نشریه علمی- پژوهشی علوم و فنون نقشه برداری، دوره سوم، شماره ۱، مرداد ماه ۱۳۹۲

مقایسه روش‌های پایدارسازی معادله‌ی انتگرالی آبل- پواسن در مسئلهٔ انتقال به سمت پایینِ مدل‌سازی میدان ثقل

عباسعلی جمعه‌گی*[۱]، عبدالرضا صفری[۲]

[۱]کارشناس ارشد عملیات نقشه برداری مدیریت اکتشاف شرکت ملی نفت ایران و فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی نقشه‌برداری- پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
ajomegi@ ut.ac.ir

[۲]دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
asafari@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت اسفند ۱۳۹۱، تاریخ تصویب اردیبهشت ۱۳۹۲)

چکیده

در روش تعیین ژئوئید و مدلسازی میدان ثقل، انتقال بسمت پایین تابعکهای میدان ثقل زمین، با حل معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن انجام می‌پذیرد. از آنجائی که معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن از نوع معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول است، در زمرهٔ مسائل بد وضع (Ill-pose) قرار داشته، و یافتن جواب آن مستلزم پایدارسازی می‌باشد. در این مقاله ۶ روش معمول پایدارسازی مسائل بد وضع، برای پایدارسازی دستگاه معادلات حاصل از گسسته سازی معادلهٔ انتگرالی آبل- پواسن، در یک مثال شبیه‌سازی شده در منطقهٔ فارس ساحلی واقع در جنوب ایران مورد استفاده و کارائی آنها با یکدیگر مقایسه گردیده است. نتایج حاصله نشان می‌دهند که روش پایدارسازی کُخ- کوشه و روش پایدارسازی تیخونوف با معیار انتخاب پارامتر منحنی $\boldsymbol{L}$ برای حل معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن در منطقهٔ جغرافیایی فارس ساحلی مناسب‌ترین روش پایدارسازی می‌باشند.

واژگان کلیدی: مسئله مقدار مرزی، انتقال به سمت پایین، پایدارسازی، منحنی $\boldsymbol{L}$ فیلیپس- تیخونوف، کُخ- کوشه.

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

تعیین ژئوئید دقیق (مدلسازی میدان ثقل) در خشکی‌ها مستلزم حل مسائل مقدار مرزی است. استوکس و مالدنسکی، پیشگامان تعیین ژئوئید و مدلسازی میدان ثقل از طریق حل مسائل مقدار مرزی‌اند [۱]. در دهه گذشته مسئلهٔ مقدار مرزی متفاوتی با مسائل مقدار مرزی استوکس و مالدنسکی، توسط اردلان و گرافارند برای تعیین ژئوئید ارائه گردیده است [۲]. این مسئله مقدار مرزی بعدها، توسط صفری توسعه یافت [۳]. برای حل مسئلهٔ مقدار مرزی تعیین ژئوئید به روش اردلان و گرافارند، می‌بایست تابعک‌های میدان ثقل زمین را نسبت به یک میدان پتانسیلِ ثقلِ رفرانس، خطی و باقیماندهٔ مشاهدات (مشاهدات تفاضلی) را از طریق انتقالِ بسمتِ پایین[۱] به سطح بیضوی رفرانس $\mathbb{E}^2_{a,b}$ منتقل نمود. با انتخاب میدانِ رفرانسی که تا حدِ امکان به میدان واقعی زمین نزدیک باشد، می‌توان با تقریب خوبی، مسئله مقدار مرزی را خطی نمود. چنین میدان رفرانسی، از ترکیب جواب حاصل از حل معادلهٔ دیفرانسیل لاپلاس برای پتانسیل جاذبه در فضای خارج زمین به اضافهٔ اثرات میدان جاذبهٔ اجرام در فاصلهٔ نزدیک از طریق کاربرد انتگرال نیوتن و لحاظ نمودن اثر میدان گریز از مرکز زمین تامین می‌گردد. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر به [۲، ۳] مراجعه شود.

جواب مسئلهٔ مقدار مرزی تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، با مقادیر مرزی از نوع پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی هارمونیک روی سطح بیضوی رفرانس، معادلهٔ انتگرالی آبل- پواسن می‌باشد. یکی از قابلیت های مهم مدلسازی میدان ثقل به روش اردلان و گرافارند این است که برای تمامی تابعکهای میدان ثقل قابلیت نوشتن معادله مشاهده‌ی انتگرالی آبل- پواسن وجود دارد [۳].

در مسئلهٔ انتقال به سمت پایین، در این مقاله، شتاب جاذبهٔ تفاضلی هارمونیک روی سطح زمین معلوم، و هدف تعیین پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی بر روی سطح بیضوی رفرانس $\mathbb{E}^2_{a,b}$، مجهول زیر علامت انتگرال، می‌باشد. از آنجاکه در فضای خارج بیضوی رفرانس مقادیر مرزی شتاب جاذبهٔ تفاضلی $\delta\Gamma\ \mathbf{x}$ در معادلهٔ انتگرالی آبل- پواسن صدق می‌کنند؛ از این معادلهٔ انتگرالی بعنوان یک معادله مشاهده برای بدست آوردن پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس استفاده می‌شود [۴].

معادلهٔ انتگرالی آبل- پواسن پیوسته برای شتاب جاذبهٔ تفاضلی هارمونیک به صورت ذیل است [۲، ۳].

$$
\begin{aligned}
&\delta\Gamma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_\Gamma \mid \delta\Gamma(\mathbf{x})\rangle + \mathcal{O}\left(\delta\Gamma^2(\mathbf{x})\right)\\
&\delta\Gamma(\mathbf{x}) = \delta\Gamma_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \delta\Gamma_\phi \mathbf{e}_\phi + \delta\Gamma_\eta \mathbf{e}_\eta \,;\, \mathbf{e}_\Gamma = \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2}\mathbf{e}_\lambda + \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2}\mathbf{e}_\phi + \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2}\mathbf{e}_\eta\\
&\delta\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2}\delta\Gamma_\lambda + \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2}\delta\Gamma_\phi + \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2}\delta\Gamma_\eta\\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\iint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\lambda}\delta W^L(\lambda',\phi')\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\iint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\phi}\delta W^L(\lambda',\phi')\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\iint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\eta}\delta W^L(\lambda',\phi')
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

در معادلهٔ ۱، $\{\Gamma_\lambda,\Gamma_\phi,\Gamma_\eta\}$ سه مولفهٔ بردار شتاب ثقل رفرانس $\boldsymbol{\Gamma}$ بر حسب سیستم مختصاب منحنی‌الخط بیضوی ژاکوبی با مولفه‌های $\{\lambda,\phi,\eta\}$ بوده، $\varpi\ \phi'$ تابع وزن بوده که موجب تعامد پذیری هارمونیکهای بیضوی بر روی بیضوی رفرانس می‌گردد [۱۶]. $S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}$ مساحت سطح بیضوی رفرانس $\mathbb{E}^2_{a,b}$، $\{g_{\lambda\lambda},g_{\phi\phi},g_{\eta\eta}\}$ مولفه‌های تنسور متریک سیستم مختصات منحنی‌الخط بیضوی ژاکوبی، $\boldsymbol{x}$ بردار موقعیت شتاب ثقل تفاضلی روی سطح زمین و $\boldsymbol{k^L}$ کرنل تغییر یافتهٔ انتگرال آبل-پواسن پس از حذف میدان ثقل رفرانس است. اندیس بالای $\boldsymbol{L}$ در اینجا نشان دهندهٔ درجهٔ و مرتبهٔ ماکزیمم بسط هارمونیک‌های بیضوی بکار رفته در میدان ثقل رفرانس می‌باشد که با توجه به حذف آن از روی مشاهدات لازم است این اثر از روی کرنل نیز حذف گردیده و بدین طریق کرنل تغییر شکل یافتهٔ $\boldsymbol{k^L}$ حاصل می‌گردد. برای جزئیات بیشتر به [۳، ۵] مراجعه شود. $\{a,b,\varepsilon\}$ به ترتیب نیم‌قطر اطول، نیم قطر اقصر و خروج از مرکز خطی بیضوی رفرانس $\mathbb{E}^2_{a,b}$ می‌باشد. $\Delta\lambda'\Delta\phi'$ المان سطحی انتگرال آبل پواسن پس از گسسته سازی بوده که بیانگر قدرت تفکیک انتگرال‌گیری نیز می‌باشد. ***imax*** و ***jmax*** نیز حد بالای شبکهٔ انتگرال-گیری پس از گسسته‌سازی را روی بیضوی رفرانس نشان می‌دهند.

با توجه به اینکه مشاهدات در سطح زمین بصورت گسسته قابل برداشت هستند، بنابراین در عمل از معادلات انتگرال آبل-پواسن به شکل گسسته استفاده می‌شود. فرم

[۱] Downward Continuation

گسسته معادلهٔ انتگرالی آبل- پواسن بـرای تابعـک شـتاب جاذبهٔ تفاضلی هارمونیک به صورت ذیل است [۲، ۳، ۵].

$$\begin{aligned}\delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \gamma(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{e}_{\Gamma} \mid \delta\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \Bigg(\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_{\lambda}}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}} \sum_{i=1}^{i\max} \sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2\phi_{ij}} \cos\phi_{ij} \\ &\times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_{\phi}}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}} \sum_{i=1}^{i\max} \sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2\phi_{ij}} \cos\phi_{ij} \\ &\times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_{\eta}}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}} \sum_{i=1}^{i\max} \sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2\phi_{ij}} \cos\phi_{ij} \\ &\times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \Bigg) \delta W^L(\lambda', \phi') \end{aligned} \quad (۲)$$

معادلهٔ انتگرالی ۲ بعد از گسسته سازی، به فرم عمومی ذیل تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{A} : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times u}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{u\times 1}; \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^u$ فضای اعداد حقیقی می‌باشند. ماتریس $\boldsymbol{A}$ و بردار $\boldsymbol{b}$ (بردار حاوی مقادیر $\delta\boldsymbol{\Gamma}\ \mathbf{x}$)، معلوم و هدف یافتن بردار $\boldsymbol{x}$ (بردار $\delta\boldsymbol{W}\ \boldsymbol{X}$)، می‌باشد [۳].

معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن یک معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع اول است [۲]. معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول، از مسائل بدوضع معروف هستند [۶، ۷، ۸]. از نقطه نظر ریاضی، بعد از گسسته نمودن، مسئله دارای بعد متناهی گردیده و لذا مسئله تبدیل به یک مسئلهٔ خوش وضع[۱] می‌گردد. ولی در عمل بعد از گسسته‌سازی معادلات پیوستهٔ بد وضع، مسائل گسسته حاصل، بدلیل حساسیت به خطاهایی با فرکانس بالا، کماکان دارای ویژگی‌هایی شبیه به مسائل بد وضع هستند [۳]. علت بدوضعی مسائل گسستهٔ یاد شده، در دو ویژگی ماتریس ضرائب آنها نهفته است [۷]:

i. مقادیر منفرد ماتریس ضرائب $\boldsymbol{A}$ تدریجاً به‌سمت صفر میل می‌کند.

ii. نسبت بزرگترین مقدار ویژه به کوچکترین مقدار ویژه غیر صفر ماتریس ضرائب $\boldsymbol{A}$ (عدد شرط ماتریس $\boldsymbol{A}$)، خیلی بزرگ است.

همانطورکه گفته شد دستگاه معادلات بیان شده در رابطه ۳ بدوضع است. این بدان معناست که روشهای عددی کلاسیک نظیر تجزیهٔ چولسکی[۲]، تجزیهٔ LU، تجزیهٔ QR و... توانایی برآورد جواب پیوسته‌ای برای دستگاه معادله ۳ در حالت گسسته، به دلیل بزرگی عدد شرط[۳] ماتریس $\boldsymbol{A}$ را ندارد. این مسئله باعث می‌گردد که حتی وجود خطاهای رُند کردن[۴] به تنهائی مانع از حصول جواب عددی صحیح برای دستگاه معادلات ۳ شود [۷]. اما از طریق بکاربردن روشهای مختلف پایدارسازی، می‌توان جواب پایدار و پیوسته‌ای را برای دستگاه معادلات بدوضع مفروض بدست آورد [۸].

جواب کمترین مربعات دستگاه معادلات خطی، تنها با اعمال شرط مینیمم نُرم بردار باقیماندهٔ مشاهدات قابل دستیابی است.

$$\begin{cases} \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b} = \mathbf{b}^{exact} + \mathbf{e} \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times u}; \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{u\times 1} \\ \min\limits_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathbf{x}_{LS} = \mathbf{A}^t\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} \quad (۴)$$
$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^t\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^t$$

ولی بدلیل بدوضع بودن ماتریس $\boldsymbol{A}$، وجود نویزهای ناشی از خطی‌سازی مدل، خطاهای ناشی از گسسته‌سازی معادلات مشاهدات انتگرالی و نویزهای موجود در مشاهدات تفاضلی و... جواب حاصل از فرآیند کمترین مربعات کراندار (پیوسته) نخواهد شد [۹].

یکی از قدرتمندترین ابزاری آنالیز ماتریس ضرائب $\boldsymbol{A}$ دستگاه‌های معادلات، تجزیهٔ مقادیر منفرد[۵] (SVD) بوده [۸]، و برای بررسی تاثیر نویزهای موجود در مشاهدات بر روی جواب کمترین مربعات حاصل از رابطهٔ ۴ نیز مفید می‌باشد. قضیهٔ تجزیهٔ به مقادیر منفرد را می‌توان به صورت ذیل تعریف نمود [۱۰]:

---

[۱] Well-pose

[۲] Cholesky

[۳] Condition number

[۴] Rounding error

[۵] Singular Value Decomposition (SVD)

اگر $\boldsymbol{A}$ ماتریس $n\times u$ با مرتبه[۱] $\boldsymbol{r}$ باشد، یک ماتریس متعامد $\boldsymbol{U}$ با ابعاد $n\times n$، یک ماتریس متعامد $\boldsymbol{V}$ با ابعاد $u\times u$ و ماتریس قطری $\boldsymbol{\Sigma}$ با ابعاد $n\times u$ وجود دارد، بنحوی‌که

$$\mathbf{U}^t\mathbf{AV}=\boldsymbol{\Sigma}\ ,\mathbf{A}=\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t \qquad (۵)$$

تمامی مؤلفه‌های قطری $\boldsymbol{\Sigma}$ غیرمنفی هستند، که از این تعداد، $\boldsymbol{r}$ مؤلفه آن مثبت می‌باشد. ترتیب قرار گرفتن مؤلفه‌های ماتریس قطری $\boldsymbol{\Sigma}$ بصورت غیرصعودی ذیل می‌باشد:

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3\ldots\geq\sigma_u\geq 0 \qquad (۶)$$

جفت‌های $\sigma_i^2,\mathbf{u}_i$ و $\sigma_i^2,\mathbf{v}_i$ به ترتیب از راست به چپ مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌های $\boldsymbol{AA^t}$ و $\boldsymbol{A^tA}$ می‌باشند. برای اطلاعات بیشتر در مورد تجزیه مقادیر منفرد به [۱۰] مراجعه شود.

جواب دستگاه معادله ۴ بر اساس تجزیه مقادیر منفرد بصورت ذیل است:

$$\mathbf{x}_{LS}=\sum_{i=1}^{u}\frac{\mathbf{u}_i^t\mathbf{b}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \qquad (۷)$$

بر اساس تجزیهٔ SVD، طبق رابطهٔ ۷ خطاهای موجود در بردار $\boldsymbol{b}$ با ضریب $1/\sigma_i$ تقویت می‌شوند [۱۱]. درصورتیکه σ_i خیلی نزدیک صفر باشد، آنگاه خطای موجود در بردار $\boldsymbol{b}$، جواب را به شدت تحت تاثیر قرار خواهد داد. علت این موضوع در رابطهٔ ۸ بخوبی نمایان است.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}&=\mathbf{b}^{exact}+\mathbf{e}\qquad ;\left\|\mathbf{b}^{exact}\right\|_2>\left\|\mathbf{e}\right\|_2\\
\mathbf{x}_{LS}&=\ \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t\ ^{-1}\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{b}\\
&=\ \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^2\mathbf{V}^t\ ^{-1}\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{b}\\
&=\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{b}\\
&=\underbrace{\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{b}^{exact}}_{\mathbf{x}^{exact}}+\underbrace{\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{e}}_{\mathbf{x}_e}\\
&=\mathbf{x}^{exact}+\mathbf{x}_e
\end{aligned} \qquad (۸)$$

همانطورکه در رابطهٔ ۸ مشاهده می‌شود، بدلیل وجود $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$، درصورتیکه مقادیر منفرد به سمت صفر میل کنند، جمله $\boldsymbol{x_e}$ بر جواب واقعی $\boldsymbol{x^{exact}}$ غالب می‌گردد.

لازم به‌ذکر است، در مسئله مستقیم یعنی تعیین بردار $\boldsymbol{b}$ با معلوم بودن ماتریس $\boldsymbol{A}$ و بردار $\boldsymbol{x}$، درصورتیکه ماتریس $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس بدوضع باشد، بردار $\boldsymbol{b}$ بدست آمده از $\boldsymbol{Ax}$ فاقد فرکانس‌های بالا خواهد بود.

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t\Rightarrow\mathbf{Ax}=\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t\mathbf{x}=\mathbf{b} \qquad (۹)$$

همانطور که در رابطهٔ ۹ ملاحظه می‌گردد، بدلیل میل مقادیر منفرد ماتریس $\boldsymbol{A}$ به سمت صفر، فرکانسهای بالای موجود در بردار $\boldsymbol{x}$ بوسیله ماتریس $\boldsymbol{\Sigma}$ فیلتر شده [۷] و در حقیقت در این حالت ماتریس $\boldsymbol{A}$، مانند یک فیلتر پایین-گذر عمل می‌کند [۱۲].

۲- روش‌های پایدارسازی مسئله انتقالِ به سمتِ پایین

همانطوریکه در رابطه ۷ دیده شد، بدلیل وجود نویز در بردار $\boldsymbol{b}$ ضرایب فوریه $\left|\mathbf{u}_i^T\mathbf{b}\right|$ متناظر با مقادیر منفرد کوچک با سرعت کمتری بسمت صفر میل می‌کنند، لذا جواب $\boldsymbol{X_{LS}}$ تحت الشعاع جملات متناظر با مقادیر منفرد کوچک قرار گرفته و $\boldsymbol{x_e}$ بر $\boldsymbol{x^{exact}}$ غالب می‌گردد.

هدف از پایدارسازی کاستن یا حذف مولفه‌های جواب متناظر با مقادیر منفرد کوچک است. خروجی روش‌های مختلف پایدارسازی، جواب پایدار $\boldsymbol{x_{reg}}$ بوده که می‌تواند بصورت ذیل نوشته شود [۷]:

$$\mathbf{x}_{reg}=\sum_{i=1}^{n}\delta_\alpha\,\frac{\mathbf{u}_i^T\mathbf{b}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \qquad (۱۰)$$

ضرایب δ_α را ضرایب فیلتر[۲] نامیده که حسب روشهای پایدارسازی مختلف، فرم‌های متفاوتی را پیدا می‌کند. در بعضی روش‌های پایدارسازی، رابطهٔ صریحی برای محاسبهٔ ضرایب فیلتر وجود دارد.

روش‌های مختلف پایدار سازی را می‌توان به دو دسته ذیل تقسیم‌بندی نمود [۳]:

i. روش‌های پایدارسازی مستقیم

[۱] rank

[۲] Filter Factor

ii. روش‌های پایدارسازی غیرمستقیم (یا روش‌های مبتنی بر تکرار)

که در ذیل به معرفی مختصری از این روشها پرداخته می‌شود.

۳- روش‌های پایدارسازی مستقیم

روش پایدارسازی مستقیم الگوریتمی است که جواب از طریق محاسبه، مستقیماً استخراج می‌گردد [۳]. از جمله مهمترین این روش‌ها می‌توان به روش پایدارسازی "فیلیپس–تیخونوف[۱]"، روش DSVD[۲] و روش TSVD[۳] اشاره کرد.

روش پایدارسازی فیلیپس-تیخونوف توسط فیلیپس در سال ۱۹۶۲ و مستقلاً توسط تیخونوف در سال ۱۹۶۳ پیشنهاد گردید [۱۳]. در روش فیلیپس-تیخونوف با محدود کردن کران فضای جواب، از طریق مینیمم‌سازی نرم بردار جواب $\|\mathbf{x}\|_2$ و نرم بردار باقیماندهٔ مشاهدات $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2$ بطور همزمان، جواب پایدار مسئله حاصل می‌گردد [۸].

روابط پایدارسازی فیلیپس-تیخونوف در جدول ۱ بیان شده‌است.

در جدول ۱، $\mathbf{A}_\alpha^+$ و $\mathbf{A}^t\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{I}^{-1}$ ماتریس‌هایی کراندار هستند. در عمل برای محاسبه جوابِ پایدار شده، از فرم جواب در قالب SVD استفاده می‌شود. زیرا بعلت محدودیت دقت محاسبات کامپیوتری (تعداد اعشار) در محاسبه ماتریس $\boldsymbol{A^tA}$ با از بین رفتن اطلاعات مواجه هستیم [۸].

پارامترِ پایدارسازی α میزانِ مینیمم شدن قیدِ $\|\mathbf{x}\|_2^2$ را در مقابل مینیمم شدن نرم باقیمانده‌ها $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2$ کنترل می‌کند. به عبارت دیگر با وارد کردن ضریب α در روش پایدارسازی فیلیپس-تیخونوف امکان برقراری تعادل بین بایاس مسئله و واریانس جواب فراهم می‌گردد [۱۴].

در خاتمه، لازم بذکر است که هدفِ اولیه در ایجاد و گسترش تئوری پایدارسازی فیلیپس-تیخونوف، حل معادلات انتگرالی فردهولمِ نوعِ اول بوده است [۱۳].

جدول ۱- پایدارسازی به روش فیلیپس-تیخونوف [۱۳]

دستگاه معادلاتِ بدوضع	$\begin{cases}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ \min\limits_{\mathbf{x}}\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2\\ \|\mathbf{x}\|_2^2\le\gamma\ \ \alpha\ ;\gamma\ \ \alpha\ \in\mathbb{R}\end{cases}$
تابعک پایدارسازی	$F_\alpha=\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2+\alpha^2\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad ;\alpha\succ 0$
جوابِ پایدارسازی: فرمِ جوابِ ماتریسی	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha=\mathbf{A}_\alpha^+\mathbf{b}$ $\mathbf{A}_\alpha^+=\ \mathbf{A}^t\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{I}^{-1}\mathbf{A}^t$
فرمِ جواب درقالب SVD	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha=\sum_{i=1}^{u}\delta_\alpha\frac{\mathbf{u}_i^t\mathbf{b}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i$
	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha=\mathbf{A}_\alpha^+\mathbf{b}\to\mathbf{A}_\alpha^+$ $=\mathbf{V}diag\left(\frac{\sigma_i^{\ 2}}{\sigma_i^{\ 2}+\alpha^2}\frac{1}{\sigma_i}\right)\mathrm{U}^t$
ضرائبِ فیلتر	$\delta_\alpha=\frac{\sigma_i^{\ 2}}{\sigma_i^{\ 2}+\alpha^2}$ $=\begin{cases}1 & \sigma_i\gg\alpha\\ \frac{\sigma_i^{\ 2}}{\alpha^2} & \sigma_i\ll\alpha\end{cases}$

از دیگر روش‌های پایدارسازی مستقیم بر مبنای تجزیه مقادیر منفرد روش DSVD است. درحالتی که ماتریس $\boldsymbol{A}$ متقارن باشد ($a_{rk}=a_{kr}$)، روش پایدارسازی فیلیپس-تیخونوف می‌تواند با مسئله $\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}\ \mathbf{x}=\mathbf{b}$ جایگزین شود [۲۴]، که به آن روش پایدارسازی DSVD اطلاق می‌گردد. روابط پایدارسازی DSVD در جدول ۲ بیان شده‌است.

جدول ۲- پایدارسازی به روش DSVD [۹، ۱۶، ۱۵]

دستگاه معادلاتِ بدوضع	$\begin{cases}\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}\ \mathbf{x}=\mathbf{b}\\ \min\limits_{\mathbf{x}}\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2\end{cases}$
تابعک پایدارسازی	$F_\alpha=\left\|\ \mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}\ \mathbf{x}-\mathbf{b}\right\|_2^2 \quad ;\alpha>0$
جوابِ پایدارسازی: فرمِ جوابِ ماتریسی	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha=\mathbf{A}_\alpha^+\mathbf{b}$ $\mathbf{A}_\alpha^+=\ \mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}^{\ t}\ \mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}^{\ -1}\ \mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}^{\ t}$
فرمِ جواب درقالب SVD	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha=\sum_{i=1}^{u}\delta_\alpha\frac{\mathbf{u}_i^t\mathbf{b}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i$ $\hat{\mathbf{x}}_\alpha=\mathbf{A}_\alpha^+\mathbf{b}\to\mathbf{A}_\alpha^+$ $=\mathbf{V}diag\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i+\alpha}\frac{1}{\sigma_i}\right)\mathrm{U}^t$

[۱] Philips- Tikhonov
[۲] Damped Singular Value Decomposition
[۳] Truncated Singular Value Decomposition

ضرائبِ فیلتر	$\delta_\alpha = \dfrac{\sigma_i}{\sigma_i + \alpha} = \begin{cases} 1 & \sigma_i \gg \alpha \\ \dfrac{\sigma_i}{\alpha} & \sigma_i \ll \alpha \end{cases}$

در این روش ضرائب فیلتر به ازای یک α ثابت، آهسته‌تر از روش تیخونوف به سمت صفر میل می‌کنند. این بدین معنا است که مؤلفه‌های جواب که دارای فرکانس بالایی هستند، نسبت به روش فیلیپس-تیخونوف کمتر هموار می‌شوند. بنابر این جواب بدست آمده نسبت به جواب فیلیپس-تیخونوف از همواری کمتری برخوردار است [۸].

روش مستقیم دیگری که بر اساس تجزیهٔ مقادیر منفرد است، روش TSVD می باشد. در روش TSVD فرکانس-های بالای مؤلفه‌های جواب، با اعمال یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل حذف می‌شوند [۱۷] دراینصورت نویزهای موجود در مشاهدات تاثیری روی جواب حاصله نخواهند داشت. با این کار متاسفانه قسمتی از مؤلفه‌های خود جواب نیز حذف می‌گردد [۱۸، ۱۹].

از لحاظ تئوری، در این روش سعی در یافتن نزدیک-ترین مرتبه‌ای است که بتواند ماتریس $\boldsymbol{A}$ را تقریب زند، بطوریکه $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_k$ باشد [۷]. بنابراین:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{u} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^t \;;\; \mathbf{A} \approx \mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^t \qquad k \le u$$
$$where \;\; \|\delta\mathbf{A}\|_2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{u} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^t \right\|_2 < \varepsilon \qquad (11)$$

در صورتی این تقریب صحیح است که $\delta\mathbf{A}$ خیلی کوچک باشد. این بدان معناست که مقادیر منفرد ماتریس $\boldsymbol{A}$، به ازاء $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{k}$ صفر تلقی می‌گردند. روابط پایدارسازی TSVD در جدول ۳ بیان شده است.

از آنچه که گفته شد، واضح است که بردارهای $\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_u$ هیچ نقشی در جواب نداشته و زیر فضای حاصل از $Span\ \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_u$ فضای پوچ ماتریس $\boldsymbol{A}$ را تشکیل می‌دهد [۷، ۹].

جدول ۳- پایدارسازی به روش TSVD [۹]

دستگاه معادلاتِ بدوضع	$\begin{cases} \mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \min\limits_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \end{cases}$
تابعکِ پایدارسازی	$F_\alpha = \|\mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad ; u \ge k$
جوابِ پایدارسازی — فرم جواب ماتریسی	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^+ \mathbf{b}$ $\mathbf{A}_\alpha^+ = \left(\mathbf{A}_k^t \mathbf{A}_k\right)^{-1} \mathbf{A}_k^t$
فرم جواب درقالب SVD	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \delta_\alpha \dfrac{\mathbf{u}_i^t \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$
	$\hat{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^+ \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{A}_\alpha^+ = \mathbf{V}\, diag\left(\delta_\alpha \dfrac{1}{\sigma_i}\right) \mathbf{U}^t$
ضرائبِ فیلتر	$\delta_\alpha = \begin{cases} 1 & for\ i = 1, \ldots, k \\ 0 & for\ i = k+1, \ldots, u \end{cases}$

۴- روش‌های پایدارسازی غیرمستقیم (روش‌های مبتنی بر تکرار)

در حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرائب اسپارس[۱] به روش کمترین مربعات، روشهای تکرار نسبت به روشهای مستقیم ارجح‌تراند. در روشهای تکرار، مقادیر اولیه جواب تا رسیدن به جواب صحیح بهبود می‌یابد [۲۰]. در عمل روشهای تکرار برای حل دستگاه معادلات خطی با دستگاه معادلات نرمال $\boldsymbol{A^tAx=A^t\ b}$ بکارگرفته می‌شوند. این روش نیازی به محاسبه مستقیم $\boldsymbol{A^tA}$ نداشته که این خود در برگیرندهٔ دو حُسن ذیل است[۲۰]:

i. جلوگیری از خطای محاسباتی‌ای که در محاسبه ماتریس $\boldsymbol{A^tA}$ ایجاد می‌شود: در ضرب $\boldsymbol{A^t}$ در $\boldsymbol{A}$ با توجه به دقت عملیات محاسباتی کامپیوتر، احتمال ایجاد خطا در محاسبه $\boldsymbol{A^tA}$ وجود دارد.

ii. جلوگیری از تولید ماتریس غیراسپارس $\boldsymbol{A^t\ A}$: در بعضی از مسائل، $\boldsymbol{A^tA}$ دیگر مانند $\boldsymbol{A}$ اسپارس نیست.

در روش‌های تکرار، جواب پایدار شدهٔ دستگاه معادلات نرمال، از طریق تشکیل یک دنباله جواب که به سمت جواب شبیه‌معکوس[۲] ماتریس $\boldsymbol{A}$ میل می‌کند، قبل از رسیدن به جواب شبیه‌معکوس با قطع تکرار حاصل می-گردد. بنابراین تعداد تکرار، نقش پارامتر پایدارسازی را در روشهای تکرار بازی می‌کند. درصورتیکه تکرار بیش از حد

[۱] sparse
[۲] Pseudo inverse

صورت گیرد، ممکن است جواب ناپیوسته گردد [۱۳].

الگوریتم‌های متعددی برای حل دستگاه معادلات به روش تکرار وجود دارد. روش‌های تکرار Jacobi، Gauss-Seidel، Chebyshev semi-Iteration، Second-Order Chardson، Least Square Conjugate Gradient (گرادیانت مزدوج) و LSQR از جمله روش‌هایی هستند که بطور عمده در حل مسائل کمترین مربعات مورد استفاده قرار می‌گیرند.

نرخ همگرایی جواب در روش‌های Jacobi، Gauss-Seidel، Chebyshev semi-Iteration، Second-Order Chardson بسیار کُند است. در اینجا به بیان روش‌های Least Square Conjugate Gradient (گرادیانت مزدوج) و LSQR خواهیم پرداخت، که نرخ همگرایی سریع‌تری نسبت به سایر روشهای دیگر دارند [۲۰].

روش تکرار گرادیانتِ مزدوج از روش‌های شناخته شده برای حل دستگاه معادلات اسپارس با ماتریس نرمال معین- مثبت و متقارن می‌باشد [۲۰]. تعداد تکرار در این روش نقش پارامتر پایدارسازی α را بازی می‌کند [۷]. این روش توسط Schun در سال ۱۹۹۶ برای سرشکنی دستگاه معادلات بزرگ حاصل از مباحث ژئودزی ماهواره‌ای مورد استفاده قرارگرفت. این روش همچنین برای مسائلی که کمبود مرتبه دارند نیزاستفاده می‌شود [۲۰].

مهمترین ایدهٔ این روش ساختن دنباله‌ای از جوابها است که به سمت جواب حاصل از روش کمترین مربعات میل کند. در هنگام کاربرد این روش در مسائل بدوضع، قبل از رسیدن به جواب کمترین مربعات، تکرار متوقف می‌شود. الگوریتمِ حلِ دستگاهِ معادله‌ی $\boldsymbol{A^tAx=A^t\ b}$ از روش گرادیانت مزدوجِ CGLS در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴- پایدارسازی به روشِ تکرار گرادیانتِ مزدوج [۲۰]

دستگاه معادلاتِ بدوضع	$\begin{cases}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ \min\limits_{\mathbf{x}}\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2\end{cases}$
مقادیر اولیه	$\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-\mathbf{Ax}^{(0)},\quad \mathbf{p}^{(0)}=\mathbf{s}^{(0)}=\mathbf{A}^t\mathbf{r}^{(0)},\quad \gamma_0=\left\|\mathbf{s}^{(0)}\right\|_2^2$ **Let $\mathbf{x}^{(0)}$ be an initial approximation. Take**
حلقهٔ تکرار	**For $k=0,1,2,\ldots$ compute**
	$\mathbf{q}^{(k)}=\mathbf{Ap}^{(k)},\quad \alpha_k=\gamma_k/\left\|\mathbf{q}^{(k)}\right\|_2^2,\quad \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\alpha_k\mathbf{p}^{(k)}$ Residual norm $\mathbf{r}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}-\alpha_k\mathbf{q}^{(k)}$ Solution norm $\mathbf{s}^{(k+1)}=\mathbf{A}^t\mathbf{r}^{(k+1)},\quad \gamma_{k+1}=\left\|\mathbf{s}^{(k+1)}\right\|_2^2,\quad \beta_k=\gamma_{k+1}/\gamma_k,\quad \mathbf{p}^{(k+1)}=\mathbf{s}^{(k+1)}+\beta_k\mathbf{p}^{(k)}$
چندجمله‌ای ریتز[۱] در k امین تکرار	$P_k(\sigma)=\prod_{j=1}^{k}\frac{\left(\theta_j^{(k)}\right)^2-\sigma^2}{\left(\theta_j^{(k)}\right)^2}$ مقادیر ریتز[۲] $\theta_j^{(k)}$ می‌باشند.
ضرائب فیلتر جواب در k امین تکرار	$\delta_i^{(k)}=1-P_k(\sigma_i)\quad i=1,2,\ldots,k$

در غیاب خطاهای محاسباتی کامپیوتر، با انجام حداکثر $\boldsymbol{t}$ بار تکرار می‌توان به جواب واقعی رسید، بطوریکه $n\geq t$، که $\boldsymbol{n}$ تعداد مقادیر منفرد متمایز و غیر صفر ماتریس ضرائب $\boldsymbol{A}$ است. اگر $\boldsymbol{A}$ بدوضع باشد، با وجود خطاهای محاسباتی، برای رسیدن به جواب واقعی لازم است، چندین برابر $\boldsymbol{n}$ تکرار صورت پذیرد. درصورتی‌که $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس خوش‌وضع باشد، این روش با تعداد تکرار کمتر از $\boldsymbol{n}$ به جواب بسیار مناسبی با صحت بالا خواهد رسید [۲۰].

برای معرفی فرآیند پایدارسازی روش CGLS، زیرفضای کریلُوف[۱] را تعریف می‌کنند. این زیرفضا در تکرار kاُم روش CGLS، برروی دستگاه معادلات نرمال $\boldsymbol{A^tAx=A^t\ b}$ بصورت ذیل تعریف می‌گردد [۷]:

$$\mathbb{K}_k\ \mathbf{A}^t\mathbf{A},\mathbf{A}^t\mathbf{b}\ = Span\ \mathbf{A}^t\mathbf{b},\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{A}^t\mathbf{b},\ldots,\ \mathbf{A}^t\mathbf{A}^{\ k-1}\mathbf{A}^t\mathbf{b} \qquad (۱۲)$$

در روش گرادیانت مزدوج، فضای جواب به زیرفضاهای

[۱] Krylov subspace

کِریلُوفِ تولید شده، افراز می‌شود [۲۱]. هرکدام از بردارهای زیرفضای کریلُوف یک بردار پایه برای $\mathbf{x^{(k)}}$ بوده، و لذا در تکرار $\boldsymbol{k}$ام، جواب برآورد شده از ترکیب خطی $\boldsymbol{k}$ بُردارپایه در زیرفضای کریلُوف بدست می‌آید، یعنی:

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i \ \mathbf{A}^t\mathbf{A}^{\ i}\mathbf{A}^t\mathbf{b} \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ ۱۳، ω_i اعداد ثابت و حقیقی می‌باشند.

نرم بردار جواب $\left\|\mathbf{x}^k\right\|_2$، با افزایش $\boldsymbol{k}$ افزایش می‌یابد. درحالیکه نرم بردار باقیمانده‌ها $\left\|\mathbf{r}^k\right\|_2^2$ با افزایش $\boldsymbol{k}$ کاهش می‌یابد. این رفتار، همانگونه که خواهیم دید، می‌تواند از طریق "منحنی $\boldsymbol{L}$" محکی مناسب برای توقف تکرار بدست دهد [۳].

مقادیر ریتز نیز، با افزایش تکرار k، به مقادیر منفرد ماتریس $\boldsymbol{A}$ همگرا می‌شود. بنابراین برای i,j انتخابی[۷] $\theta_j^i = \sigma_i$

یکی دیگر از تکنیک‌های حل دستگاه‌های معادلات به روش تکرار، روش LSQR است که در سال ۱۹۸۲ توسط Paige و Saunder براساس دوقطری‌سازی لانچس[۱] ارائه گردیده است. روش LSQR از نقطه نظر ریاضی کاملا" با روش CGLS مطابقت دارد. اما هنگامیکه ماتریس $\boldsymbol{A}$ بدوضع باشد، جواب حاصله از الگوریتم LSQR قابل اطمینان‌تر خواهد بود [۲۰].

در تکرار kاُم در روش LSQR ، $\mathbf{x^{(k)}}$ محاسبه شده، عضو زیرفضای کریلوف $\mathbb{K}_k\ \mathbf{A}^t\mathbf{A}, \mathbf{A}^t\mathbf{b}$ می‌باشد [۲۲].

حال ببینیم که چگونه می‌توان کران تعداد تکرار را تا حصول جواب پایدار به روش‌ها تکرار تعیین کنیم. در روشهای تکرار نرخ همگرایی به طیف مقادیر منفرد ماتریس $\boldsymbol{A}$ وابسته است. در روشهای Jacobi و Gauss-Seidel تعداد تکرار لازم برای رسیدن به جواب، با مجذور عدد شرط ماتریس $\boldsymbol{A}$ متناسب است. در روش‌های Chebyshev-Semi iteration و Second-Order-Richardson تعداد تکرار لازم برای رسیدن به جواب با عدد شرط ماتریس $\boldsymbol{A}$ متناسب است. در روشهای LSQR و CGLS کران بالای تکرار از رابطه ذیل بدست می‌آید[۲۰].

$$k < \frac{1}{2} cond\ \mathbf{A}\ \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \qquad (۱۴)$$

که در آن ε خطای نسبی محاسباتی است.

در صورتی‌که $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \ldots$ دنبالهٔ جواب تکرار حاصل از روش تکرار CGLS و یا LSQR باشند، آنگاه $\tau_k = \left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{exact}\right\|_2^2; k = 1,2,3,\ldots$ با افزایش $\boldsymbol{k}$ یک روند نزولی خواهد داشت. ولی به علت وجود خطا در بردار مشاهدات ($\boldsymbol{b}$) و بدوضع بودن ماتریس $\boldsymbol{A}$ ، هنگام افزایش تعداد تکرار k، عموما" τ_k ناگهان افزایش می‌یابد. دنباله‌های $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \ldots$ و $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$، دنباله‌های نیمه‌همگرا[۲] می‌باشد [۲۲]. Morigi و همکاران در [۲۲] نشان داده‌اند که نرم اختلاف بین دو جواب متوالی یعنی $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\|_2^2$ در انتخاب تعداد تکرار لازم خیلی کارا است. با بکاربردن منحنی $\boldsymbol{L}$ (که بعدا تعریف خواهد شد) به همراه منحنی نرم اختلاف بین دو جواب متوالی، جهت انتخاب تعداد تکرار لازم برای یافتن جواب بهینه کافی است. در این روش از طریق سعی و خطا[۳] می‌توان جواب بهینه را در محدودهٔ گوشه منحنی $\boldsymbol{L}$ جستجو کرد.

از روش‌های جدیدی که برای حل دستگاه‌های معادلات به روش تکرار ارائه گردیده است روش "کُخ-کوشه[۴]" می‌باشد. در مسئلهٔ انتقال به سمت پایین، به منظور تعیین پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی، از تابعکهای مشاهداتی مختلفِ میدان ثقل بعنوان دادهٔ مرزی استفاده می‌شود. جواب حاصل از حل دستگاه معادلات مشاهدات انتقال به سمت پایین، درصورتی قابل اطمینان خواهد بود که مؤلفه‌های واریانس هر نوع مشاهده در روند پایدارسازی صحیح اعمال شده باشد [۲۳]. کُخ و کوشه در سال ۲۰۰۲ روشی برای تعیین مولفه‌های واریانس (عکس وزن نسبی) انواع مشاهدات در پروسه انتقال به سمت پایین مسائل بدوضع ارائه نمودند. این روش وزن نسبی هر نوع مشاهده را به همراه پارامتر پایدارسازی، و مجهول پایدار شده بطور همزمان برآورد می‌سازد.

الگوریتم کُخ- کوشه برای پایدارسازی مسائل بدوضع

[۱] Bi-diagonalization lanczos

[۲] Semi-convergent

[۳] Try and error

[۴] R.Koch -Kucshe

بدین شرح است: فرض کنید دستگاه معادلات خطی مسئله انتقال به سمت پایین، برای o نوع مشاهده، به شکل ذیل باشد:

$$\begin{cases}\mathbf{A}_i\mathbf{x}=\mathbf{b}_i+\mathbf{e}_i\\ D\ \mathbf{b}_i\left|\sigma_i^2\right.=\sigma_i^2\mathbf{P}_i^{-1}\end{cases}\ i\in\ 1,2,3,...,o \qquad (۱۵)$$

که در آن $\mathbf{P}_i^{-1}$ ماتریس وزن مشاهدات نوع $\boldsymbol{i}$ ام ، σ_i^2 مولفهٔ واریانس مشاهدات نوع iام (عکس وزن نسبی) و $\mathbf{e_i}$ بردار خطای مشاهدات نوع $\boldsymbol{i}$ ام ، $\boldsymbol{b_i}$ بردار مشاهدات نوع $\boldsymbol{i}$ ام، $\mathbf{A}_i$ ماتریس ضرائب مشاهدات نوع $\boldsymbol{i}$ ام و $\boldsymbol{x}$ بردار مجهولات است.

بمنظور خوش‌وضع نمودن دستگاه معادلات فوق، علاوه بر معلوم بودن ماتریس وزن مجهولات ($\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$) باید مقادیر مورد انتظار مجهولات ($\mathcal{X}$) نیز معلوم باشد [۲۳]، یا به عبارت دیگر:

$$\begin{cases}\mathbf{x}=\mathcal{X}+\mathbf{e}_{\mathcal{X}}\\ D\ \mathcal{X}\left|\sigma_{\mathcal{X}}^2\right.=\sigma_{\mathcal{X}}^2\mathbf{P}_{\mathcal{X}}^{-1}\end{cases} \qquad (۱۶)$$

با تلفیق معادلات ۱۵ و ۱۶، دستگاه معادلات مشاهدات نهایی جهت برآورد مولفه‌های واریانس (عکس وزن نسبی) به صورت ذیل بدست خواهند آمد:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1\\ \vdots\\ \mathbf{A}_o\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1+\mathbf{e}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_o+\mathbf{e}_o\\ \mathcal{X}+\mathbf{e}_{\mathcal{X}}\end{bmatrix}$$
$$D\left(\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_o\\ \mathcal{X}\end{bmatrix}\right)=\sigma_1^2\mathbf{W}_1+\cdots+\sigma_o^2\mathbf{W}_o+\sigma_{\mathcal{X}}^2\mathbf{W}_{\mathcal{X}} \qquad (۱۷)$$

که در آن:

$$\mathbf{W}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1^{-1} & \cdots & 0 & 0\\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},\cdots,\qquad \mathbf{W}_o=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \mathbf{P}_o^{-1} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_{\mathcal{X}}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{P}_1^{-1}\end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

بنابراین $\hat{\mathbf{x}}$ (مجهولات برآورد شده) از معادلات نرمال ذیل حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{A}_1^t\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1+\cdots+\frac{1}{\sigma_o^2}\mathbf{A}_o^t\mathbf{P}_o\mathbf{A}_o+\frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2}\mathbf{P}_{\mathcal{X}}\right)\hat{\mathbf{x}}\\ &=\frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{A}_1^t\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1+\cdots+\frac{1}{\sigma_o^2}\mathbf{A}_o^t\mathbf{P}_o\mathbf{b}_o+\frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2}\mathbf{P}_{\mathcal{X}}\mathcal{X}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

مؤلفه‌های واریانس نیز بصورت ذیل قابل برآورداند [۲۳]:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^2&=\frac{\hat{\mathbf{e}}_i^t\mathbf{P}_i\hat{\mathbf{e}}_i}{r_i}\\ \hat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2&=\frac{\hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}^t\mathbf{P}_{\mathcal{X}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}}{r_{\mathcal{X}}}\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در رابطهٔ ۲۰ بردارهای باقیماندهٔ برآوردشدهٔ $\hat{\mathbf{e}}_i,\hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}$ از روابط ذیل بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_i&=\mathbf{A}_i\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}_i\\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathcal{X}}&=\hat{\mathbf{x}}-\mathcal{X}\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

و $r_i,r_{\mathcal{X}}$ که اعداد آزادی از انواع مختلف مشاهده می‌باشد، نیز از روابط ذیل قابل حصول‌اند:

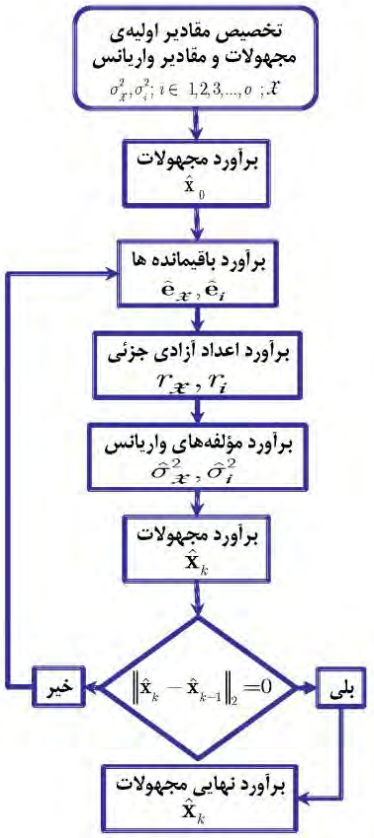
$$\begin{aligned}r_i&=n_i-trace\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\mathbf{A}_i^t\mathbf{P}_i\mathbf{A}_i\mathbf{N}^{-1}\right)\\ r_{\mathcal{X}}&=u-trace\left(\frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2}\mathbf{P}_{\mathcal{X}}\mathbf{N}^{-1}\right)\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

در رابطهٔ ۲۲ $\boldsymbol{n_i}$ تعداد مشاهدات از نوع iام بوده، بطوریکه $n=\sum_{i=1}^{o}n_i$ و $\boldsymbol{U}$ تعداد مجهولات دستگاه معادلات می‌باشد. $\boldsymbol{N}$ نیز بصورت ذیل بدست می‌آید:

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{A}_1^t\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1+\cdots+\frac{1}{\sigma_o^2}\mathbf{A}_o^t\mathbf{P}_o\mathbf{A}_o+\frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}^2}\mathbf{P}_{\mathcal{X}} \qquad (۲۳)$$

حال می‌توان با انجام تکرار، مؤلفه‌های واریانس (عکس وزن نسبی) مشاهدات از انواع مختلف و نیز مجهولات را برآورد کرد.

نحوهٔ پیاده‌سازی روش کُخ- کوشه، در فلوچارت شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱- الگوریتم پایدارسازی به‌روش کُخ- کوشه

۵- روش‌های تعیین پارامتر پایدارسازی

یکی از مسائل مهم در ارتباط با حل دستگاه‌های معادلات گسسته حاصل از مسائل بدوضع، انتخاب پارامتر پایدارسازی بهینه برای حصول جوابی است که به جواب واقعی میل می‌کند [۷].

در این مقاله بطور خلاصه به ارائهٔ روشهای تعیین پارامتر Generalized Cross Validation (GCV) و L-Curve خواهیم پرداخت. معیار GCV یک معیار کاملا" آماری است که مقدار بهینه پارامتر پایدارسازی را با این فرض که بردار مشاهدات $\mathbf{b}$ دارای خطایی با توزیع نرمال است را تخمین می‌زند [۲۴].

در این روش، پارامتر پایدارسازی با مینیمم کردن تابعک ذیل حاصل می‌گردد:

$$G(\alpha) = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\alpha\|_2^2}{trace(\mathbf{I}_u - \mathbf{A}\mathbf{A}_\alpha^+)^2} \qquad (۲۴)$$

$$\mathbf{A}_\alpha^+ = (\mathbf{A}^t\mathbf{A} + \alpha^2\mathbf{I}_u)^{-1}\mathbf{A}^t$$

این ایده توسط Wahba در [۲۵]. معرفی گردیده است [۲۶].

انتخاب پارامتر α بگونه‌ای انجام می‌شود که $\hat{\mathbf{x}}_\alpha$، مشاهدهٔ حذف شدهٔ $\boldsymbol{b_i}$ را بخوبی برآورد نماید. بطور دقیق‌تر، اگر $\hat{\mathbf{x}}_\alpha^i$ جواب حاصل از پایدارسازی فیلیپس-تیخونوف هنگامیکه مشاهدهٔ $\boldsymbol{b_i}$ حذف شده باشد، آنگاه بهترین مقدار α، عددی است که تابع $P(\alpha)$ را مینیمم کند:

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{u} \left(b_i - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\alpha\ i}^{i}\right)^2 \qquad (۲۵)$$

براحتی می‌توان نشان داد که تابع $G(\alpha)$ به ازای α ای مینیمم می‌شود، که تابع $P(\alpha)$ را نسبت به α مینیمم می‌سازد [۲۶].

روش‌های پایدارسازی بکار رفته در حل مسائل معکوس بدوضع، سعی در برآورد جوابی دارند، که تعادلی بین اندازهٔ نُرم بردار جواب پایدارشده $\|\hat{\mathbf{x}}_\alpha\|_2$، و نرم باقیماندهٔ مشاهدات $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{b}\|_2$ برقرار سازد. پارامتر پایدارسازی‌ای که، چنین تعادلی را ایجاد کند، می‌تواند به عنوان یک پارامتر پایدارسازی بهینه انتخاب گردد. یکی از روشهائی که دارای چنین ویژگی‌ای، در برآورد پارامتر پایدارسازی است، روش منحنی L بوده که بطور موفقیت آمیزی در کاربردهای مختلفی من‌الجمله علوم زمین و توموگرافی [۸] مورد استفاده قرار گرفته است.

درصورتی‌که نرم بردار جواب پایدارشده $\|\hat{\mathbf{x}}_\alpha\|_2$ در مقابل نرم بردار باقیمانده $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{b}\|_2$ در مقیاس لگاریتمی رسم شود، منحنی L حاصل می‌گردد. برای رسم منحنی L کافی است به ازای پارامترهای دلخواه $a \prec \alpha \prec b \ ; a,b \in \mathbb{R}$، مقادیر $\|\hat{\mathbf{x}}_\alpha\|_2$ و $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{b}\|_2$ محاسبه و رسم گردند. نام منحنی L ازآنجایی می‌آید که در اکثر مسائل، گوشه منحنی $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{b}\|_2, \|\hat{\mathbf{x}}_\alpha\|_2$ شکل L بخود می‌گیرد (شکل ۲). استفاده از منحنی L در حل مسائل کمترین مربعات به کارهای انجام شده در [۱۰] برمی‌گردد. اما از این منحنی در آن زمان بطور گسترده برای انجام پایدارسازی استفاده نمی‌شد.

منحنی L اطلاعات ذیل را در مورد پایدارسازی دستگاه معادلات، به صورت گرافیکی ارائه می‌دهد:

i. ارتباط بین جواب حاصل از مینیمم کردن نرم مجهولات در مقابل جواب حاصل از مینیمم کردن

نرم باقیمانده‌ها.

ii. گوشه منحنی $\boldsymbol{L}$ گویای وجود پارامتری است که به ازای آن پارامتر، هم نرم بردار باقیماندهٔ مشاهدات و هم نرم بردار جواب مینیمم می‌شوند.

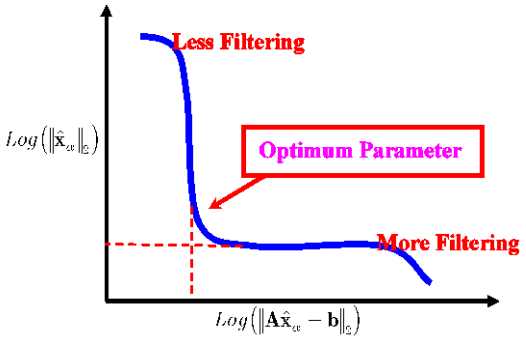
برای بدست آوردن گوشه منحنی L، به ازای تمامی مقادیر موجود $\eta = \|\hat{\mathbf{x}}_\alpha\|_2^2$ و $\lambda = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{b}\|_2^2$ مقدار انحناء از رابطه ذیل محاسبه می‌گردد [۹]:

$$\kappa\ \eta,\lambda\ = 2\frac{\lambda\eta}{\eta'}\frac{\alpha^2\eta'\lambda + 2\alpha\eta\lambda + \alpha^4\eta\eta'}{\alpha^2\eta^2 + \lambda^2\ ^{\frac{3}{2}}} \qquad (۲۶)$$

$$\eta' = -\frac{4}{\alpha}\sum_{i=1}^{u}\ 1-\delta_\alpha\ \ \delta_\alpha^2\frac{\mathbf{u}_i^t\mathbf{b}}{\sigma_i^2} \qquad (۲۷)$$

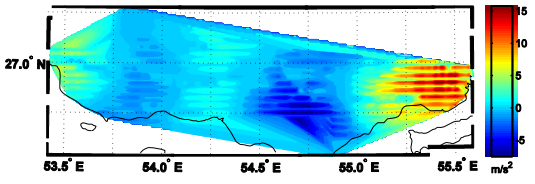
$$\delta_\alpha\ = \frac{\sigma_i\ ^2}{\sigma_i\ ^2 + \alpha^2} \qquad (۲۸)$$

در روش منحنی L از میان کلیهٔ مقادیر α محاسبه شده، αای را انتخاب می‌کنیم که مقدار تابع $\kappa\ \eta,\lambda$ به ازاء آن α ماکزیمم گردد.

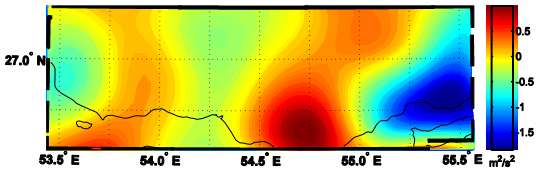


شکل۲- منحنی $\boldsymbol{L}$ معیاری برای تعیین پارامتر پایدارسازی

برای مقایسهٔ روش‌های مختلف پایدارسازی و انتخاب بهترین روش، برای حل مسئلهٔ انتقال به سمت پایین تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، منطقهٔ فارس ساحلی واقع در محدودهٔ جغرافیائی $26.55^o \le \phi \le 27.28^o$ و $53.42^o \le \lambda \le 55.58^o$ اقدام به تعریف یک مسئلهٔ شبیه سازی با استفاده از کرنل آبل-پواسن تغییر یافته، گردید. برای تولید داده‌های ثقلی شبیه‌سازی شده از مدل PGM98CR ونستل استفاده شد. این مدل ژئوپتانسیلی شامل ضرائب هارمونیک کروی تا درجه و مرتبهٔ ۷۲۰ می‌باشد، که از ضرائب درجه و مرتبهٔ ۳۶۰ تا ۷۲۰ آن جهت تولید شتاب جاذبه تفاضلی هارمونیک روی سطح زمین استفاده شده است. شکل ۳ نشان دهندهٔ تغییرات شتاب جاذبهٔ تفاضلی روی سطح زمین است. با استفاده از این مدل همچنین مقادیر جواب (پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی) روی سطح بیضوی رفرانس در یک شبکهٔ $2' \times 2'$ تولید گردید. شکل ۴ تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی تولید شده به شیوهٔ یاد شده را روی سطح بیضوی رفرانس نشان می‌دهد. همانگونه که پیشتر ذکر شد این مقادیر همان مقادیری هستند که قراراست از طریق حل انتگرال آبل-پواسن برآورد شوند. بنابر این، بدین صورت امکان کنترل خطای انتقال به سمت پائین و کیفیت روشهای مختلف پایدارسازی فراهم می‌گردد.



شکل ۳- تغییرات شتاب جاذبهٔ تفاضلی روی سطح زمین



شکل ۴- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس

برای به واقعیت نزدیکتر کردن مسئلهٔ شبیه‌سازی شده، نویزی با مشخصات ذیل به مشاهدات تفاضلی شتاب ثقل روی سطح زمین اضافه شد.

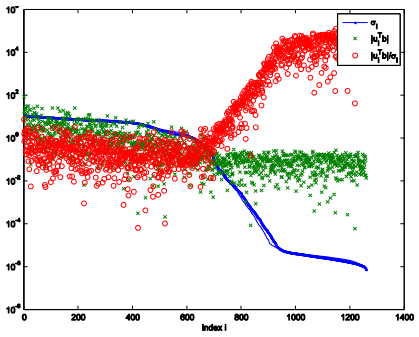
جدول ۵- مشخصات آماری نویز اعمال شده به مشاهدات شتاب جاذبهٔ تفاضلی بر حسب میلی‌گال

نوع داده	مینیمم	میانگین	ماکزیمم	انحراف معیار
خطای تصادفی	-۰،۴۸۸۴	۰،۰۰۳۷	۰،۶۰۹۸	۰،۰۹۸۰

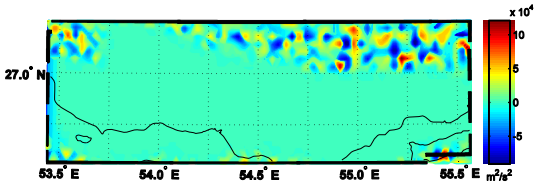
با توجه به برقراری شرط پیکارد [۲۹] در شکل ۵، دستگاه معادلات بدوضعِ مفروض دارای جواب است. همانطورکه در شکل ۶ مشاهده می‌کنید، جواب حاصل از روش کمترین مربعات، پیوسته (کراندار) نمی‌باشد. بنابراین لازم است با استفاده از روشهای پایدارسازی، جواب بهینه‌ای برای این دستگاه تعیین شود.

در این تحقیق روشهای پایدارسازی تیخونوف با معیار انتخاب پارامتر منحنی L و تابع GCV، روش DSVD با

معیار انتخاب پارامتر منحنی L، روش TSVD با معیار انتخاب پارامتر منحنی L، روشCGLS با معیار منحنی L و روش Morigi و همکاران، روش LSQR با معیار انتخاب پارمتر منحنی L و روش Morigi و همکاران و نیز روش کخ- کوشه، جواب دستگاه معادلات بدوضع، برآورد گردید. نتایج آماری مربوط به خطای هر کدام از روش‌ها یاد شده (تفاضل جواب مبنا روی سطح بیضوی رفرانس از جواب حاصل از انتقابل به سمت پائین پایدار شده) در جدول ۶ آمده است.



شکل ۵- نمودار شرط پیکارد



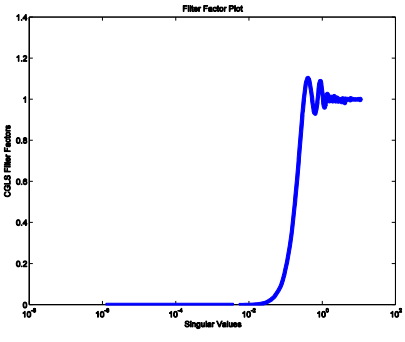
شکل ۶- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش کمترین مربعات

جدول ۶ - نتایج خطای روشهای انتقال به سمت پایین شتاب جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی

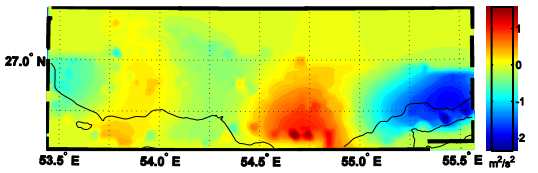
روشهای پایدارسازی	معیار تعیین پارامتر پایدارسازی	مینیمم m^2/s^2	متوسط m^2/s^2	ماکزیمم m^2/s^2	انحراف معیار m^2/s^2	نرم اختلاف جوابها m^2/s^2	خطای نسبی جواب
CGLS	منحنی L	-۱،۰۲	-۰،۰۳	۱،۰۲	۰،۲۴	۸،۶۹	۰،۴۴
LSQR	منحنی L	-۱،۰۲	-۰،۰۳	۱،۰۹	۰،۲۴	۸،۶۷	۰،۴۴
DSVD	منحنی L	-۲،۳۶	-۰،۰۵	۲،۲۳	۰،۵۲	۱۸،۴۶	۰،۹۴
TSVD	منحنی L	-۱،۱۰	-۰،۰۳	۲،۴۰	۰،۲۶	۹،۴۴	۰،۴۸
تیخونوف	تابع GCV	-۱،۰۶	-۰،۰۴	۰،۹۴	۰،۲۴	۸،۵۳	۰،۴۳
	منحنی L	-۱،۰۳	-۰،۰۳	۱،۱۸	۰،۲۳	۸،۳۶	۰،۴۳
روش کخ- کوشه	$\lim_{k\to\infty}\|x_k - x_{k-1}\| = 0$	-۱،۰۵	-۰،۰۳	۱،۰۱	۰،۲۴	۸،۴۸	۰،۴۳

جواب‌های بدست آمده از روشهای مختلف پایدارسازی در اشکال ذیل نشان داده شده است.

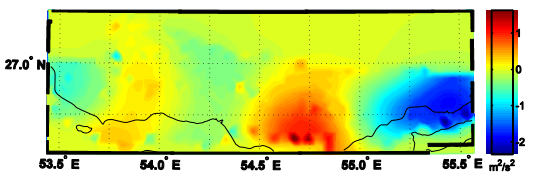
همانطورکه مشاهده می شود جواب حاصل از روش DSVD با معیار تععین پارامتر پایدارسازی منحنی L، بدلیل وجود لبه، دارای بیشترین انحراف معیار و خطای نسبی، نسبت به جواب واقعی است.



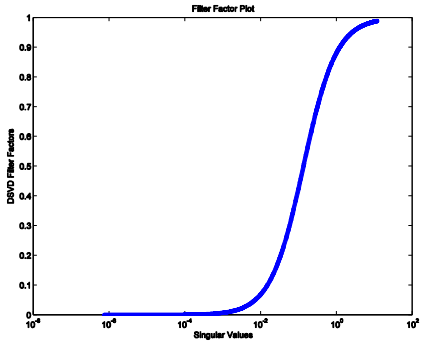
شکل ۷- ضرائب فیلتر در روش CGLS با معیار منحنی L



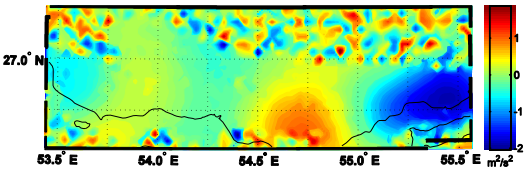
شکل ۸- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش CGLS



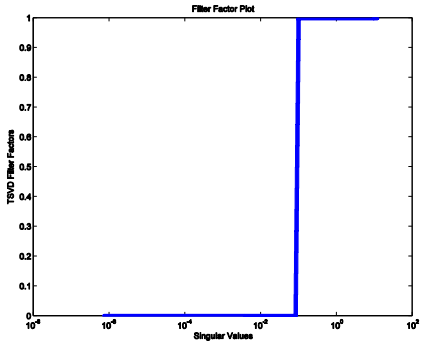
شکل ۹- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش LSQR



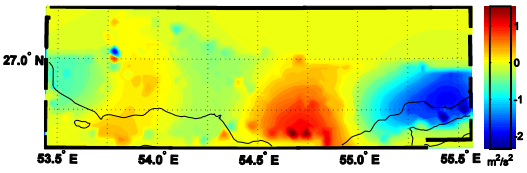
شکل ۱۰- ضرائب فیلتر در روش DSVD با معیار منحنی L



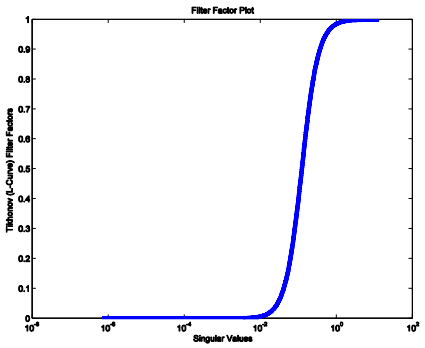
شکل ۱۱- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش DSVD



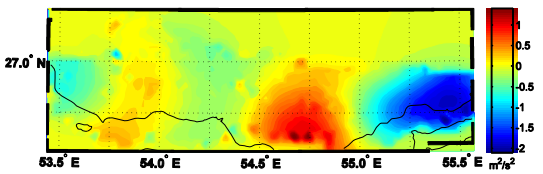
شکل۱۲- ضرائب فیلتر در روش TSVD با معیار منحنی L



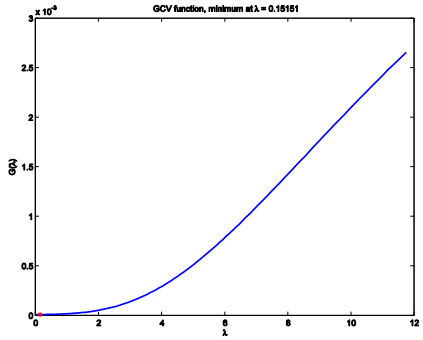
شکل ۱۳- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش TSVD



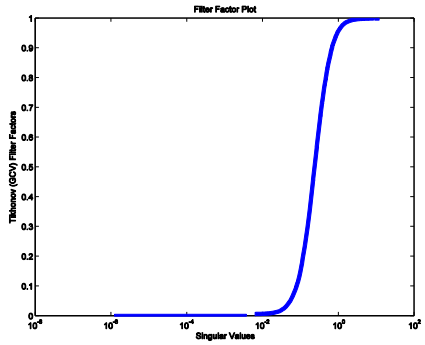
شکل ۱۴- ضرائب فیلتر در روش تیخونوف با معیار منحنی L



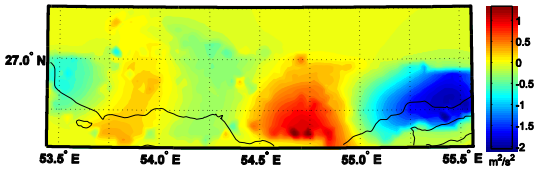
شکل ۱۵- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش تیخونوف با معیار منحنی L



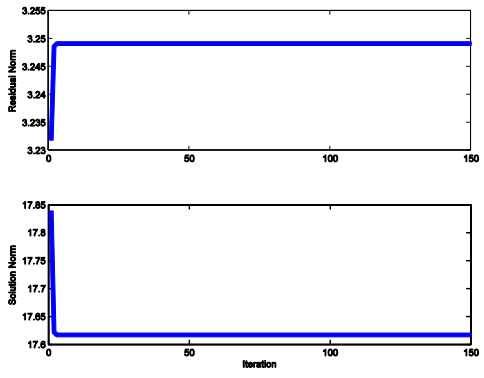
شکل ۱۶- تابع GCV در روش تیخونوف



شکل ۱۷- ضرائب فیلتر در روش تیخونوف با معیار تابع GCV

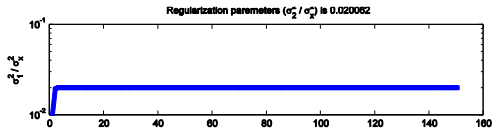


شکل ۱۸- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش تیخونوف با معیار تابع GCV

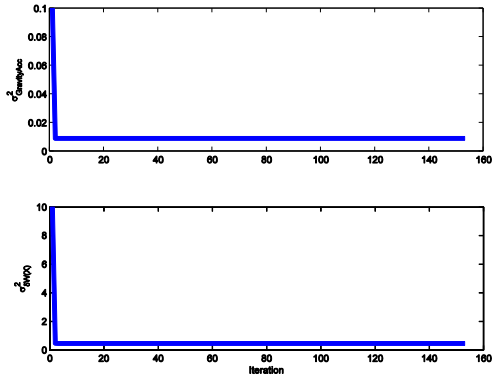


شکل ۱۹- نمودار همگرایی نرم جواب و نرم باقیمانده‌ها

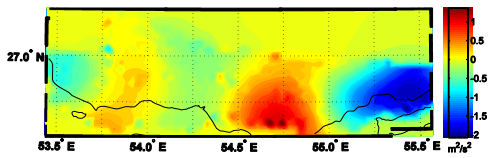
در روش کخ- کوشه



شکل ۲۰- نمودار همگرایی پارامتر پایدارسازی در روش کُخ- کوشه



شکل ۲۱- نمودار همگرایی مولفهٔ واریانس مشاهدات و مجهولات در روش کخ



شکل ۲۲- تغییرات پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی سطح بیضوی رفرانس برآورد شده با روش کُخ- کوشه

همانطورکه در جدول ۶ ملاحظه می‌گردد، روش‌های پایدارسازی تیخونوف با معیار انتخاب پارامتر منحنی L و روش کُخ -کوشه دارای کمترین اختلاف با مقدار واقعی هستند.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

در روش تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، انتقال بسمت پایین تابعکهای میدان ثقل زمین، با حل معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن انجام می‌پذیرد. در این مقاله ۶ روش مختلف پایدارسازی و یافتن پارامتر پایدارسازی را در مورد حل معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن که از نوع معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول است، در منطقهٔ فارس ساحلی مورد بررسی عددی قرار گرفت. این روشها شامل روشهای مستقیم و غیر مستقیم پایدارسازی (روش‌های مبتنی بر تکرار می‌باشند). نتایج حاصله نشان می‌دهند که روش پایدارسازی کُخ-کوشه و روش پایدارسازی تیخونوف با معیار انتخاب پارامتر منحنی L برای حل معادلهٔ انتگرالی آبل-پواسن در منطقهٔ جغرافیایی فارس ساحلی مناسب-ترین روش پایدارسازی می‌باشند.

مراجع

[1] Hofmann B, Moritz H (2005) Physical Geodesy. Springer-Verlag Vienna, 2005.

[2] Ardalan AA (2000) High-resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observationals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. PhD Thesis, Department of Geodesy and GeoInformatics, Stuttgart University, Stuttgart. Available at http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/665/pdf/PhDonline.pdf

[3] Safari A (2004) Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations. Ph.D. thesis. Department of Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).

[4] Safari Abdolreza ,. Ardalan Alireza A , Grafarend Erik W. (2005), A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran , Journal of Geodynamics 39 ,P. 545-568

[5] Jomegi A. (2006) Geoid Computation at Coastal Area Using Gravity, Satellite Altimetry and GPS/Leveling Data, MSC Thesis, Tehran University (In Persian).

[6] Martinec Z., Grafarend E.W. (1997) Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution. Journal of Geodesy 71: 562-570.

[7] Hansen PC (2001) Regularization tools; A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. Department of masthematical modeling building 305, technical university of Denmark,

Dk-2800 Lyngby, Denmark.

[8] Hansen Per Christian (1992), Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of first kind, Inverse Problems 8:849-872. Printed in the U.K.

[9] Hansen P.C. (1996) Rank-Deficient and Discrete Ill-posed problems. Doctoral Dissertation. Department of mathematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.

[10] Lawson C.L. ,Hanson R.J. (1974), SOLVING LEAST SQUARE PROBLEMS, ENGLEWOOD CLIFFS, NEW JERSEY

[11] Schwarz, K. P. (1979), Geodetic Improperly Posed Problems and Their Regularization, Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, Vol.,38, No.3, pp.389-416

[12] Oppenheim AV, Schafer RW, Buck JR (1999) Discrete-time signal processing. Second edn., Prentice Hall, New Jersey.

[13] Kern M. (2003) An analysis of the combination and downward continuation of satellite, airborne and terrestrial gravity data. Ph.D. thesis. Department of Geomatics engineering, university of Calgary, Alberta, Canada.

[14] Carthy P JMc (2003), Direct analytic model of the L-curve for Tikhonov regularization parameter selection, INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING INVERSE PROBLEMS, Inverse Problems 19 (2003) 643–663 PII: S0266-5611(03)37643-9

[15] O'leary Dianne P. (2001), NEAR-OPTIMAL PARAMETERS FOR TIKHONOV AND OTHER REGULARIZATION METHODS SIAM J. SCI. COMPUT. Vol. 23, No. 4, pp. 1161–1171

[16] Linz Peter (1994), A new numerical method for ill-posed problems, Inverse Problems 10, Printed in the UK, LETTER TO THE EDITOR

[17] Oppenheim AV, Schafer RW, Buck JR (1999) Discrete-time signal processing. Second edn., Prentice Hall, New Jersey.

[18] Ellmann Artu(2004), The geoid for the Baltic countries determined by the least squares modification of Stokes' formula,Doctoral Dissertation in Geodesy No. 1061Royal Institute of Technology (KTH),Department of Infrastructure, 100 44 Stockholm, Sweden

[19] Hansen P.C. (1998), Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia.

[20] Bjorck A (1990), Least Squares methods Handbook of Numerical Analysis vol I, ed P G Ciarlet and J L Lions (Amsterdam : Elsevier)

[21] Baglama James, Lothar Reichel,(2006), Decomposition methods for large linear discrete ill-posed problems ,Journal of Computational and Applied Mathematics, ARTICLE IN PRESS

[22] Morigi S., Reichel L., Sgallari F., Zama F. (2006), Iterative methods for ill-posed problems and semiconvergent sequences, Journal of Computational and Applied Mathematics 193 (2006) 157–167

[23] Koch K-R, Kusche J (2002) Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. J Geod 76: 259–268

[24] RODRIGUEZ G., THEIS D. (2005), An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the L-curve, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 25, Roma 69-84

[25] Wahba Grace (1980), Ill-Posed problems : numerical and statistical method for mildly, moderately and severely ill-posed problems with noisy data, University of Wisconsin, Technical Report No. 595

[26] Bert W. Rust (2000), Parameter Selection for Constrained Solutions to Ill-Posed Problems, Computing science and statistics, Volume 32, P. 333-347

[27] Engels J., Grafarend E.W., Keller W., Martinec Z., Sanso F., Vanicek P. (1993) The geoid as an inverse problem to be regularized, in: Inverse problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine, eds. G. Anger, R.Gorenfol, H. Jochmann, H. Moritz and W. Webers, Akademie-verlag, Berlin 1993, 122-16

[28] Esan Olugbenga (2000), Spectral Analysis of Gravity Field Data and Errors in view of Sub-Decimeter Geoid Determination in Canada, A THESIS SUBMITTED TO THE FACULTY OF GRADUATE STUDIES IN PARTIAL FUFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE,

DEPARTMENT OF GEOMATICS ENGINEERING THE UNIVERSITY OF CALGARY CALGARY, ALBERTA, CANADA, MAY, 2000

[29] Hansen P.C. (1996) Rank-Deficient and Discrete Ill-posed problems. Doctoral Dissertation. Department of mathematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.