

برآورد سریع دامنه‌ی نویز سفید در سری‌های زمانی GNSS توسط واریانس موجک

خسرو مقتصد آذر^{۱*}، رامین تهرانچی^۲

^۱ دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده عمران - دانشگاه تبریز

moghtased@tabrizu.ac.ir

^۲ دکتری ژئودزی

r.tehranchi67@gmail.com

(دریافت: تیر ۱۴۰۲، تصویب: آبان ۱۴۰۲)

چکیده

نویز سری‌های زمانی موقعیت GNSS عمدتاً ترکیبی از نویز سفید و نویز قانون توان است. برای تعیین دامنه این نویزها از روش‌های برآورد مؤلفه واریانس استفاده می‌شود. روش‌های برآورد مؤلفه‌های واریانس ذاتاً روش‌های تکراری هستند که در هر تکرار معکوس ماتریس (کو)واریانس محاسبه شده و به همین دلیل افزایش طول سری‌های زمانی باعث افزایش بار محاسباتی می‌شود. در این تحقیق الگوریتمی برای برآورد سریع دامنه نویز سفید بر اساس واریانس موجک تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی قابلیت تجزیه و تحلیل آماری ما کاهش نمی‌یابد چون این تبدیل برای هر سری زمانی با طول دلخواه قابل استفاده بوده و تعداد ضرایب موجک و مقیاس به ازای افزایش هر مرحله نصف نمی‌شود. برای ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی، از ۱۸۰ سری زمانی شبیه‌سازی شده با طول‌های مختلف (۲۰۰۰، ۴۰۰۰ و ۸۰۰۰) استفاده شده است. این سری‌های زمانی شامل حرکت خطی، مؤلفه‌های پریودیک، آفست، اثر زلزله و گپ (تا ۱۰٪) می‌باشند که ترکیبی از نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی به آن‌ها اضافه شده است. روش پیشنهادی بر روی این داده‌های شبیه‌سازی شده اعمال گردیده و نتایج آن با نتایج روش بیشترین درست‌نمایی محدود مقایسه شده است. مقایسه بایاس دامنه‌های نویز سفید برآورده شده از روش پیشنهادی و روش بیشترین درست‌نمایی محدود نشان داد که نتایج ارائه شده توسط دو روش نزدیک به هم هستند. علاوه بر این، پیچیدگی محاسباتی الگوریتم پیشنهادی از مرتبه $O(N)$ است که N طول سری زمانی می‌باشد. همچنین نتایج زمان محاسبات نشان داد که الگوریتم پیشنهادی بسته به طول سری‌های زمانی می‌تواند حدود ۴۵۰ تا ۱۰۰۰۰ برابر سریع‌تر از روش بیشترین درست‌نمایی محدود باشد. در ادامه به منظور ارزیابی بیشتر، از داده‌های ۱۹ ایستگاه واقعی استفاده شد که نتایج حاکی از کارایی روش پیشنهادی دارد. پیچیدگی محاسباتی کم و سرعت بالای الگوریتم پیشنهادی می‌تواند سرعت پردازش سری‌های زمانی GNSS را به میزان قابل توجهی افزایش دهد.

واژگان کلیدی: سری‌های زمانی GNSS، نویز سفید، نویز قانون توان، برآورد مؤلفه واریانس، واریانس موجک، تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی.

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

برای تعیین موقعیت و اندازه‌گیری تغییرات آن، سیگنال‌های سامانه ماهواره‌ای ناوبری جهانی (GNSS^۱) توسط ایستگاه‌های دائمی مشاهده می‌شود. این سیگنال‌ها اطلاعات مهمی در مورد پدیده‌های ژئوفیزیکی همچون روند حرکات تکتونیک به علت تنش [۱]، هشداری اولیه زلزله و آتش‌فشان [۲]، بارگذاری هیدرولوژیکی [۳]، حرکت عمودی زمین برای مطالعه تغییرات سطح دریا [۴] و فرآیندهای بازگشت از حالت یخبندان [۵] ارائه می‌دهند. در منابع [۶، ۷] جزییات بیشتری در مورد کاربردهای GNSS در علوم زمین ارائه شده‌است.

بیشترین کاربرد سری‌های زمانی GNSS در برآورد سرعت تکتونیک می‌باشد. برای این منظور رفتار این سری‌های زمانی در قالب مدل تابعی و مدل آماری معرفی می‌شود. مدل تابعی بیانگر بخش قابل مدل‌سازی سری‌های زمانی همچون سرعت خطی، حرکات پریودیک، آفست‌ها و اثرات لرزه‌ای احتمالی است (برای جزییات بیشتر در مورد آفست‌ها و روش‌های کشف آن به منابع [۸، ۹] و همچنین در مورد اثرات زلزله به منابع [۱۰-۱۲] مراجعه نمایید). از سوی دیگر مدل آماری نیز نشانگر ساختار نویز می‌باشد. نویز سری‌های زمانی GNSS به‌صورت ترکیب نویز سفید (غیرهمبسته) و نویز رنگی (دارای همبستگی زمانی) در نظر گرفته می‌شود. نویز رنگی را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی نویز فلیکر (با اندیس طیفی ۱-) و نویز گام تصادفی (با اندیس طیفی ۲-) یا با نویز قانون توان^۲ (با اندیس طیفی غیر صحیح) نشان داد.

برآورد هم‌زمان مدل تابعی و آماری اغلب بر اساس روش بیشترین درست‌نمایی صورت می‌گیرد که در نرم‌افزارهایی همچون CATS^۳ [۱۳]، Hector [۱۴] و Est_noise [۱۵] از این روش استفاده می‌شود. در روش بیشترین درست‌نمایی، برآورد مجهولات مدل تابعی باعث کاهش درجه آزادی مسئله می‌شود که برای رفع این مشکل روش بیشترین درست‌نمایی محدود ارائه شده‌است [۱۶]. روش دیگری که برای برآورد مجهولات مدل آماری و تابعی استفاده می‌شود روش برآورد کمترین مربعات مؤلفه‌های واریانس است [۱۷].

[۱۸]. در صورتی که مشاهدات دارای توزیع نرمال باشند نتایج روش کمترین مربعات با روش بیشترین درست‌نمایی محدود یکسان است [۱۷].

در اکثر مطالعات انجام‌شده، از لگاریتم تابع درست‌نمایی برای تعیین مدل آماری بهینه استفاده شده‌است. برای نمونه ویلیامز و همکاران در سال ۲۰۰۴ م. نشان دادند که ترکیب نویز سفید و فلیکر بهترین مدل برای توصیف نویز سری‌های زمانی است. در منابع [۱۹، ۲۰] با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده در مورد میزان موفقیت آمیز بودن این روش بحث شده‌است. امیری سیمکویی و همکاران در سال ۲۰۰۷ م. آزمون w^۴ را برای انتخاب مدل نویز بهینه ارائه کردند [۲۱]. همچنین در منابع [۲۲، ۲۳] از یکسری معیارهای اطلاعاتی که همگی بر پایه تابع درست‌نمایی هستند برای انتخاب مدل نویز بهینه استفاده شده‌است. بر پایه این معیارهای اطلاعاتی ۱۱۰ ایستگاه دائمی در منبع [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته و برای ۸۰ تا ۹۰ درصد سری‌های زمانی مدل آماری مناسب به‌صورت ترکیب نویز سفید و فلیکر یا ترکیب نویز سفید و قانون توان تشخیص داده شده‌است.

طبق نتایج محققان نویز گام تصادفی نیز در سری‌های زمانی GNSS وجود دارد [۲۷-۲۳]. نکته حائز اهمیت این است که در صورت کوتاه بودن طول سری زمانی یا بزرگ بودن دامنه نویز فلیکر، تعیین نویز گام تصادفی مشکل خواهد بود [۱۹]. هرچه طول سری زمانی بیشتر باشد کشف نویز گام تصادفی راحت‌تر می‌شود [۲۳، ۲۸]. همچنین با افزایش طول سری زمانی تأثیر نویز رنگی بیشتر شده و در نظر نگرفتن آن به‌طور گمراه‌کننده‌ای باعث برآورد کوچک‌تر عدم قطعیت سرعت می‌شود [۱۹].

به دلیل زمان‌بر بودن محاسبه معکوس و ضرب ماتریس‌ها با ابعاد بزرگ، کارایی روش‌ها با افزایش طول سری زمانی از منظر مدت‌زمان محاسبات کاهش می‌یابد که برای افزایش سرعت محاسبات روش‌هایی توسط محققین مختلف ارائه شده‌است. بُس و همکاران در سال ۲۰۰۸ م. با استفاده از تقریب ماتریس کوواریانس به‌صورت ماتریس توپلیتس^۵ مرتبه محاسبات را کاهش دادند طوری که این الگوریتم باعث افزایش ۳۵ تا ۸۴ برابری سرعت محاسبات برای سری‌های زمانی ۳ تا ۸ ساله می‌شود [۱۴]. نقطه‌ضعف

^۱ Global Navigation Satellite System

^۲ Power-law

^۳ Create and Analyze Time Series

^۴ w-test

^۵ Toeplitz

این روش وجود گپ در سری‌های زمانی می‌باشد که باعث از بین رفتن ساختار توپلیتس می‌شود. در سال ۲۰۱۳ م. بس و همکاران روش موجود را بهبود دادند طوری که نتایج عددی نرم‌افزار Hector بسیار نزدیک به نرم‌افزار CATS بوده ولی سرعت محاسبات را ۱۰ تا ۱۰۰ برابر بسته به طول سری زمانی و گپ افزایش می‌دهد [۲۲].

منتیل و همکاران در سال ۲۰۱۳ م. با استفاده تجزیه سیگنال به مؤلفه‌های مود ذاتی (EMD^۱) الگوریتمی را برای برآورد دامنه نويز سفید ارائه دادند که ۱۰۰ برابر سریع‌تر از نرم‌افزار CATS است [۲۹]. همچنین لانگبین در سال ۲۰۱۷ م. نرم‌افزار Est_noise را ارائه کرد که از لحاظ نتایج عددی و سرعت محاسبات کاملاً شبیه نرم‌افزار Hector است [۱۵]. جزییات بیشتری در مورد روش‌ها و الگوریتم‌های آنالیز سری‌های زمانی در منبع [۳۰] ذکر شده‌است.

تهرانچی و همکاران در سال ۲۰۲۱ م. با استفاده از روش بیشترین درست‌نمایی محدود در حیطه موجک روشی سریع برای برآورد مؤلفه‌های نويز سفید، فلیکر و گام تصادفی ارائه کردند [۳۱]. انجام محاسبات در حیطه موجک باعث می‌شود تا ماتریس (کو)واریانس توسط یک ماتریس قطری تقریب زده شود. قطری در نظر گرفتن ماتریس (کو)واریانس اگرچه باعث برآورد آریب مؤلفه‌های نويز و پارامترهای مدل تابعی می‌شود، اما زمان محاسبات را کاهش می‌دهد. روش پیشنهادی ایشان بسته به طول سری زمانی و درصد گپ ۲ تا ۱۴ برابر سریع‌تر از نرم‌افزار Hector است، هرچند که محدودیت روش ارائه‌شده آن است که باید طول سری زمانی به‌صورت توان عدد دو باشد.

قربانعلی زاده خانقاه و همکاران در سال ۱۴۰۰ روشی سریع را برای برآورد مؤلفه‌های نويز ارائه کرده‌اند که اطلاعات آماری نويز سفید را با استفاده از روش تجزیه سیگنال به مؤلفه‌های مود ذاتی تخمین زده و در ادامه با استفاده از یک رابطه مثلثاتی بین نويز سفید و نويز رنگی، دامنه نويز رنگی را برآورد می‌کند [۳۲]. کوچی و همکاران در سال ۲۰۲۳ م. روش GMWMX^۲ را ارائه دادند که بسته به نوع مدل آماری، طول سری زمانی و درصد گپ، ده تا چند هزار برابر سریع‌تر از نرم‌افزار هکتور است [۳۳]. این روش درواقع اعمال روش GMWM بر روی

باقیمانده‌های کمترین مربعات در قالب یک روش دومرحله‌ای تکراری است.

هدف از این مقاله ارائه یک روش سریع برای برآورد دامنه نويز سفید سری‌های زمانی GNSS با استفاده از واریانس موجک (WV^۳) است. برای ارزیابی روش پیشنهادی نتایج آن با نتایج روش بیشترین درست‌نمایی محدود مقایسه خواهد شد. پیچیدگی محاسباتی پایین و سرعت بالای روش پیشنهادی می‌تواند سرعت پردازش سری‌های زمانی GNSS را به‌طور قابل‌توجهی افزایش دهد. در این مقاله ابتدا به معرفی مدل تابعی و آماری سری‌های زمانی GNSS خواهیم پرداخت. در ادامه برآورد مؤلفه‌های نويز به روش بیشترین درست‌نمایی محدود توضیح داده خواهد شد. سپس تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی (MODWT^۴) بیان گردیده و پس‌از آن روش پیشنهادی برای برآورد دامنه مؤلفه نويز سفید بیان خواهد شد. در ادامه کارایی روش بر روی داده‌های شبیه‌سازی‌شده و سپس داده‌های واقعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. همچنین در پایان نیز نتیجه‌گیری‌های حاصل از این تحقیق بیان خواهد شد.

۲- مدل تابعی و آماری سری‌های زمانی GNSS

موقعیت ایستگاه در هر جهت به‌صورت رابطه زیر بیان می‌شود [۱۱]:

$$x_i = \varrho + \vartheta t_i + \sum_{k=1}^{n_p} (\zeta_k \cos \omega_k t_i + \xi_k \sin \omega_k t_i) \quad (1)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_g} \varsigma_k H(t_i - T_{g_k})$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_l} \eta_k \log(1 + (t_i - T_{l_k}) / \tau_k) H(t_i - T_{l_k}) + e_i$$

که ϱ و ϑ به ترتیب موقعیت ایستگاه در زمان t_0 و سرعت خطی ثابت ایستگاه را نشان می‌دهند. همچنین ضرایب ζ_k و ξ_k دامنه n_p حرکت پریودیک با فرکانس ω_k را بیان می‌کنند. جمله بعدی، وقوع n_g آفست در اُپک مشاهداتی T_g با بزرگی ς را نشان می‌دهد که اثر آن

^۳ Wavelet variance

^۴ Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform

^۱ Empirical mode decomposition

^۲ Generalized Method of Wavelet Moments with eXogenous inputs

که در آن Ψ یک ماتریس پایین مثلثی می‌باشد و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Psi = \Delta T^{-\kappa/4} \begin{bmatrix} \psi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \psi_1 & \psi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N-1} & \psi_{N-2} & \psi_{N-3} & \cdots & \psi_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

در رابطه فوق ΔT فاصله نمونه‌برداری است و ψ_i از طریق رابطه زیر حاصل می‌شود [۳۵]:

$$\psi_i = \frac{\Gamma(i - \kappa/2)}{i! \Gamma(-\kappa/2)} \quad (10)$$

که در آن Γ بیانگر تابع گاما است. همچنین برای راحتی کار می‌توان ψ_i را از طریق رابطه بازگشتی زیر نیز محاسبه نمود:

$$\psi_0 = 1 \quad ; \quad \psi_i = (-\frac{\kappa}{2} + i - 1) \frac{\psi_{i-1}}{i} \quad (11)$$

۳- روش بیشترین درست‌نمایی محدود برای برآورد مؤلفه‌های (کو)واریانس

برای مدل خطی $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$ ، مدل آماری با p مؤلفه (کو)واریانس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{Q}_x = \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 \mathbf{Q}_k \quad (12)$$

در صورتی که مدل آماری به فرم رابطه (۷) باشد، $p=3$ خواهد بود. برآورد مؤلفه‌های (کو)واریانس به روش بیشترین درست‌نمایی محدود از حل دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود [۱۶]:

$$\boldsymbol{\sigma} = M^{-1} \mathbf{q} \quad (13)$$

$$M \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad m_{ij} = \text{tr}(U \mathbf{Q}_i U \mathbf{Q}_j) \quad (14)$$

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{p \times 1}, \quad q_i = \mathbf{x}^T U \mathbf{Q}_i U \mathbf{x} \quad (15)$$

که در آن ماتریس $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = \mathbf{Q}_x^{-1} - \mathbf{Q}_x^{-1} A (A^T \mathbf{Q}_x^{-1} A)^{-1} A^T \mathbf{Q}_x^{-1} \quad (16)$$

توسط تابع هویساید^۱ H خنثی می‌شود. جمله بعدی برای بیان اثر n_l زلزله (جابجایی گذرا) در آپک T_l با دامنه $\boldsymbol{\eta}$ و زمان میرایی τ می‌باشد که اثر آن توسط یک تابع لگاریتمی خنثی می‌شود. جمله آخر، e_i ، نیز بیانگر خطای مشاهداتی در آپک مربوطه است.

طبق رابطه (۱) و با فرض معلوم بودن زمان وقوع آفت، زلزله و همچنین زمان میرایی زلزله، می‌توان مدل تابعی مشاهدات GNSS را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = A\boldsymbol{\beta} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\varrho \quad \vartheta \quad \zeta^T \quad \xi^T \quad \varsigma^T \quad \boldsymbol{\eta}^T]^T \quad (3)$$

که در آن \mathbf{E} بیانگر عملگر امید، $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ بردار مشاهدات، $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{u \times 1}$ بردار مجهولات و $A \in \mathbb{R}^{N \times u}$ ماتریس ضرایب است. همچنین جواب کمترین مربعات مجهولات و باقیمانده‌ها از طریق روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (A^T \mathbf{Q}_x^{-1} A)^{-1} A^T \mathbf{Q}_x^{-1} \mathbf{x} \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{x} - A\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (5)$$

در صورتی که مدل آماری به صورت ترکیب خطی نویز سفید و رنگی در نظر گرفته شود، ماتریس (کو)واریانس به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{Q}_x = \sigma_w^2 I + \sigma_k^2 \mathbf{Q}_k \quad (6)$$

در رابطه فوق I ماتریس همانی و \mathbf{Q}_k ماتریس کوفاکتور نویز رنگی است. اگر فرض کنیم نویز رنگی به صورت ترکیب نویز فلیکر و گام تصادفی است، ماتریس (کو)واریانس مشاهدات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{Q}_x = \sigma_w^2 I + \sigma_f^2 \mathbf{Q}_f + \sigma_{rw}^2 \mathbf{Q}_{rw} \quad (7)$$

که در آن $\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_{k=-1}$ ماتریس کوفاکتور نویز فلیکر و $\mathbf{Q}_{rw} = \mathbf{Q}_{k=-2}$ ماتریس کوفاکتور نویز گام تصادفی است. ماتریس کوفاکتور \mathbf{Q}_k از طریق رابطه زیر به دست می‌آید [۳۴]:

$$\mathbf{Q}_k = \Psi \Psi^T \quad (8)$$

^۱ Heaviside

$$\tilde{V}_{j,n} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{V}_{j-1, (n-2^{j-1}l) \bmod N} \quad (19)$$

که در آن \bmod بیانگر عملگر پیمانه^۱ است. همچنین $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ فیلتر موجک و $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ فیلتر مقیاس برای تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی در مقیاس واحد (مرحله یک) می‌باشند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{2}} ; \quad \tilde{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

که $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ فیلتر موجک و $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ فیلتر مقیاس برای تبدیل موجک گسسته در مقیاس واحد است. در روابط (۱۸) و (۱۹) ضرایب موجک و مقیاس از روی ضرایب مقیاس مرحله قبل تر محاسبه شده‌است. می‌توان ضرایب هر مرحله را مستقیماً از خود سری زمانی \mathbf{x} نیز به دست آورد:

$$\tilde{W}_{j,n} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} x_{(n-l) \bmod N} \quad (21)$$

$$\tilde{V}_{j,n} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} x_{(n-l) \bmod N} \quad (22)$$

که $\tilde{\mathbf{h}}_j \in \mathbb{R}^{L_j \times 1}$ و $\tilde{\mathbf{g}}_j \in \mathbb{R}^{L_j \times 1}$ به ترتیب، فیلتر موجک و مقیاس مرحله j ام برای تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{\mathbf{h}}_j = \frac{\mathbf{h}_j}{2^{j/2}} ; \quad \tilde{\mathbf{g}}_j = \frac{\mathbf{g}_j}{2^{j/2}} \quad (23)$$

که $\mathbf{h}_j \in \mathbb{R}^{L_j \times 1}$ و $\mathbf{g}_j \in \mathbb{R}^{L_j \times 1}$ به ترتیب، فیلتر موجک و مقیاس مرحله j ام برای تبدیل موجک گسسته هستند. همچنین طول فیلتر مرحله j ام $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ است.

۵- واریانس موجک

واریانس موجک، به‌صورت واریانس ضرایب موجک تعریف می‌شود [۳۶]:

$$\nu_j^2 = \text{var}(\tilde{\mathbf{W}}_j) \quad (24)$$

ویژگی واریانس موجک این است که واریانس سری زمانی را در مقیاس‌های مختلف تجزیه می‌کند. برآوردگر

به دلیل اینکه در روابط (۱۴) و (۱۵) نیاز داریم که $Q_x = \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k$ را محاسبه نماییم و σ_k ها از پیش مجهول هستند، پس باید از روش تکرار استفاده کنیم. ابتدا با در نظر گرفتن مقادیر اولیه برای مؤلفه‌های واریانس (σ^0) ، طبق رابطه (۱۲)، Q_x را محاسبه می‌کنیم. سپس توسط روابط (۱۴) و (۱۵) ماتریس M و بردار \mathbf{q} را محاسبه کرده و از رابطه (۱۳)، $\hat{\sigma}$ را به دست می‌آوریم که باید به‌عنوان مقادیر اولیه در تکرار بعدی مورد استفاده قرار بگیرد. با تعریف یک مقدار کوچک برای ϵ ، با محقق شدن شرط $\|\hat{\sigma} - \sigma^0\|_{Q_x^{-1}} < \epsilon$ تکرار متوقف می‌شود. همچنین ماتریس کوواریانس مؤلفه‌های (کو)واریانس برآورد شده از طریق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q_{\hat{\sigma}} = 2M^{-1} \quad (17)$$

۴- تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی

تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی برای رفع محدودیت‌های تبدیل موجک گسسته ارائه شده‌است. این تبدیل برخلاف تبدیل موجک گسسته، یک تبدیل نامتعاملد است. از مهم‌ترین مزایای تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی نسبت به تبدیل موجک گسسته می‌توان به این موارد اشاره کرد: ۱- طول سری زمانی هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد. (در تبدیل موجک گسسته طول سری زمانی باید به‌صورت مضربی از توان عدد دو باشد)، ۲- طول ضرایب موجک و مقیاس در هر مرحله، با طول سری زمانی برابر است و می‌توان آنالیزهای آماری دقیق‌تری روی آن‌ها انجام داد (در تبدیل موجک گسسته، طول ضرایب موجک و مقیاس در هر مرحله، با ضریب یک‌دوم کاهش پیدا می‌کند که منجر به کم شدن توانایی ما در انجام آنالیزهای آماری می‌شود) [۳۶].

فرض کنید \mathbf{x} یک سری زمانی به طول دلخواه باشد. با فرض $\tilde{\mathbf{V}}_0 \equiv \mathbf{x}$ ، ضرایب موجک $\tilde{\mathbf{W}}_j \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ و ضرایب مقیاس $\tilde{\mathbf{V}}_j \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ برای تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی، در مرحله j ام از روابط زیر حاصل می‌شود [۳۶]:

$$\tilde{W}_{j,n} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{V}_{j-1, (n-2^{j-1}l) \bmod N} \quad (18)$$

^۱ Modulo operator

ناآریب از واریانس موجک در صورتی به دست می‌آید که از مؤلفه‌هایی که تحت تأثیر فرض متناوب بودن سری زمانی هستند، صرف‌نظر شود (مخصوصاً تبدیل موجک گسسته مانند فیلتر گردشی عمل می‌کند؛ یعنی فیلترها در ابتدا و انتهای سری زمانی (مرزها)، سری زمانی \mathbf{x} را به صورت بخشی از یک دنباله متناوب با دوره‌ی تناوب N در نظر می‌گیرند). برای برآورد ناآریب واریانس موجک باید از مؤلفه‌های مرزی صرف‌نظر نمود. رابطه زیر بیانگر برآورد ناآریب از واریانس موجک می‌باشد:

$$\hat{v}_j^2 = \frac{1}{N - L_j + 1} \sum_{n=L_j-1}^{N-1} \tilde{W}_{j,n}^2 \quad (25)$$

که در رابطه فوق L_j طول فیلتر موجک در مرحله j ام است (برای توضیحات بیشتر در مورد واریانس موجک و کاربردهای آن به منابع [۸، ۳۶] مراجعه نمایید).

۶- روش پیشنهادی

الگوریتم روش پیشنهادی برای تقریب دامنه نويز سفید به صورت زیر است:

مرحله ۱- برآورد باقیمانده‌های سری زمانی از طریق رابطه (۵) (برداشتن اثر مؤلفه‌های مدل تابعی بدون استفاده از ماتریس (کو)واریانس مشاهدات).

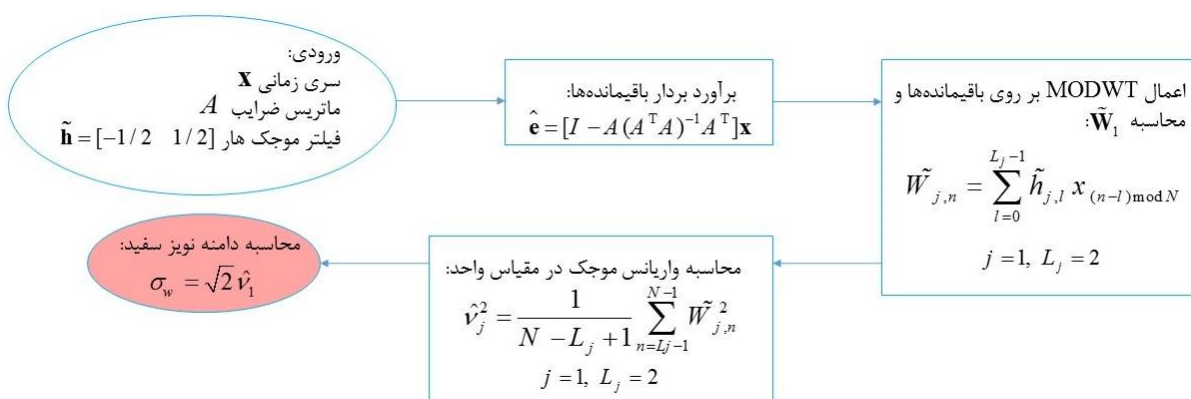
مرحله ۲- اعمال تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی بروی باقیمانده‌ها و محاسبه ضرایب موجک گسسته برای مقیاس واحد با موجک‌ها از طریق رابطه

(۲۱). ضرایب موجک و مقیاس‌ها در حالت بیشترین همپوشانی به صورت $\tilde{\mathbf{h}} = [-1/2 \ 1/2]$ و $\tilde{\mathbf{g}} = [1/2 \ 1/2]$ هستند.

مرحله ۳- محاسبه واریانس موجک برای مقیاس واحد، \hat{v}_1 ، از طریق رابطه (۲۵).

مرحله ۴- محاسبه دامنه نويز سفید از طریق ضرب جذر واریانس موجک مقیاس واحد در $\sqrt{2}$ ($\sigma_w = \sqrt{2} \hat{v}_1$). دلیل استفاده از ضریب $\sqrt{2}$ در این مرحله این است که فیلترهای موجک و مقیاس تبدیل موجک گسسته $\sqrt{2}$ برابر فیلترهای تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی هستند (به رابطه (۲۳) مراجعه کنید).

شکل ۱ نحوه استفاده از روش پیشنهادی (که در بالا توضیح داده شده است) را نشان می‌دهد. همان‌طور که بیان شد در روش پیشنهادی از تبدیل موجک گسسته با بیشترین همپوشانی استفاده شده که این تبدیل در حالت کلی از $O(N \log_2 N)$ ضرب استفاده می‌کند (برخلاف تبدیل موجک گسسته که در حالت کامل آن از $O(N)$ ضرب استفاده می‌شود) [۳۶]. چون برای برآورد دامنه نويز سفید فقط از ضرایب موجک مرحله یک استفاده شده، روش پیشنهادی نیازمند $O(N)$ ضرب است که در مقایسه با روش‌های تعیین مؤلفه‌های (کو)واریانس پیچیدگی محاسباتی کمتری دارد که از مرتبه $O(N^3)$ هستند.



شکل ۱- الگوریتم روش پیشنهادی برای تقریب دامنه نويز سفید.

حاصل از آن با نتایج روش بیشترین درست‌نمایی محدود مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.

۷- ارزیابی روش پیشنهادی

در این بخش روش پیشنهادی بر روی داده‌های شبیه‌سازی شده و واقعی بکار برده خواهد شد و نهایتاً نتایج

۷-۱- داده‌های شبیه‌سازی شده

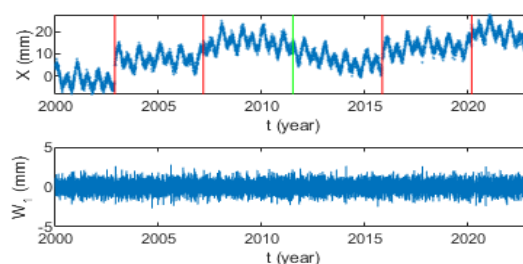
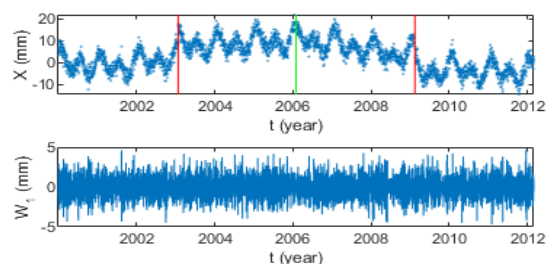
ابتدا ۱۸۰ سری زمانی بر اساس مشخصات ذکرشده در جدول ۱ شبیه‌سازی شده‌است. این سری‌های زمانی به سه بخش با طول داده ۲۰۰۰، ۴۰۰۰ و ۸۰۰۰ تقسیم‌بندی می‌شوند. هر بخش خود دارای سه زیرمجموعه با گپ‌های متفاوت ۰.۵٪، ۱.۰٪ و ۱.۵٪ می‌باشد که وقوع آن‌ها به‌صورت تصادفی انتخاب شده‌است. هر سری زمانی دارای سرعت صفر، یک مؤلفه سالیانه و نیم‌سالیانه، چند آفست، یک اثر زلزله و ترکیب نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی می‌باشد.

تعداد آفست در سری‌های زمانی با طول ۲۰۰۰، ۴۰۰۰ و ۸۰۰۰ به ترتیب ۲، ۴ و ۶ است. لازم به ذکر است که نویز با استفاده از همگشت نویز سفید با تابع ψ (رابطه (۱۰))

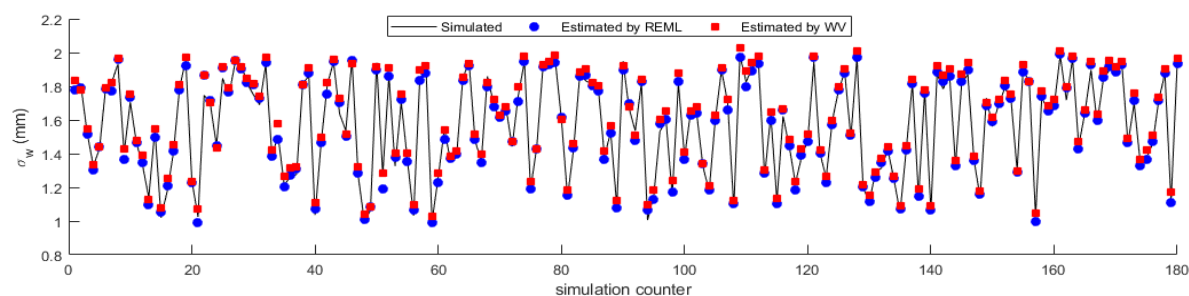
شبیه‌سازی شده است [۱۵، ۲۲] (در شکل ۲ دو نمونه از سری‌های زمانی با طول ۴۰۰۰ و ۸۰۰۰ به همراه ضرایب موجک مرحله ۱ باقیمانده آن‌ها نشان داده شده است).

جدول ۱- مشخصات سری‌های زمانی شبیه‌سازی شده.

پارامتر	دامنه
مؤلفه سالیانه و نیم‌سالیانه	$\xi, \zeta \in [1.5](mm)$
آفست	$\varsigma \in [-10, 10](mm)$
زلزله	$\eta \in [-5, 5](mm)$
زمان میرایی زلزله	$\tau = 80 (days)$
نویز سفید	$\sigma_w \in [1.2](mm)$
نویز فلیکر	$\sigma_f \in [1.2](mm / year^{1/4})$
نویز گام تصادفی	$\sigma_{rw} \in [1, 1/4](mm / year^{1/2})$
درصد گپ	۰٪ - ۵٪ - ۱۰٪



شکل ۲- دو نمونه از سری‌های زمانی شبیه‌سازی شده (سطر بالا) به همراه ضرایب موجک گسسته آن‌ها در مقیاس واحد بعد از برداشتن اثر مدل تابعی از روی سری‌های زمانی (سطر پایین). ستون سمت راست داده با طول ۸۰۰۰ و ستون سمت چپ داده با طول ۴۰۰۰ را نشان می‌دهد. خطوط قائم قرمز بیانگر زمان وقوع آفست و خطوط سبز نیز زمان وقوع زلزله را نشان می‌دهند.

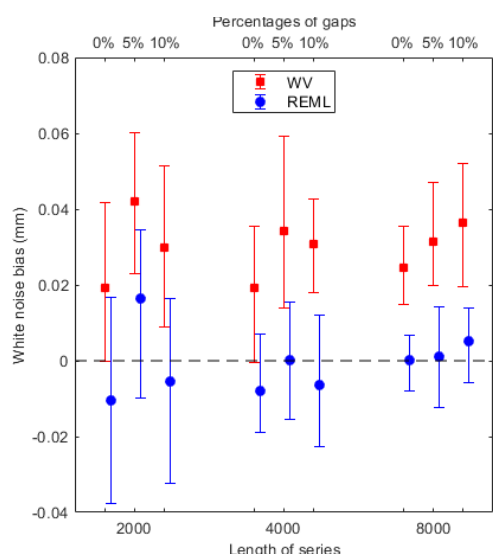


شکل ۳- دامنه نویز سفید شبیه‌سازی شده به همراه دامنه نویز برآورد شده از دو روش بیشترین درست‌نمایی محدود و روش پیشنهادی برای ۱۸۰ سری زمانی شبیه‌سازی شده.

برای مقایسه عددی جامع‌تر نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج روش بیشترین درست‌نمایی محدود، از دو معیار (۱) بایاس نویز سفید (اختلاف مقادیر شبیه‌سازی شده و برآورد شده) و (۲) زمان محاسبات استفاده می‌شود.

در شکل ۳ برای هر ۱۸۰ سری زمانی شبیه‌سازی شده، دامنه نویز سفید شبیه‌سازی شده به همراه دامنه نویز برآورد شده از دو روش بیشترین درست‌نمایی محدود و روش پیشنهادی نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود که دامنه نویز سفید برآورد شده توسط دو روش نزدیک به هم بوده و در انطباق خوبی با مقادیر شبیه‌سازی شده می‌باشند.

بیشترین درست‌نمایی برای داده با طول ۸۰۰۰ به بیش از ده دقیقه زمان نیاز دارد.



شکل ۴- بایاس نویز سفید برای روش پیشنهادی و روش بیشترین درست‌نمایی محدود. روش پیشنهادی با نماد WV نشان داده شده‌است. خطوط عمودی بیانگر صدک ۲۵ و ۷۵ هستند.

بایاس دامنه نویز سفید برآورد شده از دو روش در شکل ۴ نشان داده شده‌است. برای نمایش بایاس روش‌ها از یک شکل جعبه‌ای استفاده می‌شود که مرکز آن بیانگر میانگین و خطوط عمودی بیانگر صدک ۲۵ و ۷۵ است.

طبق نتایج شکل ۴، مطابق انتظار با افزایش طول سری زمانی بایاس مؤلفه‌های نویز سفید در روش بیشترین درست‌نمایی کاهش می‌یابد. این در حالی است که با افزایش طول سری زمانی تغییر قابل‌توجهی در نتایج روش پیشنهادی حاصل نمی‌شود.

همچنین میزان گپ تا ۱۰٪ نیز تأثیر قابل‌توجهی در بایاس دو روش ندارد. مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی به‌خوبی قادر به تقریب نویز سفید است طوری که برای کل داده‌ها میانگین بایاس ۰/۰۳mm بوده و ۷۵٪ و ۲۵٪ بایاس‌ها به ترتیب کمتر از ۰/۰۵mm و ۰/۰۱mm هستند.

زمان برآورد روش پیشنهادی و روش بیشترین درست‌نمایی نیز در جدول ۲ ارائه شده‌است. مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی در تمام حالات شبیه‌سازی در کمتر از یک ثانیه به جواب می‌رسد درحالی‌که روش

جدول ۲- متوسط زمان محاسبات روش پیشنهادی و روش بیشترین درست‌نمایی محدود با واحد ثانیه برای حالات مختلف شبیه‌سازی؛ روش پیشنهادی با نماد WV نشان داده شده‌است.

حالات مختلف شبیه‌سازی با طول داده و درصد گپ متفاوت								
۸۰۰۰			۴۰۰۰			۲۰۰۰		
۱۰٪	۵٪	۰٪	۱۰٪	۵٪	۰٪	۱۰٪	۵٪	۰٪
۶۴۸	۶۴۷	۶۳۰	۸۰	۸۷	۸۰	۱۰	۹	۹
۰/۰۶	۰/۰۶	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲
زمان محاسبات روش پیشنهادی (WV)								
زمان محاسبات روش بیشترین درست‌نمایی محدود								

مؤلفه‌های سالیانه و نیم‌سالیانه، سیگنال‌هایی با دوره تناوب ۱۳/۶۶، ۱۴/۲، ۱۴/۸ و $350/n$ روز ($n=1,2,...,8$) نیز در نظر گرفته شده‌است [۲۱].

برای مقایسه نتایج روش پیشنهادی و روش بیشترین درست‌نمایی محدود در این بخش، از دو معیار (۱) قدر مطلق اختلاف نویز سفید در دو روش و (۲) زمان محاسبات استفاده می‌شود. نتایج اختلاف دو روش و زمان محاسبات آن‌ها برای ۵۷ سری زمانی واقعی در جدول ۳ نشان داده شده‌است.

طبق نتایج مندرج در جدول ۳، قدر مطلق اختلاف نویز سفید برآورد شده از دو روش به‌طور میانگین برابر ۰/۰۶mm است و همچنین ۲۵٪ و ۷۵٪ اختلاف‌ها کمتر از ۰/۰۴mm و

۷-۲- داده‌های واقعی

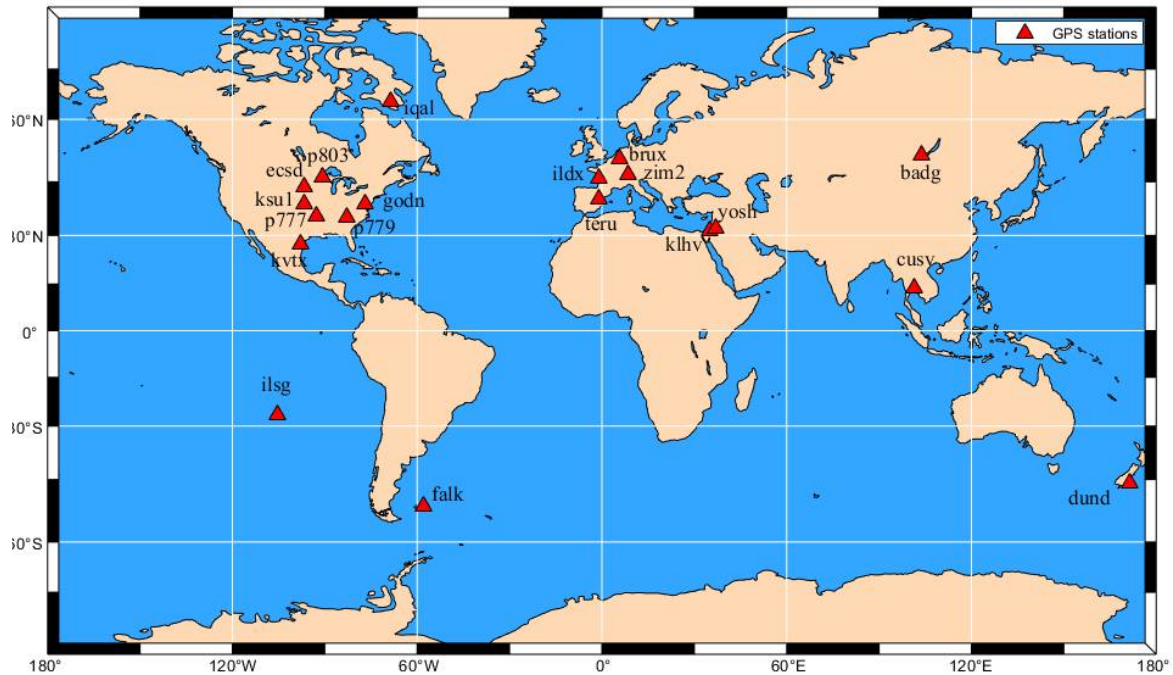
در این بخش از داده‌های ۱۹ ایستگاه دائمی GPS (درمجموع ۵۷ سری زمانی) که در سایت sopac^۱ موجود است، برای ارزیابی روش پیشنهادی استفاده می‌شود. موقعیت ایستگاه‌های مورد استفاده در شکل ۵ نمایش داده شده‌است.

طول این سری‌های زمانی بین ۴/۹۷ تا ۱۴/۴۸ سال بوده و درصد گپ نیز حداکثر ۹٪ است. نکته لازم به ذکر این است که در مدل تابعی این سری‌های زمانی علاوه بر

^۱ Scripps Orbit and Permanent Array Center

می‌باشند. نکته دیگر این است که روش پیشنهادی بسته به طول سری زمانی و درصد گپ ۵۰۰ تا ۸۰۰۰ برابر

سریع‌تر از روش بیشترین درست‌نمایی محدود است که این نتایج حاکی از کارایی روش پیشنهادی می‌باشد.



شکل ۵- موقعیت ایستگاه‌های دائمی GPS.

جدول ۳- نتایج اختلاف دو روش بیشترین درست‌نمایی محدود و روش پیشنهادی (WV) در برآورد دامنه نویز سفید به همراه نسبت زمان محاسبات آن‌ها برای ۵۷ سری زمانی واقعی.

نسبت بین زمان REML و WV	اندازه اختلاف نویز سفید برآورد شده از دو روش (mm)		
۴۵۰ تا ۸۰۰۰	صدک ۷۵	میانگین	صدک ۲۵
	۰/۰۹	۰/۰۶	۰/۰۴

۸- بحث و نتیجه‌گیری

برآورد بهینه مجهولات و عدم قطعیت آن‌ها نیازمند شناخت ماتریس (کو)واریانس مشاهدات است. برای تعیین ماتریس (کو)واریانس سری‌های زمانی GNSS باید واریانس نویز سفید و رنگی تعیین گردد که این کار توسط روش‌های تعیین مؤلفه‌های واریانس انجام می‌گیرد. عمدتاً برای این منظور از روش‌های بیشترین درست‌نمایی (محدود) و کمترین مربعات استفاده می‌شود که از مرتبه $O(N^3)$ هستند.

در سالیان اخیر روش‌های متنوعی برای افزایش سرعت محاسبات در برآورد مؤلفه‌های نویز ارائه شده است. در این تحقیق به‌منظور برآورد سریع دامنه نویز سفید، قابلیت استفاده از واریانس موجک مورد بررسی قرار گرفت که

محاسبات از مرتبه $O(N)$ است. برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، ۱۸۰ سری زمانی شبیه‌سازی شده و نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج روش بیشترین درست‌نمایی بر مبنای دو معیار (۱) بایاس دامنه نویز سفید برآورد شده و (۲) زمان انجام محاسبات مقایسه گردید. نتایج حاصله نشان داد که واریانس موجک توانایی بالایی در تقریب نویز سفید دارد و بعلاوه باعث افزایش سرعت محاسبات می‌شود طوری که زمان محاسبات برای سری‌های زمانی با طول ۲۰۰۰، ۴۰۰۰ و ۸۰۰۰ به‌طور میانگین به ترتیب برابر ۰/۰۲، ۰/۰۴ و ۰/۰۶ ثانیه است. این در حالی است که روش بیشترین درست‌نمایی محدود برای سری‌های زمانی با طول‌های بیان‌شده به ترتیب نیاز به ۹، ۸۲ و ۶۴۲ ثانیه برای انجام محاسبات دارد.

بعد از موفقیت‌آمیز بودن استفاده از روش پیشنهادی بر روی داده‌های شبیه‌سازی‌شده، این روش بر روی داده‌های واقعی ۱۹ ایستگاه دائمی برای برآورد دامنه نوبز سفید بکار گرفته شد. مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی با روش بیشترین درست‌نمایی محدود نشان داد که هر دو روش نتایج مشابهی برای دامنه نوبز سفید ارائه می‌دهند؛ با ذکر این نکته که روش

مراجع

پیشنهادی بسیار سریع‌تر از روش بیشترین درست‌نمایی محدود است. با توجه به اینکه روش پیشنهادی فقط برای برآورد دامنه نوبز سفید کاربرد دارد، این تحقیق می‌تواند مسیر مطالعاتی جدیدی را برای برآورد سایر مؤلفه‌های نوبز (فلیکر، گام تصادفی و قانون توان) با فرض معلوم بودن نوبز سفید ارائه کند.

- [۱] Wernicke, B., Davis, J. L., Bennett, R. A., Normandeau, J. E., Friedrich, A. M., & Niemi, N. A. (2004). Tectonic implications of a dense continuous GPS velocity field at Yucca Mountain, Nevada. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109(B12).
- [۲] Aoki, Y. (2017). Space geodetic tools provide early warnings for earthquakes and volcanic eruptions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122(4), 3241-3244.
- [۳] Tregoning, P., & Watson, C. (2009). Atmospheric effects and spurious signals in GPS analyses. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 114(B9).
- [۴] Montillet, J. P., Melbourne, T. L., & Szeliga, W. M. (2018). GPS vertical land motion corrections to sea-level rise estimates in the Pacific Northwest. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 123(2), 1196-1212.
- [۵] Argus, D. F., Peltier, W. R., Drummond, R., & Moore, A. W. (2014). The Antarctica component of postglacial rebound model ICE-6G_C (VM5a) based on GPS positioning, exposure age dating of ice thicknesses, and relative sea level histories. *Geophysical Journal International*, 198(1), 537-563.
- [۶] Bock, Y., & Melgar, D. (2016). Physical applications of GPS geodesy: A review. *Reports on Progress in Physics*, 79(10), 106801.
- [۷] Herring, T.A., Melbourne, T.L., Murray, M.H., Floyd, M.A., Szeliga, W.M., King, R.W., Phillips, D.A., Puskas, C.M., Santillan, M. & Wang, L., (2016). Plate Boundary Observatory and related networks: GPS data analysis methods and geodetic products. *Reviews of Geophysics*, 54(4), 759-808.
- [۸] Tehranchi, R., Moghtased-Azar, K., & Safari, A. (2020). A new statistical test based on the WR for detecting offsets in GPS experiment. *Earth and Space Science*, 7(8), e2019EA000810.
- [۹] Khazraei, S. M., & Amiri-Simkooei, A. R. (2021). Improving offset detection algorithm of GNSS position time-series using spline function theory. *Geophysical Journal International*, 224(1), 257-270.
- [۱۰] Nikolaidis, R. (2002). *Observation of geodetic and seismic deformation with the Global Positioning System*. PH. D. thesis, University of California, San Diego.
- [۱۱] Bevis, M., & Brown, A. (2014). Trajectory models and reference frames for crustal motion geodesy. *Journal of Geodesy*, 88, 283-311.
- [۱۲] Tehranchi, R., Moghtased Azar, K., & Nankali, H. R. (2016). Analysis of GPS Time Series Over the Alborz Range. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 5(4), 127-135.
- [۱۳] Williams, S. D. (2008). CATS: GPS coordinate time series analysis software. *GPS solutions*, 12, 147-153.
- [۱۴] Bos, M. S., Fernandes, R. M. S., Williams, S. D. P., & Bastos, L. (2008). Fast error analysis of continuous GPS observations. *Journal of Geodesy*, 82(3), 157-166.
- [۱۵] Langbein, J. (2017). Improved efficiency of maximum likelihood analysis of time series with temporally correlated errors. *Journal of Geodesy*, 91, 985-994.
- [۱۶] Koch, K. R. (1986). Maximum likelihood estimate of variance components: Ideas by AJ Pope (In memory of Allen J. Pope, 11.10. 1939–29.08. 1985). *Bulletin gæodésique*, 60, 329-338.
- [۱۷] Amiri-Simkooei, A. (2007). *Least-squares variance component estimation: theory and GPS applications*. PH. D. thesis, Delft University of Technology.

- [۱۸] Teunissen, P. J., & Amiri-Simkooei, A. R. (2008). Least-squares variance component estimation. *Journal of geodesy*, 82, 65-82.
- [۱۹] Langbein, J. (2012). Estimating rate uncertainty with maximum likelihood: differences between power-law and flicker-random-walk models. *Journal of Geodesy*, 86(9), 775-783.
- [۲۰] Santamaría-Gómez, A., Bouin, M. N., Collilieux, X., & Wöppelmann, G. (2011). Correlated errors in GPS position time series: Implications for velocity estimates. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 116(B1).
- [۲۱] Amiri-Simkooei, A. R., Tiberius, C. C., & Teunissen, P. J. (2007). Assessment of noise in GPS coordinate time series: methodology and results. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 112(B7).
- [۲۲] Bos, M. S., Fernandes, R. M. S., Williams, S. D. P., & Bastos, L. (2013). Fast error analysis of continuous GNSS observations with missing data. *Journal of Geodesy*, 87(4), 351-360.
- [۲۳] He, X., Bos, M. S., Montillet, J. P., & Fernandes, R. M. S. (2019). Investigation of the noise properties at low frequencies in long GNSS time series. *Journal of Geodesy*, 93(9), 1271-1282.
- [۲۴] Dmitrieva, K., Segall, P., & DeMets, C. (2015). Network-based estimation of time-dependent noise in GPS position time series. *Journal of Geodesy*, 89(6), 591-606.
- [۲۵] Langbein, J., & Svarc, J. L. (2019). Evaluation of temporally correlated noise in Global Navigation Satellite System time series: Geodetic monument performance. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124(1), 925-942.
- [۲۶] Langbein, J. (2008). Noise in GPS displacement measurements from Southern California and Southern Nevada. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 113(B5).
- [۲۷] King, M. A., & Williams, S. D. (2009). Apparent stability of GPS monumentation from short-baseline time series. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 114(B10).
- [۲۸] Williams, S.D., Bock, Y., Fang, P., Jamason, P., Nikolaidis, R.M., Prawirodirdjo, L., Miller, M. & Johnson, D.J. (2004). Error analysis of continuous GPS position time series. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109(B3).
- [۲۹] Montillet, J. P., Tregoning, P., McClusky, S., & Yu, K. (2012). Extracting white noise statistics in GPS coordinate time series. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 10(3), 563-567.
- [۳۰] Montillet, J. P., & Bos, M. S. (Eds.). (2019). *Geodetic time series analysis in earth sciences*. Springer.
- [۳۱] Tehranchi, R., Moghtased-Azar, K., & Safari, A. (2021). Fast approximation algorithm to noise components estimation in long-term GPS coordinate time series. *Journal of Geodesy*, 95(2), 18.
- [۳۲] Ghorbanalizadeh Khangah, M., Tehranchi, R., & Moghtased Azar, K. (2021). Noise Analysis of GPS Time Series with Simulated Data Using EMD, Standard Deviation and Trigonometric Methods. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 11(1), 91-106.
- [۳۳] Cucci, D. A., Voirol, L., Kermarrec, G., Montillet, J. P., & Guerrier, S. (2023). The Generalized Method of Wavelet Moments with eXogenous inputs: a fast approach for the analysis of GNSS position time series. *Journal of Geodesy*, 97(2), 14.
- [۳۴] Williams, S. D. P. (2003). The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series. *Journal of Geodesy*, 76, 483-494.
- [۳۵] Hosking, J. R. M. (1981), Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 165-176.
- [۳۶] Percival, D. B., & Walden, A. T. (2000). *Wavelet methods for time series analysis* (Vol. 4). Cambridge university press.