

تعیین مدار اولیه ماهواره‌ها مبنی بر مشاهدات اپتیکی تک ایستگاه زمینی با استفاده از برآورد کمترین مربعات کامل پایدار شده به روش تیخونوف

محمد علی شریفی^{۱*}، محمد مهدی کریمی نژاد^۲، علیرضا امیری سیمکویی^۳

^۱ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
sharifi@ut.ac.ir

^۲ کارشناس ارشد ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
m.kariminejad@ut.ac.ir

^۳ استاد گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده مهندسی عمران و حمل و نقل - دانشگاه اصفهان
ar.amirisimkooei@gmail.com

(تاریخ دریافت اردیبهشت ۱۳۹۹، تاریخ تصویب آبان ۱۳۹۹)

چکیده

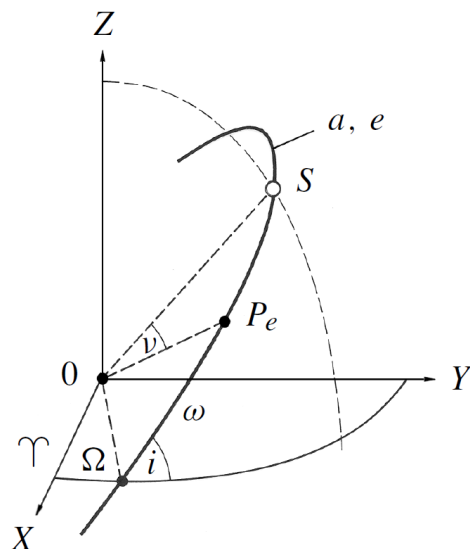
به منظور تعیین مدار اولیه ماهواره، یکی از راهکارها استفاده از مشاهدات اپتیکی ردیابی ماهواره‌ها توسط ایستگاه‌های زمینی می‌باشد که به صورت آزمون، زاویه ارتفاعی و فاصله ماهواره از ایستگاه‌های زمینی ثبت می‌شوند. چالشی که هنگام استفاده از این مشاهدات با آن مواجه هستیم این است که این مشاهدات در زمانی بسیار کوتاه و به صورت کمان کوچکی از مدار بیضی شکل رویت می‌شوند. بنابراین مسئله برازش بیضی مسیر با توجه به کوتاه بودن کمان مشاهدات، دچار بدوضعی بوده و جهت استخراج پارامترهای کپلری مدار نیازمند استفاده از روش پایدارسازی در برآورد بردار مجهولات هستیم. از طرف دیگر مدلی که برای تعیین مدار اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد، فقط شامل المان‌های کپلری بوده و تقریبی از مدل کامل مدار که شامل المان‌های اغتشاشی نیز هست، می‌باشد. به همین علت، برای حل هر چه بهتر این مسئله می‌توانیم آنرا در مدل آماری متغیرهای همراه با خطا در نظر بگیریم و با استفاده از روش کمترین مربعات کامل پایدار شده به حل بردار مجهولات بپردازیم. مزیت استفاده از این روش، بهره‌مندی توأمان از روش‌های پایدارسازی و کمترین مربعات کامل می‌باشد که با توجه به توضیحات فوق، ضرورت هر دو روش در این مسئله اجتناب‌ناپذیر است. از دیگر مزیت‌های این روش نسبت به سایر روش‌های پیشین، می‌توان استفاده از روند سرشکنی و به کارگیری تمامی مشاهدات اولیه را نام برد. روش‌های گذشته بیشتر مبتنی بر استفاده از سه یا چند مشاهده موقعیت ماهواره به صورت محدود بودند، که این مورد موجب کاهش کیفیت جواب حاصل می‌شد. در این مقاله ابتدا به بسط ابعاد ریاضی و کارایی و سرعت این روش اشاره شده و سپس با بررسی چند مسئله تعیین مدار اولیه در حالت‌های مختلف مدار ماهواره‌ها، به ابعاد حل عددی و استخراج پارامترهای کپلری مدار با استفاده از روش مذکور پرداخته می‌شود.

واژگان کلیدی: مسئله تعیین مدار اولیه ماهواره، استخراج پارامترهای کپلری مدار ماهواره، مشاهدات اپتیکی تک ایستگاه زمینی، بدوضعی مسئله تعیین مدار اولیه، پایدارسازی تیخونوف، کمترین مربعات کامل پایدار شده

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

با پیشرفت دانش و تکنولوژی علم مهندسی نقشه برداری و توسعه فناوری‌های فضایی، استفاده از ماهواره‌ها برای کاربردهای مختلف علوم زمین امری اجتناب‌ناپذیر است. ماهواره‌های مختلف برای ماموریت‌های مختلفی چون ثقل‌سنجی، هواشناسی، سنجش از دور، تعیین موقعیت، تصویر برداری و... به فضا پرتاب می‌شوند. دانش ما از مدار این ماهواره‌ها به استفاده هر چه بهتر و دقیق‌تر از محصولات آنها می‌انجامد. گام اول در دانش اطلاعات مداری، تعیین مدار اولیه ماهواره به منظور برقراری ارتباط تله متری با ایستگاه‌های زمینی می‌باشد. این المان‌ها شامل دو المان هندسی نیم قطر طول بیضی مدار^۱ (a) و فشردگی بیضی مدار^۲ (e)، سه المان زاویه‌ای میل صفحه مداری^۳ (i)، بعد نقطه گرهی صعودی^۴ (Ω)، زاویه شناسه حضیض^۵ (ω) و یک المان موقعیت ماهواره در مدار خود که زاویه آنومالی حقیقی^۶ (ν) نام دارد، هستند [۱۰].



شکل ۱- نمودار المان‌های کپلری مدار ماهواره در سیستم مختصات اینرشیال استفاده شده از [۱۰]

با تعیین این پنج المان، شکل و توجیه مدار در سیستم مختصات اینرشیال برای کاربردهای بعدی فراهم می‌گردد. برای تعیین این المان‌ها، در سال ۱۹۷۱ بیت، مولر و وایت، با

استفاده از روشی که گیبس در ترمودینامیک و برای آنالیز بردارها انجام داده بود، توانستند آنرا برای مسئله تعیین المان‌های کپلری مدار توسعه دهند و روش تعیین مدار اولیه‌ای را تحت عنوان روش گیبس ارائه نمایند. فرض اساسی حاکم در این روش، استفاده از سه بردار موقعیت اینرشیال ماهواره در یک صفحه مداری می‌باشد، و با توجه به این بردارها و استفاده از فرمول‌های گیبس به تعیین بردارهای سرعت پرداخته می‌شود. نهایتاً با استفاده از بردارهای موقعیت و سرعت در لحظه وسط، المان‌های کپلری مدار استخراج می‌گردد [۱]. در روشی دیگر، لامبرت با استفاده از دو بردار موقعیت اینرشیال ماهواره و باتوجه به پیش رو^۷ یا پس رو^۸ بودن ماهواره به استخراج بردارهای سرعت پرداخت. و با استفاده از یک بردار موقعیت و یک بردار سرعت به استخراج المان‌های کپلری رسید [۳]. الگوریتم عددی این روش در سال ۱۹۹۶ توسط بوند و آلمن ارائه شد [۲]. همچنین در روش دیگری منسوب به کارل فردریش گاوس، ریاضیدان برجسته آلمانی، با استفاده از سه بردار موقعیت اینرشیال ماهواره در سه زمان مختلف به تعیین مدار اولیه پرداخته شده است [۳]. مشاهدات مورد نیاز در تمامی روش‌های نامبرده شده و روش مورد استفاده در این مقاله، بردارهای موقعیت اینرشیال ماهواره‌ها هستند. اما در عمل این مشاهدات، زاویه افقی (آزیموت)، زاویه ارتفاعی و فاصله ایستگاه‌های گیرنده زمینی تا ماهواره‌ها هستند که توسط ایستگاه گیرنده رصد شده و ثبت می‌شوند. بعد از ثبت، این مشاهدات بایستی به بردارهای موقعیت اینرشیال تبدیل شوند تا بتوان از آنها در جهت استخراج المان‌های کپلری استفاده نمود. بدین منظور، می‌دانیم که سیستم مختصات مشاهداتی ایستگاه‌های گیرنده زمینی، سیستم مختصات نجومی محلی^۹ می‌باشد که باید این مشاهدات به مختصات کارتزین تبدیل شده و بعد از آن، بایستی این سیستم مختصات کارتزین نجومی محلی به سیستم مختصات کارتزین اینرشیال تبدیل بگردد. جزئیات این تبدیل به تفصیل در بخش ۲ توضیح داده خواهد شد. در روش استفاده شده در این مقاله از همه بردارهای موقعیت اینرشیال به جهت دستیابی بهتر به پارامترهای مداری استفاده می‌شود. این مورد سبب افزایش دقت پارامترهای مداری استخراج شده از بردارهای موقعیت اینرشیال

^۷ Prograde

^۸ Retrograde

^۹ Local Astronomy Coordinate System

^۱ Semi-Major Axis

^۲ Numerical Eccentricity

^۳ Orbit Inclination

^۴ Right Ascension of Ascending Node

^۵ Argument of Perigee

^۶ True Anomaly Angle

و فاصله از ایستگاه‌های گیرنده زمینی ثبت می‌شوند. معمولاً مشاهدات، در زمانی بسیار کوتاه از مدار ماهواره در مسیر حرکت خود توسط ایستگاه‌های زمینی رویت می‌شوند. از طرفی دیگر، مشاهدات اولیه که همان آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله تا ماهواره‌ها هستند در سیستم مختصات نجومی محلی قرائت شده و برای این‌که بتوان از این مشاهدات پارامترهای کپلری مدار را استخراج نمود، بایستی آنها را به سیستم مختصات اینرشیال^۴ و نهایتاً سیستم مختصات مداری^۵ انتقال داد. در ادامه، به جزییات مراحل تبدیل مشاهدات تا برآورد مجهولات خواهیم پرداخت.

۲-۱- تبدیل آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله ماهواره به مختصات اینرشیال

مشاهدات ایستگاه زمینی که آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله تا ماهواره هستند را به مختصات کارتزین تبدیل می‌کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{bmatrix} x_{LA} \\ y_{LA} \\ z_{LA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \cos v \cos \alpha \\ D \cos v \sin \alpha \\ D \sin v \end{bmatrix}_{LA} \quad (1)$$

که در آن D ، فاصله ایستگاه گیرنده زمینی تا ماهواره، v ، زاویه ارتفاعی ماهواره و α ، آزیموت ماهواره می‌باشد. سپس، برای انتقال مختصات کارتزین از سیستم نجومی محلی به سیستم مختصات زمین مرکز CT، بایستی مختصات دقیق نجومی ایستگاه زمینی معلوم باشد. رابطه تبدیل به صورت زیر می‌باشد [۶]:

$$\vec{r}_{CT} = \vec{r}_0 + R_3(\pi - \Lambda) \cdot R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \cdot P_2 \cdot \vec{r}_{LA} \quad (2)$$

که در آن $\vec{r}_0$ فاصله ایستگاه از مرکز زمین بوده و ماتریس P_2 ، ماتریس انعکاس برای تبدیل سیستم مختصات دست چپی به سیستم مختصات دست راستی می‌باشد. در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} R_E \cos \Phi \cos \Lambda \\ R_E \cos \Phi \sin \Lambda \\ R_E \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

در رابطه بالا R_E شعاع زمین (که در این‌جا می‌توان از شعاع اوپلری و یا شعاع گاوسی زمین استفاده کرد). می-

می‌گردد. در واقع استفاده حداکثری از مشاهدات و افزایش درجه آزادی دستگاه معادلات، امکان برآورد با کیفیت‌تر مجهولات را به همراه خواهد داشت. از طرفی دیگر، به علت این‌که مدت زمان رصد مشاهدات توسط ایستگاه‌های گیرنده برای ماهواره‌های ارتفاع پایین بسیار کوتاه بوده و در واقع آنها در کمان کوچکی از مدار بیضی شکل خود رویت می‌شوند، برازش بیضی مدار به این مشاهدات کار آسانی نیست، چراکه مسئله از نظر هندسی دچار بدوضعی می‌باشد. بنابراین، برای دستیابی به جواب صحیح نیازمند استفاده از روش‌های پایداری‌سازی در پروسه برآورد پارامترهای مجهول هستیم. به علاوه، مدل ارتباط دهنده میان مشاهدات و مجهولات نیز که همان المان‌های کپلری مدار ماهواره هستند، به علت در نظر نگرفتن مدل کامل مداری (که شامل المان اغتشاشی مدار نیز هست) دچار خطا می‌باشد. پس می‌توان این مسئله را در زمره مسائل با مدل آماری متغیرهای همراه با خطا^۱ در نظر گرفت و برای حل آن از روش کمترین مربعات کامل^۲ بهره جست. در این مقاله از روش کمترین مربعات کامل پایداری‌شده^۳ به روش تیخونوف برای استخراج المان‌های کپلری مدار ماهواره‌ها استفاده شده است. به جهت بررسی هر چه وسیعتر مسئله، مدارها در حالات مختلف بررسی شده‌اند. مدارهای با ارتفاع‌های پایین و متوسط، مدارهای قطبی و غیرقطبی برای این مسئله در نظر گرفته شده‌اند. نتایج حاکی از آن است که این روش برای هر نوع مدار مختلف و هر نوع دستگاه گیرنده کارایی ساده و سرعت را در پی دارد. اما طبیعتاً، با افزایش نویز دستگاه گیرنده و خطای بیشتر مقادیر اولیه از کیفیت آن کاسته می‌شود. در بخش ۲ به بررسی روابط ریاضی مورد استفاده در این مسئله پرداخته شده و در بخش ۳ نیز به بررسی مثال‌های عددی مختلف حل شده با این روش پرداخته می‌گردد و نهایتاً بخش ۴ به دستاوردها و جمع‌بندی در مورد این روش اختصاص دارد.

۲- روش تحقیق

مسئله تعیین مدار اولیه ماهواره به مسئله‌ای گفته می‌شود که هدف آن بدست آوردن المان‌های کپلری مدار ماهواره می‌باشد. در عمل مشاهدات زمینی، رد نورانی و یا رد لیزری ماهواره‌ها هستند که به صورت آزیموت، زاویه ارتفاعی

^۱ Error in Variables (EIV) model

^۲ Total Least Square

^۳ Regularized Total Least Square

^۴ Inertial Coordinate System

^۵ perifocal Coordinate System

با توجه به معادله (۶) داریم:

$$R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$\begin{cases} m_{11} = \cos \Omega \cos \omega - \cos I \sin \Omega \sin \omega \\ m_{21} = -\cos \Omega \sin \omega - \cos I \sin \Omega \cos \omega \\ m_{31} = \sin I \sin \Omega \\ m_{12} = \cos \omega \sin \Omega + \cos I \cos \Omega \sin \omega \\ m_{22} = \cos I \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \\ m_{32} = -\cos \Omega \sin \omega \\ m_{13} = \sin I \sin \omega \\ m_{23} = \cos \omega \sin I \\ m_{33} = \cos I \end{cases} \quad (۹)$$

با توجه به معادلات ۶ تا ۹ و x_p و y_p برابر خواهند بود با:

$$\begin{cases} x_p = m_{11}x_{ECI} + m_{12}y_{ECI} + m_{13}z_{ECI} \\ y_p = m_{21}x_{ECI} + m_{22}y_{ECI} + m_{23}z_{ECI} \\ 0 = m_{31}x_{ECI} + m_{32}y_{ECI} + m_{33}z_{ECI} \end{cases} \quad (۱۰)$$

تعبیر فیزیکی معادله سوم قرار گرفتن بیضی مدار در یک صفحه است، با توجه به این، می‌بایست معادلات ترکیبی زیر را برای برآورد مجهولات در نظر گیریم:

$$\begin{aligned} F_1(X, L) &= \frac{(m_{11}x_{ECI} + m_{12}y_{ECI} + m_{13}z_{ECI})^2}{a^2} \\ &+ \frac{(m_{21}x_{ECI} + m_{22}y_{ECI} + m_{23}z_{ECI})^2}{b^2} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$F_2(X, L) = m_{31}x_{ECI} + m_{32}y_{ECI} + m_{33}z_{ECI} = 0 \quad (۱۲)$$

$$F(X, L) = \begin{cases} F_1(X, L) \\ F_2(X, L) \end{cases} = 0 \quad (۱۳)$$

دستگاه معادلات بالا، یک دستگاه معادلات غیرخطی بوده و می‌بایست مقادیر اولیه برای مجهولات در نظر گرفته شود. در این روش می‌توان از خروجی روش‌های گیس، لامبرت و یا گاوس برای مقادیر اولیه استفاده کرد. به منظور حل دستگاه معادلات ترکیبی حاصل با بسط معادلات به سری تیلور و در نظر گرفتن جملات مرتبه صفر و یک، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(X, L) &= \underbrace{F(X_0, L_0)}_w + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial X}}_{A \big|_{X=X_0, L=L_0}} \underbrace{(X - X_0)}_{\delta x} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial L}}_{B \big|_{X=X_0, L=L_0}} \underbrace{(L - L_0)}_{\delta l} \end{aligned} \quad (۱۴)$$

باشد. سیستم مختصات زمین مرکز CT، سیستم زمین چسب و زمین مرکز بوده که شامل دوران زمین می‌باشد. برای حذف اثر دوران زمین، اثر پرسیشن، اثر نوتیشن و اثر حرکت قطب از سیستم زمین مرکز CT، می‌بایست از تبدیل‌های فرمول ۴ برای انتقال مختصات به سیستم اینرشیال استفاده کنیم [۱۱]:

$$\vec{r}_{ECI} = R_P R_N R_S R_M \vec{r}_{CT} \quad (۴)$$

در این تبدیل، R_P ماتریس پرسیشن، R_N ماتریس نوتیشن، R_S ماتریس دوران زمین و R_M ماتریس حرکت قطبی می‌باشد. به جهت مطالعه بیشتر جزئیات این ماتریس‌ها به [۱۱] صفحات ۱۳ تا ۱۷ رجوع شود.

۲-۲- برآورد همزمان پارامترها

در این مرحله می‌بایست سیستم مختصات اینرشیال به سیستم مختصات مداری تبدیل گردیده و سپس پارامترهای شکل و اندازه مدار (a, e) از این مختصات استخراج گردد. اما به علت این‌که برای تبدیل سیستم مختصات اینرشیال به سیستم مختصات مداری نیازمند المان‌های زاویه‌ای مدار (I, ω, Ω) هستیم، می‌بایست پنج مجهول به صورت همزمان برآورد گردد. برای برآورد همزمان مجهولات از مدل ترکیبی زیر استفاده می‌کنیم.

$$F(X, L) = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ e \\ I \\ \omega \\ \Omega \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x_{ECI_i} \\ y_{ECI_i} \\ z_{ECI_i} \end{bmatrix} \quad (۵)$$

برای تبدیل سیستم مختصات اینرشیال به سیستم مختصات مداری از روابط برداری زیر بهره می‌گیریم [۱۱]:

$$\begin{aligned} \vec{r}_p &= R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega)\vec{r}_{ECI} \\ \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{bmatrix}_p &= R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega) \begin{bmatrix} x_{ECI} \\ y_{ECI} \\ z_{ECI} \end{bmatrix}_{ECI} \end{aligned} \quad (۶)$$

و برای فیت کردن یک بیضی (مدار) به مختصات مداری باید قید زیر را بر مختصات مداری اعمال کنیم:

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1, \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad (۷)$$

۳-۲-۳- اعتبارسنجی جواب‌ها

۳-۲-۱- برآورد ماتریس واریانس-کواریانس مجهولات

در اولین گام و به جهت ارزیابی دقت مجهولات برآورد شده، ماتریس واریانس-کواریانس مجهولات را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور ابتدا می‌بایست ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات یعنی مختصات سیستم اینرشیا محاسبه گردد. چون مشاهدات اولیه ما آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله تا ماهواره می‌باشد و ما در عمل دقت دستگاه طولیاب و زاویه‌یاب اپتیکی را داریم، می‌بایست با استفاده از قانون انتشار خطاهای اتفاقی، دقت مختصات اینرشیا را محاسبه کنیم. برای این منظور، و با فرض در نظرگرفتن دقت مشاهدات طول و زاویه، ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات برابر است با:

$$C_L = \begin{bmatrix} (d_D)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (d_v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (d_a)^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ماتریس کوفاکتور مشاهدات برابر خواهند بود با:

$$Q_L = C_L^{-1} \quad (23)$$

باتوجه به قانون انتشار واریانس غیرخطی و معادله ۱ داریم:

$$Q_{\tilde{r}_{LA}} = G_1^T Q_L G_1 \quad (24)$$

که در رابطه بالا G_1 ماتریس ژاکوبین مختصات کارترین نجومی نسبت به مشاهدات آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله می‌باشد.

$$G_1 = \frac{\partial \tilde{r}_{LA}}{\partial \vec{L}} = \begin{bmatrix} \partial x_{LA}/\partial D & \partial x_{LA}/\partial v & \partial x_{LA}/\partial \alpha \\ \partial y_{LA}/\partial D & \partial y_{LA}/\partial v & \partial y_{LA}/\partial \alpha \\ \partial z_{LA}/\partial D & \partial z_{LA}/\partial v & \partial z_{LA}/\partial \alpha \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos v \cos \alpha & -D \sin v \cos \alpha & -D \cos v \sin \alpha \\ \cos v \sin \alpha & -D \sin v \sin \alpha & D \cos v \cos \alpha \\ \sin v & D \cos v & 0 \end{bmatrix}$$

بعد از به دست آمدن ماتریس $Q_{\tilde{r}_{LA}}$ ، به همین صورت انتشار خطا را ادامه داده تا به $Q_{\tilde{r}_{CT}}$ برسیم. برای این منظور داریم:

$$Q_{\tilde{r}_{CT}} = G_2^T Q_{\tilde{r}_{LA}} G_2 \quad (26)$$

$$F(X, L) = A\delta x + B\delta l + w \quad (15)$$

دستگاه معادلات خطی شده فوق در مدل آماری گاوس-هلمرت بوده و با در نظر گرفتن معادله ۱۶ به مدل آماری متغیرهای همراه با خطا تبدیل می‌گردد. همان‌طور که می‌دانیم این مدل آماری حالت خاصی از مدل آماری گاوس-هلمرت می‌باشد که المان‌های ماتریس طرح نیز به خطای تصادفی آغشته اند [۹].

$$F\left(X, \underbrace{Y - e}_{\mu}\right) = 0, Y = \text{vec}[L, A], e = \text{vec}[e_y, E_A] \quad (16)$$

در معادله بالا، Y بردار مشاهدات جدید، e بردار خطا کامل که شامل e_y خطای مشاهدات و E_A خطای ماتریس طرح می‌باشد. برای پایداری تیکونوف به روش کمترین مربعات کامل باید جوابی را انتخاب کرد که معادله ۱۷ را مینیمم کند.

$$e^T P e + \zeta X^T R X \rightarrow \min \quad (17)$$

در رابطه بالا، P ماتریس وزن، ζ پارامتر پایداری و R ماتریس پایداری می‌باشد. بعد از حل معادلات فوق جواب حاصل از این روش به صورت معادلات ۱۸ تا ۲۱ می‌باشد [۹]:

$$\delta x^{(i+1)} = \left[\zeta R + (A^{(i)})^T [B^{(i)} P^{-1} (B^{(i)})^T]^{-1} A^{(i)} \right]^{-1} \left[(A^{(i)})^T [B^{(i)} P^{-1} (B^{(i)})^T]^{-1} w^{(i)} - \zeta R X_i \right] \quad (18)$$

$$\tilde{e}^{(i+1)} = P^{-1} (B^{(i)})^T [B^{(i)} P^{-1} (B^{(i)})^T]^{-1} (w^{(i)} - A^{(i)} \delta x^{(i+1)}) \quad (19)$$

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + \delta x^{(i+1)}, \hat{\mu}^{(i+1)} = Y - \tilde{e}^{(i+1)} \quad (20)$$

تکرار تا زمانی صورت می‌گیرد تا شرط زیر برقرار گردد:

$$\|\delta x^{(i+1)}\| < \delta, \text{ and } \|\tilde{e}^{(i+1)} - \tilde{e}^{(i)}\| < \epsilon \quad (21)$$

در این مقاله از روش تعیین پارامتر پایداری منحنی L برای استخراج پارامتر ζ استفاده شده و ماتریس پایداری نیز برابر با ماتریس همانی در نظر گرفته شده است.

در رابطه بالا G_2 ماتریس ژاکوبین مختصات CT نسبت مختصات کارتزین نجومی محلی می‌باشد.

$$G_2 = \frac{\partial \vec{r}_{CT}}{\partial \vec{r}_{LA}} \quad (27)$$

و در نهایت ماتریس کوفکتور مختصات اینرشیال برابر خواهد بود با:

$$Q_{\vec{r}_{ECI}} = G_3^T Q_{\vec{r}_{CT}} G_3 \quad (28)$$

در رابطه بالا G_3 ماتریس ژاکوبین مختصات ECI نسبت به مختصات CT می‌باشد.

$$G_3 = \frac{\partial \vec{r}_{ECI}}{\partial \vec{r}_{CT}} \quad (29)$$

ماتریس واریانس-کوارینانس مختصات ECI در پروسه سرشکنی برابر خواهد بود با:

$$C_{ECI} = diag(Q_{\vec{r}_{ECI}}) \quad (30)$$

بنابراین، با توجه به ماتریس واریانس-کوارینانس مختصات ECI، ماتریس واریانس-کوارینانس مجهولات برابر خواهد بود با:

$$C_{\hat{x}} = (A^T (B C_{ECI} B^T)^{-1} A)^{-1} \quad (31)$$

در نهایت با ضرب فاکتور واریانس ثانویه در معادله بالا به برآورد بهتری از دقت مجهولات برآورد شده خواهیم رسید.

$$C_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T (B C_{ECI} B^T)^{-1} A)^{-1} \quad (32)$$

۲-۳-۲- آزمون آماری فاکتور واریانس ثانویه

به منظور ارزیابی و اعتبارسنجی مجهولات برآورد شده از آزمون آماری فاکتور واریانس ثانویه برای هر روش استفاده شده است. می‌دانیم که این روش یکی از روش‌های تست بعد از سرشکنی برای مجهولات برآورد شده است. فرضیه مورد استفاده در این آزمون آماری عبارتست از:

$$\begin{cases} H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \quad (33)$$

آماره این آزمون عبارتست از:

$$f = \frac{df \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad (34)$$

در این آماره df برابر درجه آزادی مسئله بوده و باتوجه به نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات، این آماره از تابع توزیع آماری کای اسکوتر^۱ با درجه آزادی n پیروی می‌کند. قاعده تصمیم در ارزیابی این آزمون آماری به صورت معادله ۳۵ می‌باشد.

$$P(f > \tau_{max} \text{ or } f < \tau_{min} | H_0: \text{True}) = \alpha \quad (35)$$

در رابطه بالا τ_{max} و τ_{min} مقادیر بحرانی بوده و از تابع توزیع کای اسکوتر به صورت معادله ۳۶ محاسبه می‌شوند:

$$\tau_{max} = \chi_{df, 1-\frac{\alpha}{2}}^2, \tau_{min} = \chi_{df, \frac{\alpha}{2}}^2 \quad (36)$$

۳- نتایج عددی

برای نشان دادن کارایی روش مذکور در مدارهایی با هندسه‌های مختلف، روش پیشنهادی برای برآورد المان-های مداری در حالت‌های مختلف مداری مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای روشن‌تر شدن انواع مداراتی که در این آنالیز عددی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، ابتدا تعریف خیلی خلاصه‌ای از تقسیم‌بندی مدارات بر اساس ارتفاع و میل صفحه مداری ارائه می‌شود و سپس آنالیز عددی در هر یک از موارد به تفصیل ارائه خواهد شد.

۳-۱- انواع مدار ماهواره

مدار ماهواره‌ها به روش‌های گوناگونی دسته‌بندی می‌شوند. در این قسمت انواع مدار را از نظر ارتفاع مدار و از نظر زاویه میل صفحه مدار بررسی می‌نماییم.

۳-۱-۱- انواع مدار ماهواره از نظر ارتفاع ماهواره

ماهواره ارتفاع پایین^۲: ماهواره ارتفاع پایین یا LEO، به ماهواره‌ای گفته می‌شود که ارتفاع آن از سطح زمین مابین ۱۶۰ تا ۲۰۰۰ کیلومتر در نوسان بوده و کاربردهای مختلفی همچون ثقل‌سنجی دارند.

ماهواره ارتفاع میانی^۳: ماهواره ارتفاع میانی یا MEO، به ماهواره‌ای گفته می‌شود که ارتفاع آن از سطح زمین مابین ۲۰۰۰ تا ۳۵۷۸۶ کیلومتر (یعنی ارتفاع زمین آهنگ) در نوسان بوده و کاربردهای مختلفی همچون تعیین موقعیت، هواشناسی و سنجش از دور را دارند.

^۱ Chi-square

^۲ Low Earth Orbit

^۳ Medium Earth Orbit

ماهواره زمین آهنگ^۱: این ماهواره‌ها در ارتفاع ۳۵۷۸۶ کیلومتری زمین قرار دارند و با سرعت دوران زمین گردش می‌کنند. بنابراین این ماهواره‌ها همیشه بر روی یک نقطه خاص از زمین حرکت می‌کنند. از کاربردهای این ماهواره‌ها می‌توان بررسی تغییرات اقلیمی و کاربردهای سنجش از دور را نام برد.

ماهواره ارتفاع بالا^۲: ماهواره ارتفاع بالا یا HEO، به ماهواره‌ای گفته می‌شود که ارتفاع آن از سطح زمین بیش از ۳۵۷۸۶ کیلومتر باشد.

۳-۱-۲- انواع مدار ماهواره از نظر اندازه زاویه میل صفحه مدار

ماهواره مدار قطبی^۳: ماهواره مدار قطبی، به ماهواره‌ای گفته می‌شود که زاویه میل صفحه مداری آن در حدود ۹۰ درجه می‌باشد. این گونه ماهواره‌ها حرکتی شمالی-جنوبی داشته و به علت حرکت شرقی-غربی زمین، کل زمین را پوشش می‌دهند. از این ماهواره‌ها برای کاربردهای سنجش از دور، هواشناسی و ثقل سنجی استفاده می‌گردد.

ماهواره مدار غیر قطبی^۴: ماهواره غیر قطبی، به ماهواره‌ای گفته می‌شود که زاویه میل صفحه مداری آن کمتر از ۹۰ درجه باشد. این ماهواره‌ها می‌توانند در رصد یک محدوده خاص مورد استفاده قرار بگیرند [۸].

۳-۲- برآورد عددی چند مدار مختلف

در این قسمت به بررسی عددی چهار نوع مدار مختلف می‌پردازیم، داده‌های مورد استفاده در این قسمت برای ایستگاه فرضی در محدوده تهران شبیه‌سازی شده‌اند. برای اثبات کارایی روش پیشنهادی، تجزیه و تحلیل عددی در چهار حالت مختلف زیر انجام گرفته است:

۱- ماهواره LEO با مدار قطبی

۲- ماهواره LEO با مدار غیرقطبی

۳- ماهواره MEO با مدار قطبی

۴- ماهواره MEO با مدار غیرقطبی

با توجه به این که در هر یک از حالت مختلف بالا، ماهواره در مدت زمان معلومی در بالای افق شهر تهران رویت می‌شود. تعداد نقاط مشاهداتی برای هر یک از حالت‌ها، متناسب با مدت زمان رویت‌پذیری در یک بار عبور ماهواره در دوره تناوب مداری خود می‌باشد. همان‌طور که از مکانیک مداری می‌دانیم، رویت‌پذیری^۵ ماهواره‌ها در بالای خط افق یک محل، تابع المان‌های کپلری مدار و مختصات نجومی آن محل می‌باشد. دوره تناوب ماهواره تابعی از ارتفاع ماهواره در مدار خود بوده و برابر است با:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (37)$$

در ادامه، با داشتن دوره تناوب، المان‌های کپلری ماهواره و مختصات نجومی محل می‌توانیم مدت زمان رویت‌پذیری ماهواره‌ها را بالای افق محل را محاسبه کنیم. در هر یک از حالات زیر این محاسبات انجام گرفته است. با توجه به دوره تناوب ماهواره‌ها، انتظار می‌رود برای ماهواره‌های LEO، ماهواره در حدود چند دقیقه و برای ماهواره‌های MEO ماهواره در حدود چند ساعت نیز در افق محل قابل رویت باشد. همچنین دقت مختصات نجومی ایستگاه زمینی در مرتبه دقیقه بوده که با توجه به قانون انتشار خطا این مقدار برای برآورد باکیفیت مجهولات کافی می‌باشد.

۳-۲-۱- ماهواره LEO با مدار قطبی

مشاهدات از یک ایستگاه فرضی در محدوده تهران با مختصات نجومی زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} \Phi = 35^{\circ}42'00.00'' \\ \Lambda = 51^{\circ}24'00.00'' \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بالا، ماهواره LEO با مدار قطبی با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} a_{sat} = 6628000 \text{ m} \\ e = 0.005 \\ I = 88^{\circ} \\ \Omega = 30^{\circ} \\ \omega = 45^{\circ} \end{cases}$$

دوره تناوب این ماهواره با توجه به رابطه ۳۷ در حدود ۹۰ دقیقه می‌باشد. به علاوه، با توجه به المان‌های کپلری

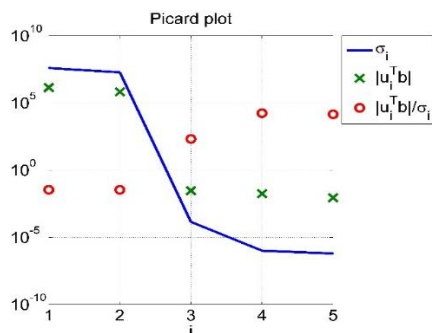
۵ Visibility

۱ Geo-Stationary Orbit

۲ High Earth Orbit

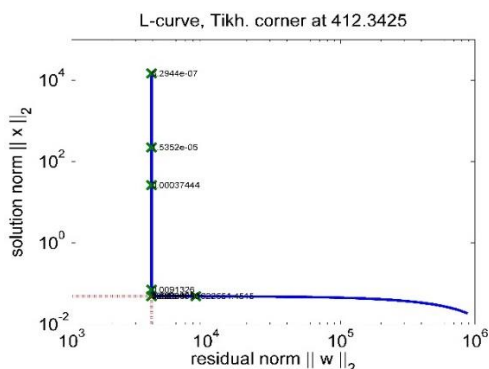
۳ Polar Orbit

۴ Non-Polar Orbit



شکل ۳- نمودار شرط پیکارد گسسته برای ماهواره LEO قطبی استفاده شده از [۴]

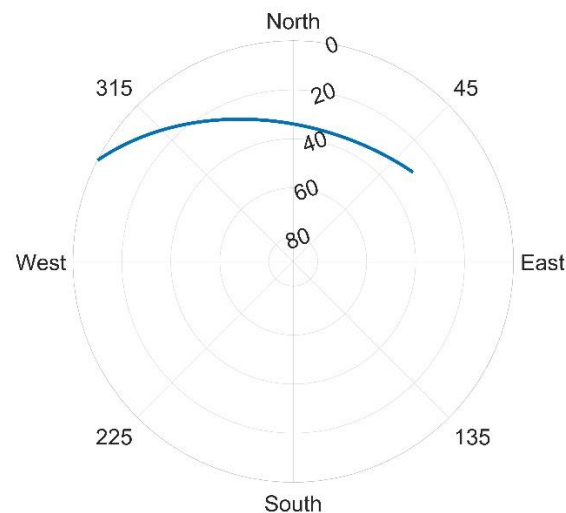
همان‌طور که از نمودار شرط پیکارد بالا پیداست، مقادیر منفرد ماتریس طرح مسئله ناگهان دچار افت شدید عددی می‌شوند و در نتیجه، عدد شرط مسئله که تقسیم بزرگترین مقدار منفرد بر کوچکترین مقدار منفرد است، مقداری بسیار بزرگ می‌گردد. به علاوه، جواب مسئله که ترکیب خطی نقاط قرمز رنگ بوده مقداری بسیار بزرگ شده که می‌بایست با قرار دادن ضرایب فیلتر در بسط جواب، آنها را به جواب درست هدایت کنیم. پارامتر پایداری‌سازی، این مهم را برای مسئله فراهم می‌کند [۵]. در این مقاله از روش منحنی L به جهت استخراج پارامتر پایداری‌سازی حل مسئله استفاده شده است. شکل ۴ نمودار این منحنی را نشان می‌دهد.



شکل ۴- نمودار منحنی L برای استخراج پارامتر پایداری‌سازی در مسئله ماهواره LEO قطبی استفاده شده از [۴]

پارامترهای کپلری برآورد شده در جدول ۱ آورده شده است. اگر می‌خواستیم از روش کمترین مربعات معمولی پایداری‌شده^۲ استفاده کنیم، می‌بایستی از یک پارامتر پایداری‌سازی دیگر استفاده می‌کردیم تا در نهایت به جواب برآورد شده صحیح برسیم. چراکه می‌دانیم پارامتر پایداری‌سازی تابعی از مدل ریاضی در نظر گرفته شده برای مسئله می‌باشد. به علاوه، هنگام استفاده از کمترین

ماهواره و مختصات نجومی شهر تهران، این ماهواره در دوره تناوب خود در حدود ۱۰ تا ۲۰ دقیقه در افق شهر تهران قابل رویت خواهد بود. نمودار آسمان^۱ شبیه‌سازی شده در شکل ۲ رویت این ماهواره در افق محل را نشان می‌دهد.



شکل ۲- نمودار رویت‌پذیری ماهواره LEO قطبی در افق تهران

با توجه به نرخ نمونه برداری ۳۰ ثانیه‌ای دستگاه اندازه‌گیری تعداد ۴۵ نقطه مشاهداتی برای این ماهواره ثبت شده است. بعد از این همان‌طور که در بالا ذکر شد، مشاهدات آزمونوت، زاویه ارتفاعی و فاصله را به مختصات اینرشیال تبدیل کرده و سپس المان‌های کپلری را استخراج می‌کنیم. المان‌های تقریبی در نظر گرفته شده برای حل این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a_0 = 6627000 \text{ m} \\ e_0 = 0.006 \\ I_0 = 90^\circ \\ \Omega_0 = 28^\circ \\ \omega_0 = 47^\circ \end{cases}$$

با توجه به مقادیر اولیه المان‌های مداری و مشاهدات انجام گرفته و بر اساس روابط (۱۸) تا (۲۱) المان‌های کپلری را برآورد نموده و در نهایت مدار را بر اساس آنها بازسازی کردیم. نمودار شرط پیکارد که گویای بدوضعی این مسئله بوده در شکل ۳ رسم شده است. در این نمودار σ_i مقادیر منفرد ماتریس طرح مسئله، u_i بردار منفرد سمت چپ ماتریس طرح مسئله، b بردار مشاهدات مسئله و i شمارنده تعداد مجهولات مسئله می‌باشد.

^۲ Regularized Ordinary Least Square

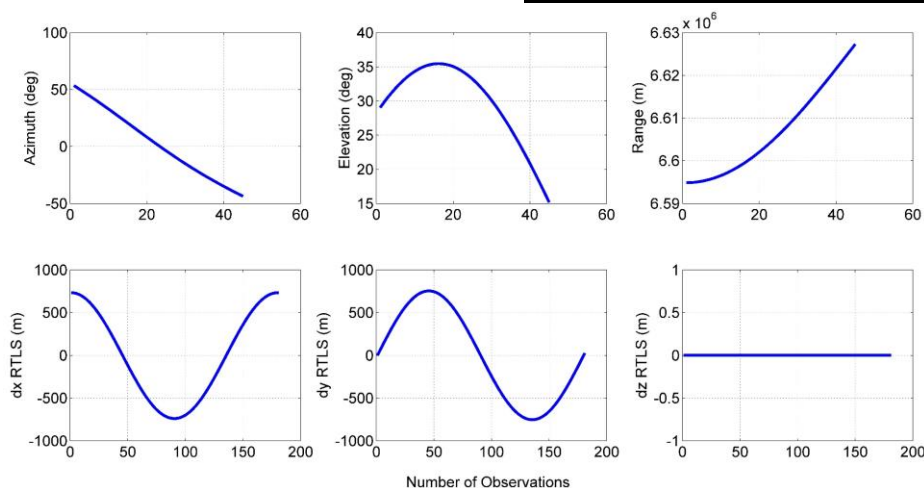
^۱ Sky-Plot

در هنگام پروسه برآورد مجهولات، به علت این که ضریب المان ω در ماتریس طرح مقدار کوچکی می گردد. می بایست برای برآورد هر چه بهتر و حل مشکل عددی آن، ماتریس طرح را در مقدار ثابتی ضرب کنیم (در اینجا عدد $1e6$ استفاده شده است). بعد از استخراج المان های کپلری به بازسازی مدار پرداخته و اختلاف مختصات مداری برآورد شده با مختصات مدار واقعی را محاسبه می کنیم. شکل ۵ اختلاف این مختصات ها به علاوه آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله ماهواره را تا ایستگاه گیرنده در لحظه رصد ایستگاه نشان می دهند.

مربعات معمولی پایدار شده خطای اتفاقی در مدل نیز نادیده گرفته می شود. به علت وجود المان های اغتشاشی در مدل کامل مدار بایستی خطای حذف این المان ها در مدل جدید نیز در نظر گرفته شود، هر چند که ممکن است این خطا بسیار کم باشد. در جدول ۱ جواب هر دو روش ارائه شده است.

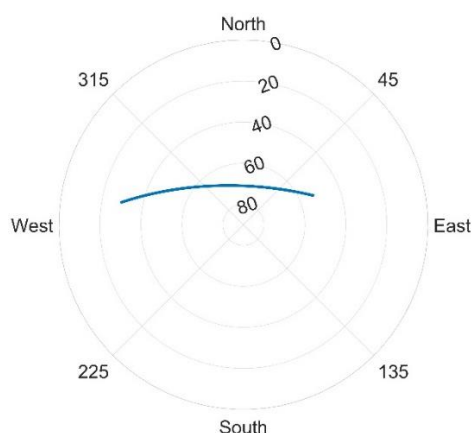
جدول ۱- پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره LEO قطبی

المان های کپلری	مقادیر واقعی	برآورد ROLS	برآورد RTLS
a	۶۶۲۸۰۰۰	۶۶۲۷۲۶۳	۶۶۲۷۲۶۳
e	۰,۰۰۵	۰,۰۰۵۴	۰,۰۰۵۴
I	۸۸	۸۷,۹۹۱	۸۷,۹۹۲
Ω	۳۰	۳۰,۰۰۸	۳۰,۰۰۵
ω	۴۵	۴۴,۹۹۰	۴۴,۹۹۰



شکل ۵- اختلاف مدار واقعی با مدار برآورد شده از پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره LEO قطبی

ماهواره و مختصات نجومی شهر تهران، این ماهواره در دوره تناوب خود در حدود ۱۰ تا ۲۰ دقیقه در افق شهر تهران قابل رویت خواهد بود. نمودار آسمان شبیه سازی شده در شکل ۶ رویت این ماهواره در افق محل را نشان می دهد.



شکل ۶- نمودار رویت پذیری ماهواره LEO غیرقطبی در افق تهران

۳-۲-۲- ماهواره LEO با مدار غیرقطبی

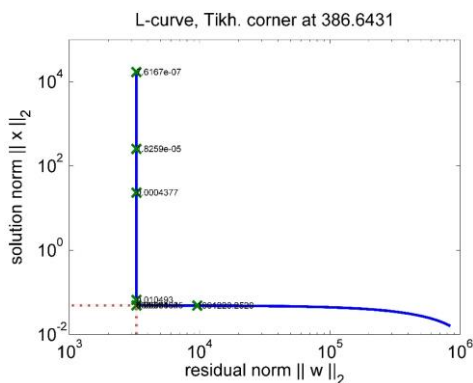
مشاهدات از یک ایستگاه فرضی در محدوده تهران با مختصات نجومی زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} \Phi = 35^{\circ} 42' 00.00'' \\ \Lambda = 51^{\circ} 24' 00.00'' \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بالا، ماهواره ماهواره LEO با مدار غیرقطبی با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} a_{sat} = 6628000 \text{ m} \\ e = 0.005 \\ I = 55^{\circ} \\ \Omega = 220^{\circ} \\ \omega = 30^{\circ} \end{cases}$$

دوره تناوب این ماهواره با توجه به رابطه ۳۷ در حدود ۹۰ دقیقه می باشد. به علاوه، با توجه به المان های کپلری



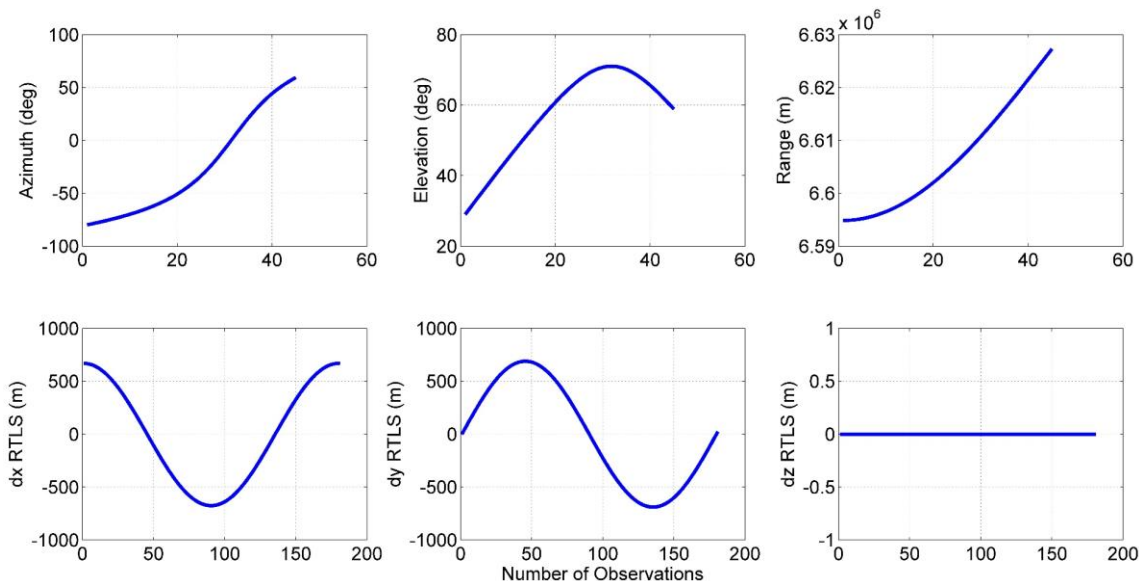
شکل ۸- نمودار منحنی L برای استخراج پارامتر پایداری در مسئله ماهواره LEO غیرقطبی استفاده شده از [۴]

همچون مسئله بالا، پارامترهای کپلری استخراج شده از روش کمترین مربعات معمولی پایداری شده و روش کمترین مربعات کامل پایداری شده به روش تیخونوف در جدول ۲ آورده شده اند.

جدول ۲- پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره LEO غیرقطبی

المان‌های کپلری	مقادیر واقعی	برآورد ROLS	برآورد RTLS
a	۶۶۲۸۰۰۰	۶۶۲۷۳۲۷	۶۶۲۷۳۲۸
e	۰,۰۰۵	۰,۰۰۵۴	۰,۰۰۵۴
I	۵۵	۵۴,۹۸۴	۵۴,۹۸۵
Ω	۲۲۰	۲۲۰,۰۴۵	۲۲۰,۰۲۰
ω	۳۰	۲۹,۹۷۹	۲۹,۹۸۱

بعد از استخراج المان‌های کپلری به بازسازی مدار پرداخته و اختلاف مختصات مداری برآورد شده با مختصات مدار واقعی را محاسبه می‌کنیم. شکل ۹ اختلاف این مختصات‌ها به علاوه آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله ماهواره را تا ایستگاه گیرنده در لحظه رصد ایستگاه نشان می‌دهند.

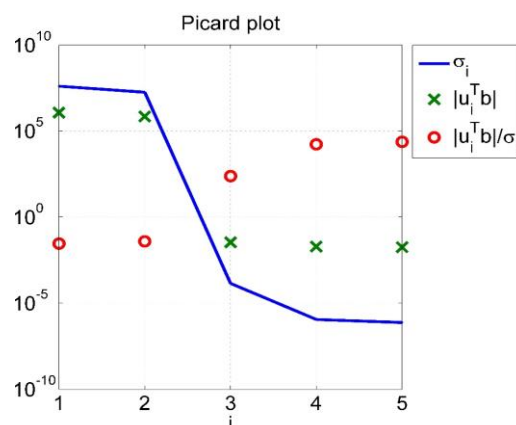


شکل ۹- اختلاف مدار واقعی با مدار برآورد شده از پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره LEO غیرقطبی

با توجه به نرخ نمونه برداری ۳۰ ثانیه‌ای دستگاه اندازه‌گیری تعداد ۴۹ نقطه مشاهداتی برای این ماهواره ثبت شده است. بعد از این همان‌طور که در بالا ذکر شد، مشاهدات آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله را به مختصات اینرشیال تبدیل کرده و سپس المان‌های کپلری را استخراج می‌کنیم. المان‌های تقریبی در نظر گرفته شده برای حل این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a_0 = 6627000 \text{ m} \\ e_0 = 0.0055 \\ I_0 = 57^\circ \\ \Omega_0 = 222^\circ \\ \omega_0 = 31^\circ \end{cases}$$

همچون مسئله بالا، نمودار شرط پیکارد که گویای بدویتی این مسئله بوده در شکل ۷ رسم شده است.



شکل ۷- نمودار شرط پیکارد گسسته برای ماهواره LEO غیرقطبی استفاده شده از [۴]

همچون مسئله فوق، منحنی L به جهت استخراج پارامتر پایداری حل مسئله در شکل ۸ آورده شده است.

۳-۲-۳- ماهواره MEO با مدار قطبی

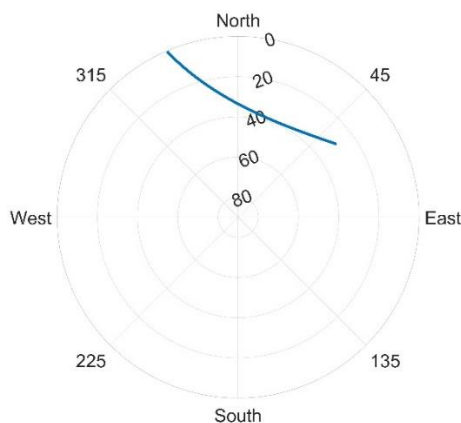
مشاهدات از یک ایستگاه فرضی در محدوده تهران با مختصات نجومی زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} \Phi = 35^{\circ}42'00.00'' \\ \Lambda = 51^{\circ}24'00.00'' \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بالا، ماهواره MEO با مدار قطبی با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} a_{sat} = 26378000 \text{ m} \\ e = 0.005 \\ I = 88^{\circ} \\ \Omega = 30^{\circ} \\ \omega = 45^{\circ} \end{cases}$$

دوره تناوب این ماهواره با توجه به رابطه ۳۷ در حدود ۱۲ ساعت می‌باشد. به علاوه، با توجه به المان‌های کپلری ماهواره و مختصات نجومی شهر تهران، این ماهواره در دوره تناوب خود در حدود ۲ ساعت و ۵۰ دقیقه در افق شهر تهران قابل رویت خواهد بود. نمودار آسمان شبیه‌سازی شده در شکل ۱۰ رویت این ماهواره در افق محل را نشان می‌دهد.

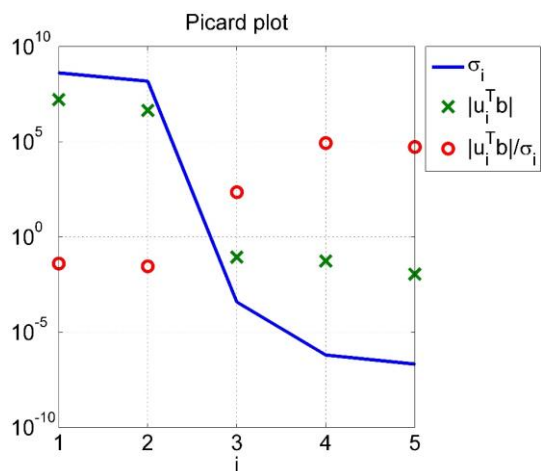


شکل ۱۰- نمودار رویت‌پذیری ماهواره MEO قطبی در افق تهران

با توجه به نرخ نمونه برداری ۳۰ ثانیه‌ای دستگاه اندازه‌گیری تعداد ۳۴۱ نقطه مشاهداتی برای این ماهواره ثبت شده است. بعد از این همان‌طور که در بالا ذکر شد، مشاهدات آزمون، زاویه ارتفاعی و فاصله را به مختصات اینرشیال تبدیل کرده و سپس المان‌های کپلری را استخراج می‌کنیم. المان‌های تقریبی در نظر گرفته شده برای حل این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

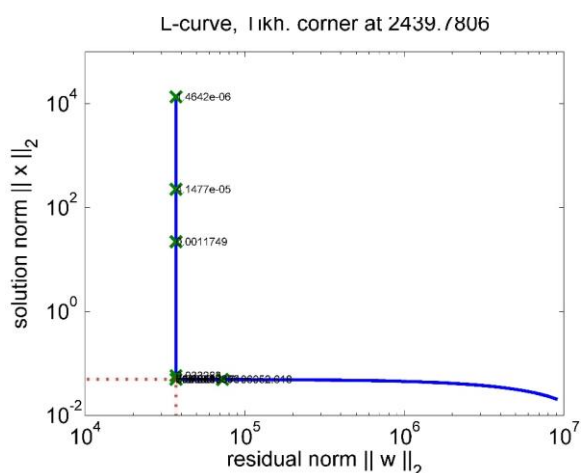
$$\begin{cases} a_0 = 26377000 \text{ m} \\ e_0 = 0.0061 \\ I_0 = 90^{\circ} \\ \Omega_0 = 28^{\circ} \\ \omega_0 = 47^{\circ} \end{cases}$$

همچون مسئله بالا، نمودار شرط پیکارد که گویای بدوضعی این مسئله بوده در شکل ۱۱ رسم شده است.



شکل ۱۱- نمودار شرط پیکارد گسسته برای ماهواره MEO قطبی استفاده شده از [۴]

همچون مسئله فوق، منحنی L به جهت استخراج پارامتر پایداری حل مسئله در شکل ۱۲ آورده شده است.



شکل ۱۲- نمودار منحنی L برای استخراج پارامتر پایداری در مسئله ماهواره MEO قطبی استفاده شده از [۴]

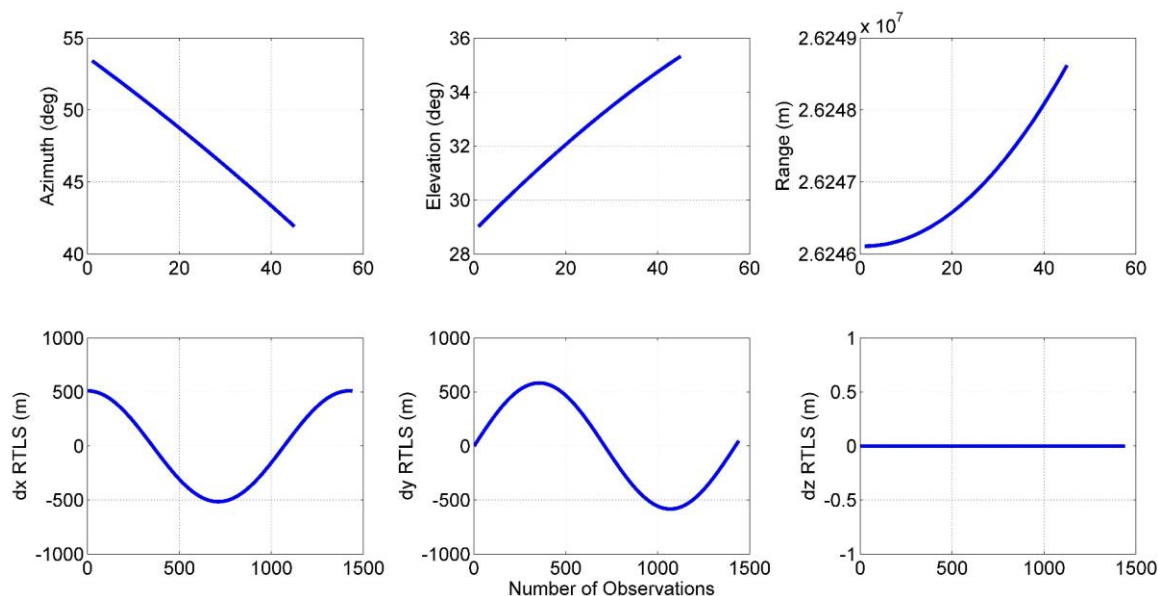
پارامترهای کپلری استخراج شده از روش کمترین مربعات معمولی پایداری شده و روش کمترین مربعات کامل پایداری شده به روش تیخونوف در جدول ۳ آورده شده اند.

جدول ۳- پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره MEO قطبی

المان‌های کپلری	مقادیر واقعی	برآورد ROLS	برآورد RTLS
a	۲۶۳۷۸۰۰۰	۲۶۳۷۷۴۸۷	۲۶۳۷۷۴۸۷
e	۰,۰۰۵	۰,۰۰۵۶	۰,۰۰۵۵
I	۸۸	۸۷,۹۳۶	۸۷,۹۳۸
Ω	۳۰	۲۹,۸۷۶	۲۹,۸۷۷
ω	۴۵	۴۴,۹۲۹	۴۴,۹۳۰

اختلاف این مختصات‌ها به علاوه آزیموت، زاویه ارتفاعی و فاصله ماهواره را تا ایستگاه گیرنده در لحظه رصد ایستگاه نشان می‌دهند.

بعد از استخراج المان‌های کپلری به بازسازی مدار پرداخته و اختلاف مختصات مداری برآورد شده با مختصات مدار واقعی را محاسبه می‌کنیم. شکل ۱۳



شکل ۱۳- اختلاف مدار واقعی با مدار برآورد شده از پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره MEO قطبی

۳-۲-۴- ماهواره MEO با مدار غیرقطبی

مشاهدات از یک ایستگاه فرضی در محدوده تهران با مختصات نجومی زیر در نظر گرفته شده است.

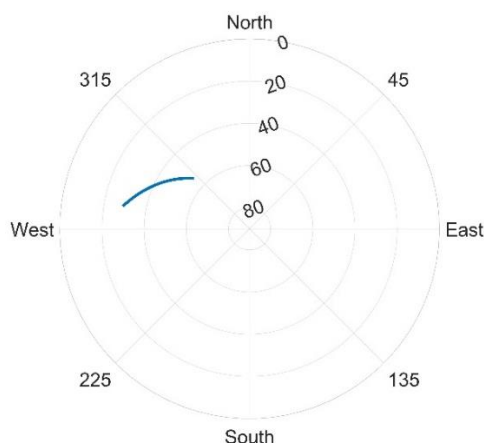
$$\begin{cases} \Phi = 35^{\circ}42'00.00'' \\ \Lambda = 51^{\circ}24'00.00'' \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بالا، ماهواره MEO با مدار قطبی با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است.

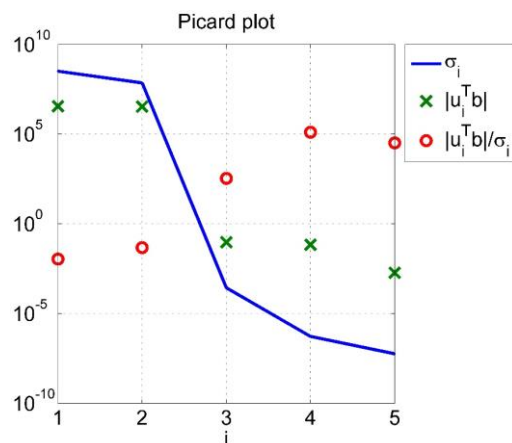
$$\begin{cases} a_{sat} = 26378000 \text{ m} \\ e = 0.005 \\ I = 55^{\circ} \\ \Omega = 220^{\circ} \\ \omega = 30^{\circ} \end{cases}$$

دوره تناوب این ماهواره با توجه به رابطه ۳۷ در حدود ۱۲ ساعت می‌باشد. به علاوه، با توجه به المان‌های کپلری ماهواره و مختصات نجومی شهر تهران، این ماهواره در دوره تناوب خود در حدود ۱ ساعت و ۳۰ دقیقه در افق شهر تهران قابل رویت خواهد بود. نمودار آسمان شبیه-سازی شده در شکل ۱۴ رویت این ماهواره در افق محل را نشان می‌دهد.

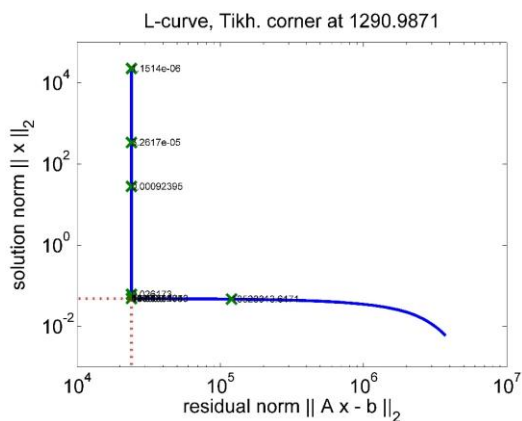
همچون مسائل بالا، نمودار شرط پیکارد که گویای بدویتی این مسئله بوده در شکل ۱۵ رسم شده است.



شکل ۱۴- نمودار رویت‌پذیری ماهواره MEO غیرقطبی در افق تهران



شکل ۱۵- نمودار شرط پیکارد گسسته برای ماهواره MEO غیرقطبی استفاده شده از [۴]



شکل ۱۶- نمودار منحنی L برای استخراج پارامتر پایداری در مسئله ماهواره MEO غیرقطبی استفاده شده از [۴]

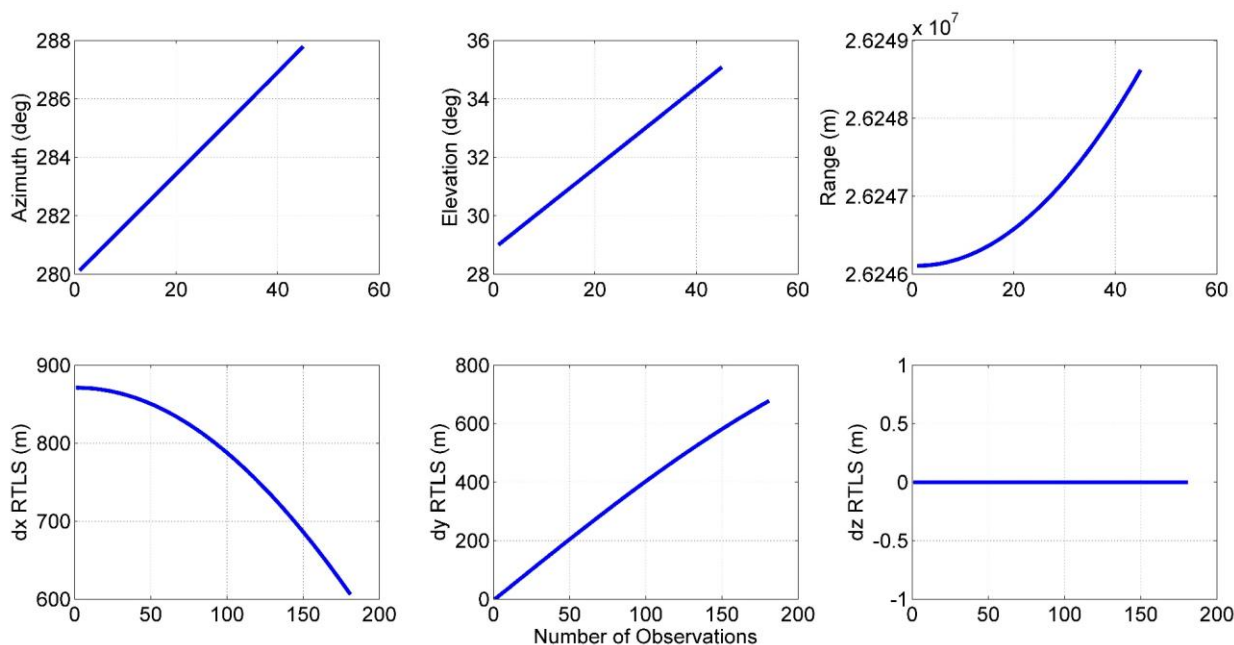
جدول ۴- پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره MEO غیرقطبی

المان‌های کپلری	مقادیر واقعی	برآورد ROLS	برآورد RTLS
a	۲۶۳۷۸۰۰۰	۲۶۳۷۷۱۲۴	۲۶۳۷۷۱۲۴
e	۰,۰۰۵	۰,۰۰۵۶	۰,۰۰۵۵
I	۵۵	۵۵,۰۶۲	۵۵,۰۶۰
Ω	۲۲۰	۲۲۰,۰۶۴	۲۲۰,۰۶۰
ω	۳۰	۲۹,۹۹۹	۲۹,۹۹۹

با توجه به نرخ نمونه برداری ۳۰ ثانیه‌ای دستگاه اندازه‌گیری تعداد ۱۸۱ نقطه مشاهداتی برای این ماهواره ثبت شده است. بعد از این همان‌طور که در بالا ذکر شد، مشاهدات آزمون، زاویه ارتفاعی و فاصله را به مختصات اینرشیال تبدیل کرده و سپس المان‌های کپلری را استخراج می‌کنیم. المان‌های تقریبی در نظر گرفته شده برای حل این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a_0 = 26377000 \text{ m} \\ e_0 = 0.0061 \\ I_0 = 57^\circ \\ \Omega_0 = 222^\circ \\ \omega_0 = 31^\circ \end{cases}$$

همچون مسئله بالا، نمودار شرط پیکارد که گویای بدو وضعی این مسئله بوده در شکل ۱۶ رسم شده است. پارامترهای کپلری استخراج شده از روش کمترین مربعات کامل پایداری شده به روش تیخنوف در جدول ۴ آورده شده اند. بعد از استخراج المان‌های کپلری به بازسازی مدار پرداخته و اختلاف مختصات مداری برآورد شده با مختصات مدار واقعی را محاسبه می‌کنیم. شکل ۱۷ اختلاف این مختصات‌ها به علاوه آزمون، زاویه ارتفاعی و فاصله ماهواره را تا ایستگاه گیرنده در لحظه رصد ایستگاه نشان می‌دهند.



شکل ۱۷- اختلاف مدار واقعی با مدار برآورد شده از پارامترهای کپلری استخراج شده برای ماهواره MEO غیرقطبی

واریانس‌های برآورد شده برای چهار حالت مختلف مدار در جدول ۵ آورده شده اند.

به منظور اعتبارسنجی جواب‌های بدست آمده دقت مجهولات برآورد شده و آزمون فاکتور واریانس ثانویه در حالت‌های مختلف مدار محاسبه شده است.

جدول ۵- انحراف معیار مجهولات برآورد شده در حالات مختلف مدار

المان‌های کپلری	LEO با مدار قطبی	LEO با مدار غیرقطبی	MEO با مدار قطبی	MEO با مدار غیرقطبی
σ_a (km)	0.541	0.415	0.266	0.399
σ_e	8.148e-4	5.773e-4	7.103e-4	6.38e-4
σ_i (sec)	16.954	24.4	101.486	101.409
σ_Ω (sec)	15.616	96.536	192.017	114.216
σ_ω (sec)	30.791	31.836	111.213	2.587

است. و بنابراین باید برای هر مسئله این مقادیر جداگانه محاسبه گردد. جدول ۶ به ترتیب مقادیر درجه آزادی، مقادیر بحرانی کمینه و بیشینه، آماره آزمون و فاکتور واریانس برآوردشده برای هر مسئله را نشان می‌دهد.

باتوجه به این‌که در این مقاله تعداد مشاهدات در هر مسئله متفاوت بوده و تعداد مجهولات برابر با ۵ است، درجه آزادی پروسه سرشکنی و مقادیر بحرانی آماره آزمون در سطح اطمینان ۹۹ درصد برای هر مسئله فوق متفاوت

جدول ۶- درجه آزادی، مقادیر بحرانی، آماره‌های آزمون و فاکتور واریانس ثانویه در چهار حالت مختلف مسئله مدار

درجه آزادی	مقدار بحرانی بیشینه	مقدار بحرانی کمینه	آماره آزمون	فاکتور واریانس ثانویه	نوع مدار
40	63.690	22.164	45.08	1.127	LEO با مدار قطبی
44	68.709	25.148	53.416	1.214	LEO با مدار غیرقطبی
336	399.229	278.649	356.496	1.061	MEO با مدار قطبی
176	222.562	135.313	185.856	1.056	MEO با مدار غیرقطبی

کنیم. این آماره از تابع توزیع تی-استودنت (t-student) پیروی کرده به فرم معادله ۳۸ می‌باشد:

$$t = \frac{|\hat{X} - X_{exact}|}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2}} \quad (38)$$

با توجه به درجه آزادی متفاوت در هر مسئله، مقادیر بحرانی کمینه و بیشینه در هر مسئله مجزا می‌باشد. جدول ۷ مقادیر بحرانی هر مسئله و آماره آزمون هر پارامتر کپلری را نشان می‌دهد.

فاکتور واریانس اولیه برای هر چهار حالت برابر ۱ انتخاب شده است.

به عنوان آخرین ارزیابی نتایج بدست آمده و با توجه به این‌که مقدار واقعی پارامترها در شبیه سازی مسئله معلوم هستند. آماره دیگری را که حاصل تقاضل مقدار واقعی پارامترهای کپلری و مقدار برآوردشده آنها، تقسیم بر انحراف معیار محاسبه شده از آنها است را تعریف می-

جدول ۷- مقادیر بحرانی و آماره آزمون هر پارامتر کپلری برای آزمون تی-استودنت در حالات مختلف مدار ماهواره

آماره ω	آماره Ω	آماره I	آماره e	آماره a	مقدار بحرانی بیشینه	مقدار بحرانی کمینه	نوع مدار
1.169	1.844	1.911	2.037	1.362	2.423	-2.423	LEO با مدار قطبی
2.374	1.678	2.36	1.443	1.621	2.414	-2.414	LEO با مدار غیرقطبی
2.298	2.324	2.27	1.183	1.928	2.337	-2.337	MEO با مدار قطبی
1.391	2.017	2.20	1.063	2.195	2.348	-2.348	MEO با مدار غیرقطبی

و جواب حاصله از اعتبار بیشتری برخوردار خواهد بود. مورد دیگری که در این مقاله به آن پرداخته شده، بررسی خاص این مسئله و انتخاب روشی مناسب برای حل آن است. همان‌طور که در بالا مطرح شد، این مسئله به علت زمان کوتاه مشاهده ماهواره در مدار بیضی شکل خود از نظر هندسی دچار بدوضعی بوده و ماتریس‌های طرح آن دچار همبستگی خطی می‌گردند. به علاوه به علت در نظر گرفتن مدار کپلری و صرف نظر کردن از المان‌های

۴- نتیجه گیری و جمع بندی

به عنوان اولین مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های پیشین می‌توان استفاده حداکثری از مشاهدات اپتیکی مدار را نام برد. استفاده حداکثری از مشاهدات برای استخراج پارامترهای کپلری مدار به جهت فراهم آوردن درجه آزادی، امکان استفاده از روش‌های سرشکنی کمترین مربعات را برای حل دستگاه معادلات فراهم آورده

نظیر قرار گرفتن بردارهای موقعیت اینرشیال در یک صفحه را هم نیاز ندارد. روش ارائه شده کاملاً عملیاتی بوده و از ابتدای مشاهده آزمون، زاویه ارتفاعی و فاصله می‌توان به المان کیلری رسید. مورد دیگر قابل اشاره، استفاده از مقادیر اولیه مناسب برای این مسئله است. همانطور که در بالا بدان اشاره شد روش‌های گیبس، لامبرت و گاوس می‌توانند این مقادیر اولیه را فراهم آورند و هر چه این مقادیر اولیه دقیق‌تر و با کیفیت‌تر باشند می‌توان انتظار بهتری برای جواب برآورد شده از روش مذکور را داشت.

اغتشاشی، مدل مابین مشاهدات و مجهولات دچار نقص و نهایتاً ماتریس طرح مسئله دچار خطا می‌گردد. برای حل مشکلات بالا می‌بایست از روش‌های پایدارسازی و کمترین مربعات کامل برای حل این مسئله بهره بگیریم. در این مقاله این مهم با استفاده از روش پایدارسازی تیخونوف در مدل آماری گاوس-هلمرت صورت پذیرفته است. از دیگر مزیت‌های این روش به کارایی آن برای هر نوع مداری می‌توان اشاره کرد. و همان‌طور که در مثال‌های عددی فصل قبل بحث گردید، این روش می‌تواند از کارایی و دقت خوبی برخوردار باشد. همچنین، الزامات روش‌های گذشته

مراجع

- [1] Bate, Roger R, Donald D Mueller, Jerry E White, and William W Saylor. 2020. Fundamentals of astrodynamics (Courier Dover Publications).
- [2] Bond, Victor R, and Mark C Allman. 1996. Modern Astrodynamics: Fundamentals and perturbation methods (Princeton University Press).
- [3] Curtis, Howard D. 2013. Orbital mechanics for engineering students (Butterworth-Heinemann).
- [4] Hansen, Per Christian. 1994. 'Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems', Numerical algorithms, 6: 1-35.
- [5] Hansen, Per Christian. 2005. Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion (Siam).
- [6] Jekeli, Christopher. 2006. "Geometric reference systems in geodesy." In.
- [7] Leick, Alfred, Lev Rapoport, and Dmitry Tatarnikov. 2015. GPS satellite surveying (John Wiley & Sons).
- [8] Montenbruck, Oliver, Eberhard Gill, and Fh Lutze. 2002. 'Satellite orbits: models, methods, and applications', Appl. Mech. Rev., 55: B27-B28.
- [9] Schaffrin, Burkhard, and Kyle Snow. 2010. 'Total least-squares regularization of Tykhonov type and an ancient racetrack in Corinth', Linear Algebra and its Applications, 432: 2061-76.
- [10] Seeber, Günter. 2008. Satellite geodesy: foundations, methods, and applications (Walter de gruyter).
- [11] Xu, Guochang, and Yan Xu. 2016. GPS: theory, algorithms and applications (Springer).