آفست با بزرگی ۳ برابر انحراف
		۱۲۷۵	۲۰	۸۱	۵۴	۹۹	
		۲۱۲۵	۲۵	۸۴	۵۷	۱۰۰	
سفید و رنگی	سفید و رنگی	۴۲۵	۱۲	۳۱	۶۴	۹۷	
		۱۲۷۵	۱۰	۳۰	۶۱	۹۷	
		۲۱۲۵	۱۴	۳۷	۶۱	۹۵	
سفید و رنگی	سفید	۴۲۵	۵	۱۴	۵۰	۸۵	
		۱۲۷۵	۵	۲۰	۳۵	۶۵	
		۲۱۲۵	۸	۲۷	۵۰	۸۱	

از طرفی بهترین درصدها مربوط به حالتی است که نویز موجود در سری زمانی سفید بوده و در برآورد نیز نویز سفید در نظر گرفته شده است. این نشان می‌دهد که برآورد صحیح مولفه‌های نویز تاثیر مستقیم بر روی کشف آفست‌ها دارد. همچنین در حالتی که نویز موجود در سری‌های زمانی دو نویز سفید و رنگی بوده و در برآورد نیز دو نویز سفید و رنگی استفاده شده است، نتایج بهتر از زمانی است که از نویز رنگی صرفنظر شده است.

همچنین هرچه اندازه‌ی آفست بزرگتر باشد، احتمال کشف آن نیز افزایش می‌یابد. از طرفی در جداول فوق، می‌توان عدم وابستگی روش به مکان وقوع آفست‌ها را دید، چرا که درصدهای بدست آمده برای آفست‌ها در اپک‌های متفاوت، مقادیری نزدیک به هم را داشته است.

۳-۴- آنالیز چندمتغیره‌ی سری‌های زمانی

در این بخش از آنالیز چندمتغیره استفاده می‌شود. عبارتی در هر یک از حالت‌ها و برای ۱۰۰ بار اجرای مستقل، بردار مشاهدات شامل سه سری مشاهدات مربوط به سه مولفه‌ی مختصات x ، y و z در هر سری زمانی بصورت همزمان می‌باشد. این حالت‌ها نیز شامل آفست‌ها با بزرگی‌های متفاوت، اپک‌های متفاوت و

همچنین انواع نویز و چگونگی برآورد آن می‌باشند که در جدول ۲ نتایج حاصله آورده شده است. اینجا نیز همانند نتایج مربوط به آنالیز تک‌متغیره، بهترین نتایج مربوط به حالتی است که نویز موجود در سری زمانی سفید بوده و در برآورد نیز نویز سفید در نظر گرفته شده است. همچنین بدترین درصدها مربوط به زمانی است که نویز شبیه‌سازی شده در سری‌های زمانی دو نویز سفید و رنگی بوده است، اما در مرحله‌ی برآورد تنها نویز سفید در نظر گرفته شده است و از نویز رنگی صرفنظر شده است. اما در حالتی که نویز موجود در سری‌های زمانی دو نویز سفید و رنگی بوده و در برآورد نیز دو نویز سفید و رنگی استفاده شده است، نتایج بهتر از زمانی است که از نویز رنگی صرفنظر شده است. همچنین در این نتایج نیز با افزایش بزرگی آفست‌ها، احتمال کشف آنها افزایش می‌یابد. درصدهای بدست آمده برای آفست‌ها در اپک‌های متفاوت نیز، مقادیری نزدیک به هم را داشته است. اما در مقایسه نتایج مربوط به آنالیز تک‌متغیره و چند-متغیره، همان‌طور که در جدول ملاحظه می‌شود، نتایج مربوط به آنالیز چندمتغیره در تمامی حالات، بهتر از نتایج تک‌متغیره می‌باشد (ستون‌های مربوط به درصد کشف دقیق اپک و درصد کشف با خطای ± 5 روز).

جدول ۲- انواع مدل‌های مورد بررسی در آنالیز چندمتغیره

آفست با بزرگی ۱ برابر انحراف معیار نویز		آفست با بزرگی ۲ برابر انحراف معیار نویز		آفست با بزرگی ۳ برابر انحراف معیار نویز	
نویز شبیه- سازی	نویز برآورد شده	اپک آفست دار	درصد کشف دقیق اپک	درصد کشف با خطای ± 5 روز	درصد کشف دقیق اپک
سفید	سفید	۴۲۵	۵۶	۹۸	۹۳
		۱۲۷۵	۵۳	۹۹	۸۸
		۲۱۲۵	۵۹	۱۰۰	۹۱
سفید و رنگی	سفید و رنگی	۴۲۵	۴۹	۷۹	۹۶
		۱۲۷۵	۴۷	۸۳	۹۷
		۲۱۲۵	۵۴	۷۶	۹۴
سفید و رنگی	سفید	۴۲۵	۲۹	۵۷	۸۸
		۱۲۷۵	۲۶	۵۱	۸۸
		۲۱۲۵	۳۰	۵۴	۸۶

بوده است. البته منوط به این مورد که برآورد صحیحی از نویز نیز داشته باشیم. برای آفست‌هایی با بزرگی ۱ برابر σ نیز، نتایج حدود ۸۰ درصد را به‌مراه داشته است (ستون‌های مربوط به درصد کشف با خطای ± 5 روز). اما همین نتیجه زمانی که از نویز رنگی صرف‌نظر شده است و برآورد نادرست از نویز بعمل آمده است حدود ۵۵ درصد می‌باشد.

همچنین نتایج گویای عدم وابستگی روش، به مکان وقوع آفست‌ها می‌باشد. چراکه درصدهای بدست آمده برای آفست‌ها در اپک‌های متفاوت، مقادیری نزدیک به هم را داشته است. بعبارتی، اینکه آفست در ابتدای بازه-ی سری زمانی، یا در اپک‌های مرکزی و یا در انتهای بازه باشد، تاثیری بر کاهش و یا افزایش احتمال کشف آن نخواهد داشت.

کشف آفست سری‌های زمانی مربوط به داده‌های واقعی ایستگاه‌های دائم GPS در حال بررسی است. این داده‌ها در مقایسه با داده‌های شبیه سازی شده می‌تواند دارای اشتباه و همچنین چندین آفست بطور همزمان در یک سری باشد. الگوریتم مورد استفاده، اشتباهات را نیز تشخیص داده و آنها را از آفست‌ها تفکیک می‌دهد.

۵- نتایج و پیشنهادها

در این تحقیق از داده‌های شبیه سازی شده با ۲۵۵۰ مشاهده در اپک‌های روزانه و طول بازه‌ی ۸ سال استفاده شد که انواع مختلف نویز و آفست در آنها گنجانده شد. یکبار آنالیز تک‌متغیره و بار دیگر آنالیز چندمتغیره برای کشف آفست‌ها استفاده شد و این کار برای ۱۰۰ سری زمانی بصورت مجزا اجرا شد و نتایج ارائه گشت. نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در مورد استفاده از دو مدل کلی آنالیز تک متغیره و سه‌متغیره در تمامی حالت‌های ذکر شده، استفاده از آنالیز چندمتغیره قدرت تشخیص را بالاتر برده است. البته این تشخیص صحیح منوط به برآورد صحیح نویز در سری زمانی است. چرا که برآورد صحیح مولفه‌های نویز، برآورد صحیحی از ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات و در نتیجه برآورد صحیحی از مجهولات را در بر خواهد داشت.

هدف اصلی این تحقیق تست آنالیز چندمتغیره بود که با توجه به نتایج، این تست با موفقیت انجام شده و برای آفست‌ها با بزرگی ۲ برابر σ به بالا، نتیجه کامل را به‌مراه داشته و قادر به کشف آفست‌ها در تمامی سری‌ها

-"Estimation of variance components and applications".....
-"
-", *Journal of Surveying Engineering*..... -...
-
-*Journal of uusiness & cc onomic tt aisiics*"..... -...
- *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*.....
-*GPS Solutions*..... -...
-*Journal of Geodesy*..... -...
-
-*Journal of Geodesy*..... -...
- *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*.....
-*Journal of Geodesy*.....
- *Journal of Geophysical Research*..... -...
-*Journal of Geodesy, Berlin*..... -...
-*GPS Solutions*..... -...
-*Journal of Geophysical Research*..... -...
-*Journal of Geophysical Research-Solid Earth*.....

