

محاسبه‌ی چندجمله‌ای‌های لاگرانژ به روش بازگشتی با استفاده از نقاط گرهی چبیشف

احسان نکوزاده چهارمحالی

کارشناس ارشد ژئودزی - گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده‌ی عمران و حمل‌ونقل - دانشگاه اصفهان
e.nekoozade@gmail.com

(تاریخ دریافت تیر ۱۳۹۹، تاریخ تصویب بهمن ۱۳۹۹)

چکیده

در مباحث مربوط به تئوری تقریب، برای تقریب‌زدن یک تابع پیچیده با استفاده از یک چندجمله‌ای، از درون‌یابی استفاده می‌شود. در این نوع مسائل نحوه‌ی توزیع نقاط گرهی یکی از عوامل تأثیرگذار بر دقت درون‌یابی است؛ به عنوان مثال اگر برای تقریب‌زدن یک تابع با استفاده از چندجمله‌ای‌ها، از نقاط گرهی هم‌فاصله استفاده شود، دقت درون‌یابی در ابتدا و انتهای بازه‌ی نمونه‌برداری مطلوب نخواهد بود. برای غلبه بر این مشکل باید نحوه‌ی توزیع نقاط گرهی به گونه‌ای باشد که در ابتدا و انتهای بازه‌ی درون‌یابی نسبت به مرکز بازه از تراکم بیشتری برخوردار باشند. یک نمونه از مجموعه نقاطی با این شرایط، مجموعه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند. با استفاده از این نقاط به عنوان نقاط گرهی، دامنه‌ی نوسان‌های چندجمله‌ای در دو طرف بازه‌ی درون‌یابی بسیار کوچک خواهد بود. با توجه به مزایای ذکرشده برای استفاده از نقاط چبیشف در مسائل درون‌یابی، در این مقاله یک رابطه‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از این نقاط ارائه می‌شود. با استفاده از این روش تعداد عملگرهای محاسباتی مورد نیاز جهت به‌دست‌آوردن توابع پایه‌ی لاگرانژ، تا حد قابل توجهی کاهش می‌یابد. از این رو انتظار می‌رود که با به‌کارگیری این روش، سرعت انجام محاسبات در فرآیند درون‌یابی افزایش یابد. برای بررسی این مسأله در ادامه‌ی مقاله، توابع پایه‌ی لاگرانژ در یک مسأله‌ی درون‌یابی با استفاده از هر دو روش محاسبه شدند. پس از محاسبه‌ی این توابع برای تمام اعداد صحیح در بازه‌ی [۱, ۱۰۰۰] و برای چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی ۱ تا ۱۰، مشخص شد که استفاده از روش بازگشتی در محاسبات، تا چند برابر سریع‌تر از روش معمولی است؛ به گونه‌ای که برای چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ روش بازگشتی ۱/۳ برابر سریع‌تر از روش معمولی بوده است. با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای این اختلاف افزایش یافته و برای چندجمله‌ای درجه‌ی ۱۰ روش بازگشتی تا ۳ برابر سریع‌تر از الگوریتم معمولی عمل کرده است؛ بنابراین استفاده از روش ارائه‌شده به خصوص در مواردی که از چندجمله‌ای‌های با درجات بالا برای درون‌یابی استفاده می‌شود، کاملاً توجیه‌پذیر است.

واژگان کلیدی: تئوری تقریب، درون‌یابی لاگرانژ، محاسبه‌ی بازگشتی توابع پایه‌ی لاگرانژ، نقاط گرهی چبیشف، نقاط گرهی هم‌فاصله

۱- مقدمه

مسئله‌ی درون‌یابی یکی از مسائلی است که در زمینه‌های مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. در آنالیز عددی برای تقریب‌زدن مشتق یا انتگرال یک تابع پیچیده با استفاده از یک چندجمله‌ای، از درون‌یابی استفاده می‌شود [۱]. در علوم کاربردی نیز هنگامی که مقدار یک کمیت تنها در چند نقطه معلوم است، برای محاسبه‌ی مقادیر آن کمیت در سایر نقاط، از درون‌یابی استفاده می‌شود. به‌علاوه به نقاطی که در آن‌ها مقدار کمیت مورد نظر معلوم است، نقاط گرهی گفته می‌شود.

برای به‌دست‌آوردن ضرایب چندجمله‌ای درون‌یاب از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود؛ مثلاً با حل سیستم واندرموند^۱ می‌توان ضرایب مجهول چندجمله‌ای مورد نظر را محاسبه کرد؛ اما استفاده از این روش، به خصوص در مواردی که از چندجمله‌ای‌های با درجات بالا استفاده می‌شود، علاوه بر ایجاد بار محاسباتی زیاد برای رایانه، از دقت کافی برخوردار نیست [۲]. به همین دلیل معمولاً از روش‌های دیگر مانند روش‌های نیوتن و لاگرانژ استفاده می‌شود. روش نیوتن بر اساس محاسبه‌ی تفاضلات تقسیم‌شده بنا شده است؛ در حالی که در روش لاگرانژ نیازی به محاسبه‌ی تفاضلات تقسیم‌شده نیست [۳]. اگرچه روش لاگرانژ نخستین بار در سال ۱۷۷۹ توسط "Waring" منتشر شد [۴]، اما امروزه این روش به نام لاگرانژ شناخته می‌شود که در سال ۱۷۹۵ آن را ارائه کرد [۵]. در مسائل درون‌یابی، از توابع چندجمله‌ای لاگرانژ برای هر توزیع دلخواه از نقاط گرهی می‌توان استفاده کرد. در برخی موارد این توابع جهت درون‌یابی بین نقاط گرهی هم‌فاصله^۲ استفاده می‌شوند؛ مثلاً در فایل‌های مداری دقیق با فرمت "sp3"، مختصات ماهواره‌های "GNSS"، در فواصل زمانی ثابت ۱۵ دقیقه‌ای آورده شده است [۶،۷]. برای درون‌یابی مختصات ماهواره‌ها بین این فواصل زمانی، می‌توان از توابعی مانند چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد [۸]. با وجود کاربردهای نقاط گرهی هم‌فاصله در مسائل درون‌یابی، برای تقریب‌زدن یک تابع با استفاده از یک چندجمله‌ای، از نقاط گرهی هم‌فاصله استفاده نمی‌شود؛

زیرا در این صورت چندجمله‌ای برازش داده شده در ابتدا و انتهای بازه‌ی درون‌یابی نوسان‌های شدیدی خواهد داشت که این نوسان‌ها موجب می‌شود چندجمله‌ای به تابع اصلی همگرا نشود. به مسئله‌ی عدم همگرایی چندجمله‌ای برازش داده شده به تابع اصلی، پدیده‌ی "Runge" گفته می‌شود [۹]. برای اجتناب از این پدیده باید از توزیعی از نقاط گرهی استفاده شود که در انتهای بازه‌ی درون‌یابی نسبت به مرکز بازه، از تراکم بیشتری برخوردار باشد. ساده‌ترین مثال از نقاطی با این شرایط، خانواده‌ی نقاط چبیشف^۵ هستند. این نقاط مجموعه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند [۱۰]. با استفاده از نقاط چبیشف درون‌یابی دقیق‌تر بوده و نوسان‌های ناخواسته در انتهای بازه دامنه‌ی کوچکی خواهند داشت. در هر مسئله‌ی درون‌یابی، در صورت استفاده از روش رایج برای محاسبه‌ی ضرایب چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، تعداد محاسبات انجام شده نسبت به درجه‌ی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی ۲ خواهد بود. لذا در مواردی که از چندجمله‌ای‌های با درجات بالا استفاده می‌شود، تعداد محاسبات افزایش یافته و این مسئله موجب اشغال حجم قابل توجه از حافظه‌ی رایانه و صرف زمان زیاد در فرآیند پردازش می‌شود. در این مقاله با توجه به مزایای ذکر شده برای درون‌یابی با استفاده از نقاط گرهی چبیشف، یک روش بازگشتی جهت محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از این نقاط معرفی می‌شود. برای این منظور در بخش‌های دوم و سوم مقاله در مورد مبانی درون‌یابی لاگرانژ و نقاط گرهی چبیشف توضیحاتی آورده شده است. در بخش چهارم، نحوه‌ی محاسبه‌ی چندجمله‌ای‌های پایه‌ی لاگرانژ به روش بازگشتی و با استفاده از نقاط گرهی چبیشف، شرح داده می‌شود. با استفاده از این روش تعداد عملگرهای محاسباتی مورد نیاز جهت به‌دست‌آوردن توابع پایه‌ی لاگرانژ، تا حد قابل توجهی کاهش می‌یابد. از این رو انتظار می‌رود که با به‌کارگیری این روش، سرعت انجام محاسبات در فرآیند درون‌یابی افزایش یابد؛ لذا در قسمت پنجم مقاله، بررسی می‌شود که روش بازگشتی در محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ تا چه حد سریع‌تر از روش معمولی عمل می‌کند. در بخش پایانی مقاله نیز نتایج به‌دست آمده، به طور مختصر بیان شده است.

^۱ Vandermond System^۲ Equidistant nodes^۳ Standard Product 3^۴ Global Navigation Satellite System^۵ Chebyshev nodes

۲- درون یابی لاگرانژ

فرض کنید $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ مجموعه‌ای از $n+1$ نقطه‌ی مجزا هستند که می‌خواهیم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n به آن‌ها برازش دهیم. برای این منظور چندجمله‌ای پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از رابطه‌ی (۱) تعریف می‌شود.

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{n+1})} \quad (1)$$

در این صورت چندجمله‌ای درون یاب نیز از رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید [۲].

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x) \quad (2)$$

چندجمله‌ای پایه‌ی لاگرانژ^۱ $L_j(x)$ در نقاط گره‌ی x_j دارای ویژگی زیر است.

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n+1$$

برای محاسبه‌ی هر یک از جملات توابع پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از رابطه‌ی (۱) تعداد عملگرهای جبری مورد نیاز عبارت است از:

$n -$ عملگر تفاضل در صورت رابطه، n عملگر تفاضل در مخرج رابطه، $n-1$ عملگر ضرب در صورت رابطه، $n-1$ عملگر ضرب در مخرج رابطه، یک عملگر تقسیم مربوط به تقسیم کردن صورت بر مخرج

بنابراین تعداد کل عملگرها برای محاسبه‌ی هر یک جمله از توابع پایه‌ی لاگرانژ برابر است با:

$$n + n + (n - 1) + (n - 1) + 1 = 4n - 1 \quad (3)$$

با توجه به این که تعداد کل جملات توابع پایه $n+1$ می‌باشد، تعداد کل عملگرها برای محاسبه‌ی همه‌ی جملات توابع پایه‌ی لاگرانژ عبارت است از:

$$(n + 1)(4n - 1) = 4n^2 + 3n - 1 \quad (4)$$

^۱ Lagrange basis polynomial

همان‌طور که در رابطه‌ی (۴) ملاحظه می‌شود، تعداد محاسبات نسبت به درجه‌ی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی ۲ است.

۳- نقاط گره‌ی چبیشف

نقاط چبیشف مجموعه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند. اگرچه چندجمله‌ای‌های چبیشف دارای انواع مختلفی هستند، در اکثر مقالات و کتاب‌ها عبارت "چندجمله‌ای چبیشف" برای اشاره به نوع اول این چندجمله‌ای‌ها که مهم‌ترین نوع نیز هستند، به کار می‌رود. چندجمله‌ای چبیشف نوع اول برای درجه‌ی n و در نقطه‌ی x با استفاده از روابط زیر تعریف می‌شود.

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad (5)$$

در این رابطه

$$x = \cos \theta$$

بنابراین برای درجات مختلف این چندجمله‌ای‌ها خواهیم داشت:

$$T_0(x) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(x) = \cos \theta = x$$

$$T_2(x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1, \dots$$

ریشه‌های یک چندجمله‌ای چبیشف از درجه‌ی n در طول بازه‌ی $[-1, 1]$ با استفاده از رابطه‌ی (۶) به دست می‌آیند [۱۰].

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

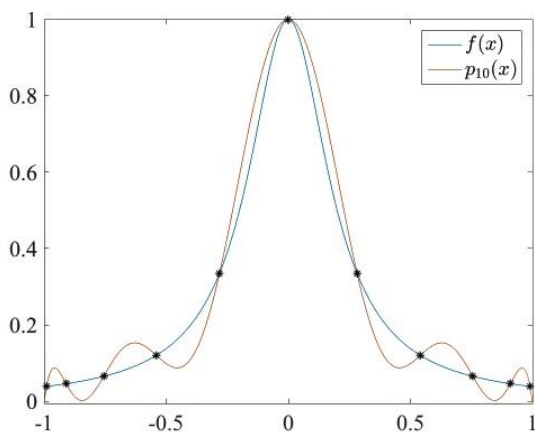
زمانی که هدف به دست آوردن چندجمله‌ای لاگرانژ از درجه‌ی n است، تعداد نقاط گره‌ی مورد نیاز، $n+1$ می‌باشد. بنابراین باید از ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف درجه‌ی $n+1$ با استفاده از رابطه‌ی (۷)، استفاده شود.

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n+2}, \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (7)$$

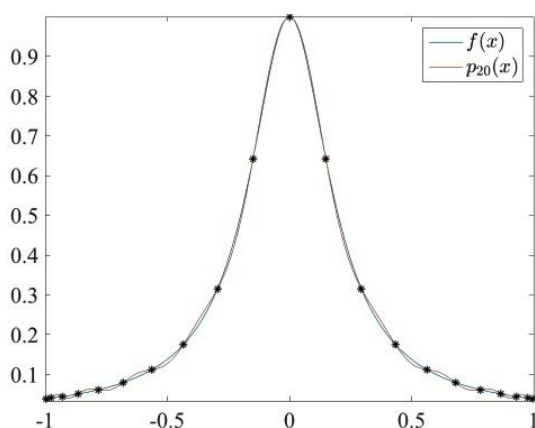
به علاوه برای محاسبه‌ی نقاط چبیشف در طول بازه‌ی اختیاری $[a, b]$ از رابطه‌ی (۸) استفاده می‌شود [۱۱].

$$x_j = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n+2}, \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (8)$$

همانطور که در بخش مقدمه گفته شد، استفاده از نقاط گرهی هم‌فاصله برای تقریب‌زدن یک تابع با استفاده از یک چندجمله‌ای، موجب ایجاد نوسان‌هایی در ابتدا و انتهای بازه‌ی درون‌یابی می‌شود. این نوسان‌ها به خصوص در مواردی که از چندجمله‌ای‌های با درجات بالا برای درون‌یابی استفاده می‌شود، دقت درون‌یابی را کاهش می‌دهد. در شکل‌های (۱) و (۲) منحنی آبی‌رنگ، نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ نشان می‌دهد. منحنی قرمز رنگ در شکل (۱)، نمودار چندجمله‌ای درجه‌ی ۱۰ را نشان می‌دهد که در محیط نرم‌افزار متلب و با استفاده از نقاط گرهی هم‌فاصله به تابع برازش داده شده است. در شکل (۲)، این منحنی مربوط به چندجمله‌ای درجه‌ی ۲۰ برازش داده شده است.



شکل ۳- نمودار چندجمله‌ای درجه ۱۰ برازش داده شده به تابع $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ با استفاده از نقاط گرهی چبیشف

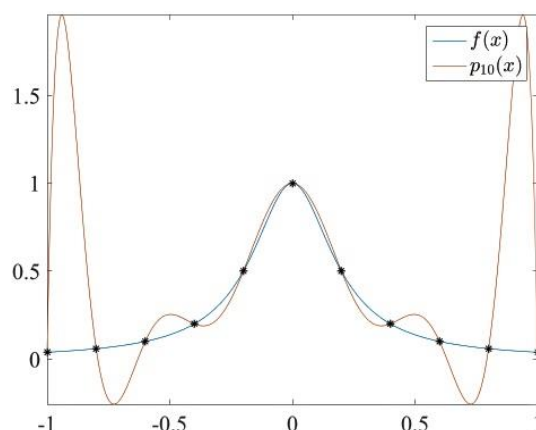


شکل ۴- نمودار چندجمله‌ای درجه ۲۰ برازش داده شده به تابع $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ با استفاده از نقاط گرهی چبیشف

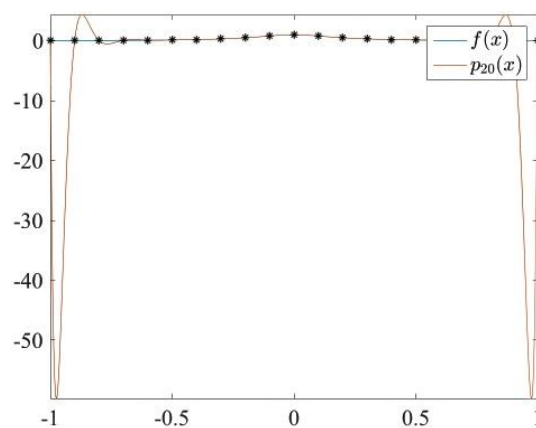
در این شکل‌ها واضح است که استفاده از نقاط چبیشف دقت درون‌یابی را در ابتدا و انتهای بازه‌ی نمونه‌برداری افزایش می‌دهد. همچنین در این حالت برخلاف حالت قبل، با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای دقت درون‌یابی افزایش می‌یابد. این مسأله استفاده از نقاط گرهی چبیشف را برای تقریب‌زدن توابع با استفاده از چندجمله‌ای‌ها، توجیه‌پذیر می‌کند.

۴- محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از نقاط گرهی چبیشف به صورت بازگشتی

در این قسمت، هدف ارائه‌ی یک روش بازگشتی جهت محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از نقاط گرهی



شکل ۱- نمودار چندجمله‌ای درجه ۱۰ برازش داده شده به تابع $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ با استفاده از نقاط گرهی هم‌فاصله



شکل ۲- نمودار چندجمله‌ای درجه ۲۰ برازش داده شده به تابع $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ با استفاده از نقاط گرهی هم‌فاصله

همانطور که ملاحظه می‌شود، در انتها و ابتدای بازه‌ی نمونه‌برداری، فاصله‌ی تابع مذکور با چندجمله‌ای‌های برازش داده شده افزایش یافته است. با افزایش درجه‌ی

در این جملات برای تبدیل تفاضل به ضرب از یک اتحاد مثلثاتی مطابق رابطه (۱۲) استفاده می کنیم.

$$\cos(a) - \cos(b) = \left[-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right] \quad (12)$$

با به کارگیری رابطه (۱۲) در هر یک از جملات تشکیل دهنده تابع m_j خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (x_j - x_1) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[-2\sin\left(\frac{j}{2n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{j-1}{2n+2}\pi\right)\right] \\ (x_j - x_2) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[-2\sin\left(\frac{j+1}{2n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{j-2}{2n+2}\pi\right)\right] \\ &\vdots \\ (x_j - x_{j-1}) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[-2\sin\left(\frac{2j-2}{2n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2n+2}\pi\right)\right] \\ (x_j - x_{j+1}) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[-2\sin\left(\frac{2j}{2n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{-1}{2n+2}\pi\right)\right] \\ &\vdots \\ (x_j - x_{n+1}) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[-2\sin\left(\frac{j+n}{2n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{j-n-1}{2n+2}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

همان طور که مشاهده می شود، در هر یک از این عبارات از دو عملگر سینوس با آرگومان های متفاوت استفاده شده است. البته همه ی آرگومان ها ضریبی از $\left(\frac{1}{2n+2}\pi\right)$ هستند که این ضرایب را می توان در چهار دسته تقسیم بندی کرد. دسته ی اول ضرایب به عملگر سینوس اول در جملات $(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})$ مربوط می باشد که در عبارات بالا با رنگ آبی نشان داده شده اند. این ضرایب از j شروع شده و تا $2j-2$ افزایش می یابند. دسته ی دوم ضرایب به عملگر سینوس اول در جملات $(x_j - x_{j+1})$ تا $(x_j - x_{n+1})$ مربوط است که با رنگ قرمز نشان داده شده اند. این ضرایب از $2j$ شروع شده و تا $j+n$ افزایش می یابند. دسته ی سوم ضرایب به عملگر سینوس دوم در جملات $(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})$ مربوط می باشد که با رنگ نارنجی نشان داده شده اند. این ضرایب از $j-1$ شروع شده و تا 1 کاهش می یابند. دسته ی چهارم ضرایب به عملگر سینوس دوم در جملات $(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{n+1})$ مربوط است که با رنگ سبز نشان داده شده اند. این ضرایب از -1 شروع شده و تا $j-n-1$ کاهش می یابند. در جدول (۱) این ضرایب مطابق دسته بندی انجام شده، آورده شده اند.

جدول ۱- ضرایب مربوط به آرگومان ها در m_j

	اولین ضریب	آخرین ضریب
دسته ی اول	j	$2j-2$
دسته ی دوم	$2j$	$j+n$
دسته ی سوم	$j-1$	1
دسته ی چهارم	-1	$j-n-1$

چپیشف می باشد. برای این منظور رابطه ی بین دو جمله ی متوالی از این چندجمله ای ها محاسبه می شود. با توجه به رابطه (۱) مشخص می شود که صورت این رابطه تابعی از دو متغیر j و x است، در حالی که مخرج این رابطه تنها به متغیر j وابسته است. بنابراین توابع $s_j(x)$ و m_j را متناظر با صورت و مخرج رابطه به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} L_j(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{n+1})} \\ &= \frac{s_j(x)}{m_j} \end{aligned} \quad (9)$$

با تقسیم کردن دو جمله ی متوالی از چندجمله ای های پایه ی لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{L_{j+1}(x)}{L_j(x)} = \frac{\frac{s_{j+1}(x)}{m_{j+1}}}{\frac{s_j(x)}{m_j}} = \frac{s_{j+1}(x)m_j}{s_j(x)m_{j+1}} \quad (10)$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned} s_j(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \\ &\dots (x-x_{n+1}), \\ s_{j+1}(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_j)(x-x_{j+2}) \\ &\dots (x-x_{n+1}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{s_{j+1}(x)}{s_j(x)} = \frac{(x-x_j)}{(x-x_{j+1})} \quad (11)$$

برای محاسبه ی جمله ی اول از تابع m_j خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_j &= \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right)\right], \\ x_1 &= \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2-1}{2n+2}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

بنابراین

$$(x_j - x_1) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{2-1}{2n+2}\pi\right)\right]$$

در ادامه جملات بعدی نیز به همین طریق محاسبه شده اند.

$$\begin{aligned} (x_j - x_2) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{4-1}{2n+2}\pi\right)\right] \\ &\vdots \\ (x_j - x_{j-1}) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{2j-3}{2n+2}\pi\right)\right] \\ (x_j - x_{j+1}) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)\right] \\ &\vdots \\ (x_j - x_{n+1}) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2n+2}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

با جایگذاری $j+1$ به جای j در هر قسمت از این جدول، می‌توان مقادیر این ضرایب را برای آرگومان‌های m_{j+1} به دست آورد. این ضرایب نیز مطابق دسته‌بندی انجام شده برای m_j با رنگ‌های متفاوت در جدول (۲) آورده شده‌اند.

جدول ۲- ضرایب مربوط به آرگومان‌ها در m_{j+1}

	اولین ضریب	آخرین ضریب
دسته‌ی اول	$j+1$	$2j$
دسته‌ی دوم	$2j+2$	$j+n+1$
دسته‌ی سوم	j	1
دسته‌ی چهارم	-1	$j-n$

بر اساس این دو جدول می‌توان نتیجه گرفت که برخی ضرایب در m_j و m_{j+1} مشترک و برخی غیرمشترک هستند. ضرایبی که در m_j وجود دارند و در m_{j+1} وجود ندارند مطابق دسته‌بندی انجام شده در جدول (۱)، در جدول (۳) آورده شده‌اند.

جدول ۳- ضرایبی که در m_j وجود دارند و در m_{j+1} وجود ندارند

دسته‌ی اول	j
دسته‌ی دوم	$2j, 2j+1$
دسته‌ی سوم	-
دسته‌ی چهارم	$j-n-1$

ضرایبی که در m_{j+1} وجود دارند و در m_j وجود ندارند نیز مطابق دسته‌بندی انجام شده در جدول (۲)، در جدول (۴) آورده شده‌اند.

جدول ۴- ضرایبی که در m_{j+1} وجود دارند و در m_j وجود ندارند

دسته‌ی اول	$2j-1, 2j$
دسته‌ی دوم	$j+n+1$
دسته‌ی سوم	j
دسته‌ی چهارم	-

با تقسیم کردن m_j بر m_{j+1} فقط عملگرهای سینوس با آرگومان‌های غیرمشترک باقی می‌مانند. ضمن این که تعداد ضرایب (-2) و $\left(\frac{b-a}{2}\right)$ در m_j و m_{j+1} برابر است و می‌توان آنها را در نظر نگرفت. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{m_j}{m_{j+1}} = \frac{\sin\left(\frac{j}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{2j}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{j-n-1}{2n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{2j}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{j+n+1}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{j}{2n+2}\pi\right)} \quad (۱۳)$$

خوشبختانه در عبارت بالا کماکان آرگومان‌های مشترکی وجود دارد که به ساده‌تر شدن آن کمک می‌کند. پس از ساده کردن این عبارت خواهیم داشت:

$$\frac{m_j}{m_{j+1}} = \frac{\sin\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{j-n-1}{2n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{j+n+1}{2n+2}\pi\right)} \quad (۱۴)$$

آرگومان‌های $\left(\frac{j-n-1}{2n+2}\pi\right)$ و $\left(\frac{j+n+1}{2n+2}\pi\right)$ را می‌توان طبق روابط (۱۵) و (۱۶) تفکیک کرد.

$$\left(\frac{j-n-1}{2n+2}\pi\right) = \left(\frac{j}{2n+2}\pi - \frac{n+1}{2(n+1)}\pi\right) = \left(\frac{j}{2n+2}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (۱۵)$$

$$\left(\frac{j+n+1}{2n+2}\pi\right) = \left(\frac{j}{2n+2}\pi + \frac{n+1}{2(n+1)}\pi\right) = \left(\frac{j}{2n+2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (۱۶)$$

همان‌طور که می‌دانیم:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha), \quad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha) \quad (۱۷)$$

در نتیجه براساس روابط (۱۴)، (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\frac{m_j}{m_{j+1}} = -\frac{\sin\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right)} \quad (۱۸)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود آرگومان‌های عملگرهای سینوس در صورت و مخرج این رابطه شبیه به آرگومان‌های نقاط چبیشف برای x_j و x_{j+1} هستند. بنابراین برای ساده‌تر کردن فرآیند محاسبات می‌توان متغیر z_j را مشابه نقاط چبیشف به صورت زیر تعریف کرد.

$$z_j = \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n+2}\right), \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (۱۹)$$

به دلیل تشابه این رابطه به رابطه‌ی (۷)، مقادیر متغیر z_j را می‌توان در زمان محاسبه‌ی نقاط چبیشف، به دست آورد. با به کارگیری این متغیر در رابطه‌ی (۱۸) خواهیم داشت:

$$\frac{m_j}{m_{j+1}} = -\frac{z_{j+1}}{z_j} \quad (۲۰)$$

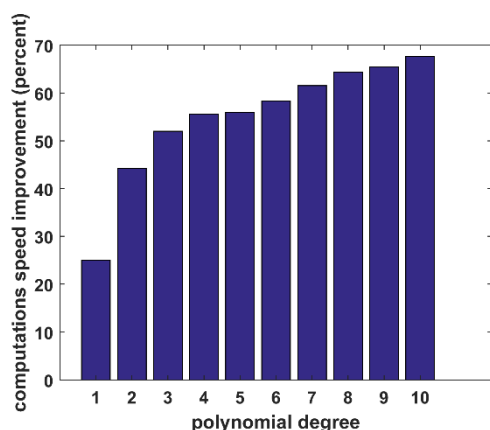
با جایگذاری روابط (۱۱) و (۲۰) در رابطه‌ی (۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{L_{j+1}(x)}{L_j(x)} = -\frac{(x-x_j)z_{j+1}}{(x-x_{j+1})z_j} \quad (۲۱)$$

بنابراین

$$L_{j+1}(x) = -\frac{(x-x_j)z_{j+1}}{(x-x_{j+1})z_j} \times L_j(x) \quad (۲۲)$$

همان‌طور که در جدول (۵) مشاهده می‌شود، استفاده از روش بازگشتی در محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ تا حد قابل‌توجهی موجب افزایش سرعت انجام محاسبات می‌شود. به گونه‌ای که در چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ استفاده از روش بازگشتی موجب کاهش ۲۵ درصدی زمان انجام محاسبات شده‌است. به عبارت دیگر استفاده از این روش در محاسبات سرعت انجام پردازش را تا $\frac{1}{3}$ برابر افزایش داده‌است. این در حالی است که استفاده از الگوریتم ارائه‌شده برای چندجمله‌ای درجه‌ی ۱۰، زمان انجام محاسبات را $\frac{6}{67}$ درصد کاهش داده که این به معنای افزایش ۳ برابری سرعت انجام محاسبات است. برای بررسی رابطه‌ی بین درجه‌ی چندجمله‌ای و میزان تأثیر الگوریتم بازگشتی در افزایش سرعت محاسبات، در شکل (۵) نمودار درصد کاهش زمان انجام پردازش برای درجات مختلف چندجمله‌ای‌ها آورده شده‌است.



شکل ۵- نمودار درصد افزایش سرعت محاسبات با استفاده از روش بازگشتی

در این نمودار نیز مشاهده می‌شود که روش ارائه‌شده برای تمام درجات چندجمله‌ای استفاده‌شده، تأثیر مثبتی در کاهش زمان انجام پردازش دارد. با این وجود این تأثیر با بالا رفتن درجه‌ی چندجمله‌ای، افزایش می‌یابد. به علاوه در روش معمولی محاسبه‌ی ضرایب لاگرانژ، نرخ کاهش سرعت محاسبات با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای به طور متوسط $\frac{1}{17}$ بوده‌است؛ به این معنا که با افزایش یک واحدی درجه‌ی چندجمله‌ای، مدت زمان انجام پردازش ۱۷ درصد افزایش می‌یابد. در حالی که با استفاده از روش بازگشتی نرخ کاهش سرعت ۶ درصد است. با توجه به این مسأله، می‌توان انتظار داشت که با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای، استفاده از روش بازگشتی تأثیر خود را بیشتر نشان دهد.

این دو تساوی رابطه‌ی بین دو جمله‌ی متوالی از چندجمله‌ای‌های پایه‌ی لاگرانژ را نشان می‌دهند. با به کارگیری از این روابط نیازی به محاسبه‌ی تمام همه‌ی جملات با استفاده از رابطه‌ی (۱) نیست. به عبارت دیگر پس از محاسبه‌ی تنها یکی از جملات، سایر جملات به صورت بازگشتی قابل محاسبه هستند. تعداد عمل‌گرها با استفاده از این روش عبارت است از:

$n+1$ - عملگر سینوس برای محاسبه‌ی Z_j به ازای $j = 1, \dots, n+1$
 $2n$ - عمل تفاضل، $(2n-2)$ عمل ضرب و یک عمل تقسیم برای محاسبه‌ی یکی از ضرایب با استفاده از رابطه‌ی (۱)
 $2n$ - عمل تفاضل، $3n$ عمل ضرب و n عمل تقسیم برای محاسبه‌ی سایر جملات توابع پایه به صورت بازگشتی
 بنابراین تعداد کل محاسبات با استفاده از این الگوریتم برابر $11n$ می‌باشد که نسبت به درجه‌ی چندجمله‌ای از درجه‌ی یک است.

۵- بررسی میزان تأثیر روش بازگشتی بر افزایش سرعت محاسبات

برای بررسی میزان تأثیر روش ارائه‌شده بر افزایش سرعت محاسبات، لازم است که توابع پایه‌ی لاگرانژ در یک مسأله‌ی درون‌یابی با استفاده از هر دو روش بازگشتی و معمولی محاسبه‌شده و میزان کاهش زمان انجام محاسبات با استفاده از روش بازگشتی تعیین شود. به همین منظور توابع پایه‌ی لاگرانژ در بازه‌ی $[1, 1000]$ و برای تمام اعداد صحیح موجود در این بازه، با استفاده از نرم‌افزار متلب محاسبه شدند. در این محاسبات از چندجمله‌ای‌های با درجات مختلف از درجه‌ی ۱ تا درجه‌ی ۱۰ استفاده شده‌است. در جدول (۵) درصد افزایش سرعت محاسبات با استفاده از روش بازگشتی نسبت به روش معمولی آورده شده‌است.

جدول ۵- درصد افزایش سرعت محاسبات با استفاده از روش بازگشتی

درجه‌ی چندجمله‌ای	درصد افزایش سرعت محاسبات
۱	۲۵
۲	۴۴/۲
۳	۵۲
۴	۵۵/۵
۵	۵۵/۹
۶	۵۸/۳
۷	۶۱/۵
۸	۶۴/۴
۹	۶۵/۴
۱۰	۶۷/۶

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

یکی از کاربردهای رایج درون‌یابی لاگرانژ، تقریب زدن توابع مختلف با استفاده از چندجمله‌ای‌هاست. در چنین مسائلی اگر از نقاط گرهی هم‌فاصله استفاده شود، دقت درون‌یابی در ابتدا و انتهای بازه‌ی درون‌یابی کاهش می‌یابد. برای غلبه بر این مشکل به جای نقاط گرهی هم‌فاصله، از نقاط گرهی چبیشف برای درون‌یابی استفاده می‌شود. در این صورت استفاده از روش رایج برای محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ، نیازمند محاسباتی است که نسبت به درجه‌ی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی ۲ می‌باشد. در این مقاله یک روش بازگشتی جهت محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ با استفاده از نقاط چبیشف ارائه شد. با استفاده از این روش تعداد محاسبات مورد نیاز برای به‌دست‌آوردن توابع پایه‌ی لاگرانژ، نسبت به درجه‌ی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی یک می‌باشد. در ادامه میزان تأثیر این روش در کاهش زمان انجام محاسبات مورد بحث قرار گرفت. پس از محاسبه‌ی توابع پایه‌ی لاگرانژ برای تمام اعداد صحیح در بازه‌ی

[۱,۱۰۰۰]، مشخص شد که استفاده از روش ارائه‌شده به طور چشمگیری سرعت انجام محاسبات را افزایش می‌دهد؛ البته با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای استفاده‌شده، میزان تأثیر این روش نیز افزایش خواهد یافت. به گونه‌ای که برای چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ سرعت انجام محاسبات ۱/۳ برابر افزایش داشته‌است؛ اما برای چندجمله‌ای درجه‌ی ۱۰ الگوریتم بازگشتی ۳ برابر سریع‌تر از الگوریتم معمولی بوده‌است؛ در ضمن با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای این اختلاف بیشتر خواهد شد. با توجه به آنچه گفته شد، می‌توان نتیجه‌گرفت که استفاده از روش ارائه‌شده به خصوص در مواردی که از چندجمله‌ای‌های با درجات بالا استفاده می‌شود یا در مواردی که محاسبات بدون استفاده از رایانه انجام می‌شود، کاملاً توجیه‌پذیر است.

در پژوهش‌های آینده پیشنهاد می‌شود که وجود الگوریتم‌های مشابه را برای سایر انواع نقاط گرهی مانند نقاط چبیشف نوع دوم، نوع سوم یا چهارم، مورد بررسی قرار بگیرد.

مراجع

- [1] Mateescu, G. D. (2008). "Polynomial interpolation and applications to autoregressive models." *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 9(1), 119-129.
- [2] Rutishauser, H. (2012). "Lectures on numerical mathematics." Springer Science & Business Media.
- [3] Meijering, E. (2002). "A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing. " *Proceedings of the IEEE*, 90(3), 319-342.
- [4] Waring, E. (1779). "VII. problems concerning interpolations. " *Philosophical transactions of the royal society of London*(69), 59-67.
- [5] Jeffreys, H., Jeffreys, B., & Swirles, B. (1999). "Methods of mathematical physics. " Cambridge university press.
- [6] Griffiths, J., & Ray, J. R. (2009). "On the precision and accuracy of IGS orbits. " *Journal of Geodesy*, 83(3-4), 277-287.
- [7] Remondi, B. W., & Rockville, M. (1989). "Extending the National Geodetic Survey standard GPS orbit formats. " National Geodetic Information Branch, NOAA, NOS 133 NGS 46.
- [8] Horemuž, M., & Andersson, J. V. (2006). "Polynomial interpolation of GPS satellite coordinates." *GPS solutions*, 10(1), 67-72.
- [9] Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2004). "Numerical methods using MATLAB. " Pearson prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- [10] Mason, J. C., & Handscomb, D. C. (2002). "Chebyshev polynomials. " CRC press.
- [11] Brisebarre, N., & Joldeş, M. (2010). "Chebyshev interpolation polynomial-based tools for rigorous computing." Paper presented at the Proceedings of the 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation.