

پایش مستقل بی‌عیبی مشاهدات کد در تعیین موقعیت ماهواره‌ای با روش کمترین مربعات کامل وزن‌دار

یونس نعیمی^{۱*}، بهزاد وثوقی^۲

^۱ دانشجوی دکتری ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
unaimi@mail.kntu.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
vosoghi@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت آذر ۱۳۹۸، تاریخ تصویب بهمن ۱۳۹۹)

چکیده

پایش مستقل بی‌عیبی گیرنده، می‌تواند با استفاده از اندازه‌گیری‌های اضافی شبه‌فاصله، کار کشف شکست را انجام دهد و برای کاربردهایی نظیر هوانوردی، که سلامت وسیله بسیار مهم است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. روش‌های متداول بر پایه کمترین مربعات معمولی استوار است که تنها بردار مشاهدات شبه‌فاصله را خطادار فرض می‌کند، اما در واقعیت ماتریس مدل نیز شامل خطا می‌باشد؛ بنابراین ضرورت استفاده از روش کمترین مربعات کلی وزن‌دار، که می‌تواند برای ماتریس مدل نیز خطا در نظر بگیرد، مشهود می‌شود. روش‌های موجود برای حل کمترین مربعات کامل، بر پایه استفاده از تجزیه به مقادیر سینگولار استوار است که دارای حجم محاسبات بالایی می‌باشد. از طرف دیگر، سایر روش‌های ارائه شده، که از تجزیه به مقادیر سینگولار استفاده نمی‌کنند، نیازمند استفاده از ماتریس-های بزرگ بوده و نیز لازم است تا در ماتریس کوواریانس مربوط به ماتریس ساختار، متناظر با ستون‌های بدون خطا، صفر قرار داده شود که بنوبه خود باعث افزایش ابعاد ماتریس و در نتیجه افزایش حجم محاسبات خواهد شد. اما در روش پیشنهادی حل مساله بدون نیاز به تجزیه به مقادیر سینگولار، بدون معرفی ضرایب لاگرانژ، اجتناب از معرفی بدون خطا بودن برخی ستون‌های ماتریس ضرایب با وارد کردن صفر در ماتریس کوواریانس مربوط به ماتریس ساختار و تنها با معادلات ساده و نیز بر پایه اصول علامت جمع انجام می‌شود که باعث حجم بسیار کم محاسبات و سرعت بالا خواهد بود. از آنجاییکه در الگوریتم پایش مستقل بی‌عیبی مشاهدات GPS برای کشف ماهواره‌های شکست، مخصوصاً در صورت وجود چند شکست، می‌تواند تکرارهای زیادی وجود داشته باشد، این نیاز به سادگی حل و سرعت بالا حیاتی خواهد بود.

سپس روش بهینه‌ای برای وزن‌دهی به ماتریس ساختار ارائه می‌گردد که می‌تواند جواب بسیار بهتری از مجهولات را در حضور شکست‌های زیاد برآورد نماید که بنوبه خود می‌تواند بردار باقیمانده‌ها را طوری برآورد کند که مشاهدات شکست دارای قدرمطلق عدد بزرگتری نسبت به سایرین شده و امکان کشف آنها با هر روش دیگر مانند استفاده از تخمین نااریب یا روش باردا را مطمئن‌تر و امکان-پذیرتر سازد. نتایج بدست آمده موفقیت روش پیشنهادی در تعیین موقعیت صحیح و کشف ماهواره‌های شکست، حتی با وجود چند شکست همزمان، را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: کمترین مربعات کامل وزن‌دار، پایش بی‌عیبی مشاهدات، کشف شکست، وزن‌های بهینه، تعیین موقعیت ماهواره‌ای

۱- مقدمه

پایش مستقل بی‌عیبی گیرنده^۱، تکنولوژی است که برای بررسی یکپارچگی سیگنال‌های سیستم تعیین موقعیت جهانی (GPS) در گیرنده ایجاد می‌شود و می‌تواند با استفاده از اندازه‌گیری‌های اضافی^۲ شبه‌فاصله، به کشف شکست (ماهواره‌ای که شبه‌فاصله حاصل از آن دارای خطای زیادی است) بپردازد. یعنی، زمانی که ماهواره‌هایی بیشتر از حد نیاز برای ثابت کردن مختصات داریم، شبه-فاصله‌های اضافی باید با موقعیت محاسبه شده همگون باشد. شبه‌فاصله‌ای که از مقدار مورد انتظار انحراف ملموسی داشته باشد نشان دهنده شکست ماهواره متناظر با آن می‌باشد.

روش‌های RAIM متداول از کمترین مربعات معمولی^۳ استفاده می‌کنند که فقط برای بردار مشاهدات شبه‌فاصله خطا در نظر گرفته و از طریق حل آن به موقعیت و بردار باقیمانده می‌رسند و سپس از طریق همین بردار باقیمانده به کشف شکست می‌پردازند. اما در واقعیت ماتریس مدل نیز خطا دار می‌باشد؛ چرا که حاوی اطلاعات موقعیت ماهواره ارسال شده می‌باشد و طبیعتاً دارای خطا می‌باشد. بنابراین ضرورت استفاده از روش کمترین مربعات کلی وزن دار، که می‌تواند برای ماتریس مدل نیز خطا در نظر بگیرد، مشهود می‌شود.

از زمان معرفی روش کمترین مربعات کامل^۴ توسط [۱] که می‌تواند خطاها را هم برای بردار مشاهدات و هم برای ماتریس ساختار در نظر بگیرد، کارهای زیادی در راستای توسعه کاربردهای آن انجام گرفته است، مانند رگرسیون خط [۲، ۳]، کاربردهای دورکاوی [۴]، انتقال مختصات و کاربردهای ژئودزی از نظر تئوری نیز الگوریتم‌های مختلفی برای حل بدون وزن [۵]، همراه با بایسته [۶] و وزن دار [۷، ۸] ارائه شده است که برپایه استفاده از تجزیه به مقادیر سینگولار^۵ یا تابع لاگرانژ غیرخطی [۹، ۱۰] استوار است.

روش دیگر [۱۱] که برای حل کمترین مربعات وزن-دار^۶ ارائه شده است می‌تواند بدون محدودیت در ماتریس

وزن مشاهدات (وجود وابستگی بین مشاهدات) و بدون استفاده از ضرایب لاگرانژ مساله را حل نماید؛ که به همراه داشتن مزایایی از قبیل سادگی و همگرایی خوب، این ایراد را دارد که باید در ماتریس کوواریانس مربوط به ماتریس ساختار، متناظر با درایه‌های بدون خطای ماتریس ساختار، صفر قرار داد که باعث بزرگ شدن ابعاد ماتریس‌ها و افزایش حجم محاسبات می‌گردد.

در [۵] توضیحات کلی از تمام الگوریتم‌های حل کمترین مربعات کامل و بخصوص در حالتی که مدل غیرخطی باشد، ارائه شده است که با داشتن مزیت نبود محدودیت در مستقل یا وابسته بودن مشاهدات، همچنان از محاسبات ماتریسی استفاده کرده و برای هماهنگی حل مساله ابعاد ماتریس‌ها را بزرگ کرده و باعث افزایش حجم محاسبات می‌گردد.

از اواسط سال ۱۹۸۰، پایش مستقل بی‌عیبی مشاهدات مورد توجه زیادی قرار گرفته است. الگوریتم‌های پایش بی‌عیبی (که فقط یک شکست^۷ را در نظر می‌گیرند) بر اساس تشکیل زیرمجموعه‌های $n-1$ تایی از n مشاهده شبه‌فاصله با حذف نوبتی هر مشاهده و حل آن و سپس مقایسه جواب حاصل به کشف شکست می‌پردازد.

استفاده از روش کمترین مربعات کامل در پایش مستقل بی‌عیبی توسط [۱۲] انجام گرفت که توانست معیارهای جدیدی را بر اساس تجزیه به مقادیر سینگولار معرفی نماید. در ادامه یک الگوریتم جایگزینی توسط [۱۳، ۱۴]، برای اجتناب از حل دوباره هر زیرمجموعه و تنها با تغییر نتایج بدست آمده از حل زیرمجموعه قبلی، معرفی گردید که مزیت کاستن از حجم محاسبات و نیز کاربرد آن برای وجود یک یا دو شکست را داشت.

استفاده از تخمین ناریب^۸ توسط [۱۵] معرفی شد و برای انجام پایش مستقل بی‌عیبی در صورت وجود بیش از یک شکست مناسب می‌باشد که بر اساس معرفی وزن‌های مشاهدات با توجه به بردار باقیمانده‌ها عمل می‌کند.

در این مقاله با فرض اساسی قطری بودن ماتریس وزن مشاهدات (که در اکثر کاربردها مخصوصاً در ژئودزی اینگونه است)، به ساده‌سازی و اثبات مجدد روابط مورد نیاز روش کمترین مربعات کامل وزن دار بر پایه استفاده از

^۱ Receiver Autonomous Integrity Monitoring (RAIM)

^۲ Redundancy

^۳ Ordinary Least Squares

^۴ Total Least squares (TLS)

^۵ Singular Value Decomposition (SVD)

^۶ Weighted Total Least squares (WTLS)

^۷ Failure

^۸ Robust Estimation

بدون خطای ماتریس ساختار یک اسکالر است، با در نظر گرفتن n تعداد معادلات و u تعداد مجهولاتی که ستون‌های ماتریس ساختار متناظر آنها خطادار در نظر می‌شود، مدل مشاهدات بصورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$(\mathbf{H} + \mathbf{G})^T \mathbf{r} + \delta - \mathbf{q} - \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (۱)$$

که $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ خطاهای تصادفی مشاهدات، $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ بردار مشاهدات، $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{u \times 1}$ بردار مجهولات بوده و $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{u \times n}$ ماتریس ساختار و $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{u \times n}$ ماتریس خطای تصادفی بصورت زیر فرض می‌شود:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1u} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2u} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{i1} & h_{i2} & \dots & h_{iu} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nu} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (۲)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{h}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{h}_n^T]$$

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1u} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2u} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{iu} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nu} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (۳)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1^T \quad \mathbf{g}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{g}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{g}_n^T]$$

با تعریف بردار مشاهدات صحیح $\bar{\mathbf{q}} = E(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{r} + \delta$ و ماتریس ساختار صحیح $\bar{\mathbf{H}} = E(\mathbf{H}) = \mathbf{H} + \mathbf{G}$ می‌توان رابطه (۱) را بصورت زیر نوشت:

$$\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{r} + \delta - \mathbf{q} - \mathbf{e} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \quad (۴)$$

توجه نمایید که، چون در ادامه از این اثبات به منظور حل معادلات شبه‌فاصله GPS استفاده خواهد شد، کمیت δ یک اسکالر (بمنزله خطای دریافت ساعت گیرنده) فرض می‌شود.

مدل را با در نظر گرفتن آن برای هر مشاهده i و مشابه تعاریف قبل، می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} (\mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i)^T \mathbf{r} + \delta - q_i - e_i = 0 \Rightarrow \\ \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \delta - q_i - e_i = 0 \Rightarrow e_i = \bar{q}_i - q_i \\ ; \bar{\mathbf{h}}_i = \mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i, \bar{q}_i = \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \delta \end{cases} \quad (۵)$$

خواص علامت جمع پرداخته می‌شود که می‌تواند به طرز شگفت‌آوری محاسبات ماتریسی را کم نموده و آنها را با علامت جمع جایگزین نماید و با این کار نیاز به وارد کردن صفر برای درایه‌های ثابت در ماتریس کوواریانس مربوط به ماتریس ساختار را مرتفع ساخته و باعث افزایش سرعت محاسبات و همگرایی نیز گردد. ضمناً بدون تغییر در اساس حل، می‌تواند مدل غیر خطی را نیز حل نماید. با ساده‌تر و سریع‌تر شدن حل مساله، می‌توان به انجام الگوریتم‌های پایش بی‌عیبی پرداخت که آنچه بیشتر مورد نظر این مقاله است، استفاده از ماتریس وزن بهینه برای ماتریس ساختار است که بتواند با وجود چند شکست، جواب صحیح‌تری از موقعیت گیرنده ارائه کرده و باعث شود باقیمانده‌های متناظر با ماهواره‌های شکست بزرگتر و سالم کوچکتر گردد. اینکار باعث می‌گردد تا الگوریتم‌های پایش بی‌عیبی بسیار ساده‌تر شده و عملاً روش‌های استفاده از تشکیل زیرمجموعه‌های انتخابی از مشاهدات و حل آنها کنار گذاشته شود.

با توجه به روابط مورد نیاز برای حالتی که در آن پارامتر متناظر با ستون‌های بدون خطای ماتریس ساختار اسکالر باشد، در بخش اول به اثبات روابط حل کمترین مربعات کامل آن پرداخته و در انتهای آن بخش، برای سادگی، یک الگوریتم ارائه می‌گردد. در بخش دوم به بیان معادلات شبه فاصله برای تعیین موقعیت گیرنده پرداخته و مدل آن را براساس مدل اثبات شده خود درآورده و با تعمیم الگوریتم حالت خطی به حالت غیرخطی، برای این حالت خاص الگوریتم دیگری بیان می‌گردد. در بخش سوم یک روش برای وزن بهینه ماتریس ساختار، که می‌تواند کار کشف ماهواره‌های شکست با هر تعداد را مطمئن‌تر، سریع‌تر و ساده‌تر انجام دهد، ارائه کرده و در بخش چهارم نتایج عددی بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده که با سه روش سرشکنی کمترین مربعات معمولی، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات پیشنه‌ای حل شده‌اند، آورده می‌شود. در نهایت در بخش پنجم به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲- حل کمترین مربعات کامل وزن دار خطی

در این حالت که ماتریس ساختار برای هر مشاهده یک بردار با بعد u بوده و پارامتر متناظر با ستون‌های

مشابه حالت قبل، اگر در هر مرحله تکرار، مقدار $q_{n_i} = q_i + \mathbf{g}_i^T \mathbf{r}$ را دوباره محاسبه نماییم، می‌توانیم رابطه (۲۴) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \delta = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} q_{n_i} \quad (25)$$

حال برای تعیین همزمان دو مجهول اسکالر δ و بردار $\mathbf{r}$ ، می‌توان یک دستگاه دو معادله و دو مجهول با روابط (۲۲) و (۲۵) تشکیل داده و آن را حل نمود:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{f}; \quad \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n q_{n_i} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i \\ \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix} \quad (26)$$

حال به محاسبه فاکتوروارینانس ثانویه می‌پردازیم: در سرشکنی کمترین مربعات معمول فاکتوروارینانس ثانویه از رابطه $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{w}_e \hat{\mathbf{e}}}{d_f}$ برآورد می‌گردد، بنابراین برای کمترین مربعات کامل TLS نیز می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد [۱۷]:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{w}_{e_i} \hat{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{g}}_i^T \mathbf{w}_{g_i} \hat{\mathbf{g}}_i}{d_f} \quad (27)$$

که در آن d_f درجه آزادی می‌باشد و از رابطه $d_f = rk([\mathbf{Q}_e]) - rk(\mathbf{H}) = n - u - 1$ بدست می‌آید. از جایگذاری روابط (۱۵)، (۱۶) و (۱۹) در (۲۷) و ساده‌سازی داریم:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [\hat{\lambda}_i (q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta)]}{d_f} \quad (28)$$

و در نهایت برای محاسبه ماتریس واریانس کوواریانس جواب کمترین مربعات کامل بطریق زیر و از قانون انتشار خطاها، ابتدا ماتریس واریانس کوواریانس $\mathbf{Q}_{q_{n_i}}$ را با توجه به رابطه $q_{n_i} = q_i + \mathbf{r}^T \mathbf{g}_i$ محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{Q}_{q_{n_i}} \square \mathbf{Q}_{q_i} + \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{r} \square \mathbf{Q}_{en_i} \Rightarrow \mathbf{Q}_{q_{n_i}} \square \mathbf{Q}_{en_i} \quad (29)$$

با جایگذاری $\mathbf{g}_i$ از رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵) و فاکتورگیری از $(q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta)$ داریم:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = -(1 - \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{r} \mathbf{Q}_{en_i}^{-1})(q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta) \quad (17)$$

با استفاده از رابطه (۱۴) داریم:

$$\mathbf{Q}_{en_i} - \mathbf{Q}_{e_i} = \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{r} \quad (18)$$

با جایگذاری از آن در رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_i &= -[1 - (\mathbf{Q}_{en_i} - \mathbf{Q}_{e_i}) \mathbf{Q}_{en_i}^{-1}](q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta) \\ &= -\mathbf{Q}_{e_i} \mathbf{Q}_{en_i}^{-1} (q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta) \end{aligned} \quad (19)$$

از طرف دیگر با در نظر گرفتن $\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{q}_i - q_i \Rightarrow q_i = \hat{q}_i - \hat{\mathbf{e}}_i$ داریم:

$$\begin{aligned} q_i &= \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \delta - \hat{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \delta \\ &\quad + \mathbf{Q}_{e_i} \mathbf{Q}_{en_i}^{-1} (q_i - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r} - \delta) \\ &= \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \delta + \mathbf{w}_{e_i}^{-1} \mathbf{w}_{en_i} (q_i - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r} - \delta) \end{aligned} \quad (20)$$

اگر این رابطه را در رابطه (۱۰) قرار داده و $\mathbf{h}_i = \bar{\mathbf{h}}_i - \mathbf{g}_i$ را جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \delta = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} (q_i + \mathbf{g}_i^T \mathbf{r}) \quad (21)$$

اگر در هر مرحله تکرار، مقدار $q_{n_i} = q_i + \mathbf{g}_i^T \mathbf{r}$ را دوباره محاسبه نماییم، می‌توانیم این رابطه را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \delta = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} q_{n_i} \quad (22)$$

مشابه حالت قبل، اگر این رابطه را در رابطه (۹) قرار داده و $\mathbf{h}_i = \bar{\mathbf{h}}_i - \mathbf{g}_i$ را جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$(\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{e_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} (-\bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + q_i - \delta + \mathbf{g}_i^T \mathbf{r}) \right] = \mathbf{0} \quad (23)$$

چون ماتریس غیر صفر $(\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{e_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T)^{-1}$ دارای رنک کامل سه می‌باشد، می‌توان آن را از معادله (۲۳) کنار گذاشت:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{r} + \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \delta = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} (q_i + \mathbf{g}_i^T \mathbf{r}) \quad (24)$$

حال با توجه به جواب کمترین مربعات کامل بدست آمده در رابطه (۲۶) می‌توان ماتریس واریانس کوواریانس مجهولات برآوردشده را نیز محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_f &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{en} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix} \mathbf{N} \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q}_f (\mathbf{N}^{-1})^T = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \end{aligned} \quad (30)$$

می‌توان نشان داد که ماتریس بدست آمده $\mathbf{Q}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}}$ از رابطه زیر نیز قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}} &= \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}} \\ \mathbf{ones}(1, n) \end{bmatrix} \mathbf{w}_{en} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}^T & \mathbf{ones}(n, 1) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_{en} \bar{\mathbf{A}})^{-1}; \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}^T & \mathbf{ones}(n, 1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

که $\mathbf{ones}(1, n)$ یک بردار با n درایه برابر ۱ است. نکته مهم در رابطه (۳۱) آنست که چون در محاسبه ماتریس $\mathbf{Q}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}}$ از مقادیر تقریبی بدست آمده برای مجهولات و نیز $\bar{\mathbf{h}}$ استفاده می‌شود، بدلیل ماهیت تکراری روش کمترین مربعات کامل، تساوی برقرار نبوده و به این دلیل از علامت تقریب استفاده شده است. حال می‌توان فاکتوروارینانس ثانویه برآورد شده را نیز به آن ضرب کرد تا ماتریس واریانس کوواریانس جواب کمترین مربعات کامل برآوردشده بدست آید:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}} \quad (32)$$

مشابه حالت قبل، برای محاسبه ماتریس واریانس-کوواریانس بردار باقیمانده‌های برآورد شده کمترین مربعات کامل بطریق زیر و از قانون انتشار خطاها داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\epsilon}} &= \mathbf{Q}_{en} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}} \\ \mathbf{ones}(1, n) \end{bmatrix} \mathbf{N}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}^T & \mathbf{ones}(n, 1) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{en} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{N}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T; \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}^T & \mathbf{ones}(n, 1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

بطور خلاصه الگوریتم زیر را برای حل کمترین مربعات کامل وزن دار خطی می‌توان ارائه داد:

الگوریتم ۱:

ورودی‌های مساله عبارتند از:

ماتریس ساختار $\mathbf{H}^T \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ، بردار مشاهدات $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ، ماتریس قطری وزن مشاهدات $\mathbf{w}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و ماتریس قطری وزن ماتریس ساختار $\mathbf{w}_g \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$.
با فرض $i \in \mathbb{R}, i=1:n$ ، به عنوان شماره هر مشاهده و $j \in \mathbb{R}, j=1:n$ به عنوان شماره هر تکرار، داریم:

۱. برآورد مقادیر تقریبی جوابهای $\mathbf{r}_0$ و δ_0 از روش کمترین مربعات معمولی با رابطه زیر:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \delta_0 \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_i \mathbf{w}_{e_i} \mathbf{h}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{e_i} \mathbf{h}_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{e_i} \mathbf{h}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{e_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{w}_{e_i} \mathbf{h}_i \\ \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{w}_{e_i} \end{bmatrix}$$

۲. محاسبه $\mathbf{Q}_{en_i}^{(j)} = \mathbf{Q}_{e_i} + \mathbf{r}_{(j)}^T \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{r}_{(j)}$.

۳. محاسبه

$$\mathbf{g}_i^{(j)} = \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{r}_{(j)} (\mathbf{Q}_{en_i}^{(j)})^{-1} [q_i - \delta_{(j)} - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}_{(j)}]$$

۴. محاسبه $\bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} = \mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i^{(j)}$.

$$q_{n_i}^{(j)} = q_i + (\mathbf{g}_i^{(j)})^T \mathbf{r}_{(j)}$$

۵. محاسبه

۶. محاسبه مجهولات از رابطه زیر

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^{(j+1)} \\ \delta^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} (\mathbf{h}_i^{(j)})^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} (\mathbf{h}_i^{(j)})^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} q_{n_i}^{(j)} \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} q_{n_i}^{(j)} \end{bmatrix}$$

۷. تکرار مراحل ۲ الی ۶ تا رسیدن به شرط پایان حلقه که می‌تواند بصورت زیر تعریف شود:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{(j+1)} \\ \delta^{(j+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{(j)} \\ \delta^{(j)} \end{bmatrix} \right\| < \varepsilon \quad (\text{e.g. } \varepsilon = 10^{-12})$$

$$8. \hat{\lambda}_i = \mathbf{Q}_{en_i}^{-1} [q_i - \delta - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}] \quad \text{محاسبه}$$

$$9. \hat{\epsilon}_i = -\mathbf{Q}_{e_i} \mathbf{Q}_{en_i}^{-1} (q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta) = -\mathbf{Q}_{e_i} \hat{\lambda}_i \quad \text{محاسبه}$$

۱۰. محاسبه

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n [\hat{\lambda}_i (q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta)]}{n - u} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^T \mathbf{w}_{e_i} \hat{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{g}}_i^T \mathbf{w}_{g_i} \hat{\mathbf{g}}_i}{d_f} \end{aligned}$$

نماییم؛ چرا که ماتریس ضرایب اولی دارای ستون‌های خطادار بوده و دومی کاملاً بدون خطا و فقط شامل درایه‌های یک می‌باشد و نباید خطادار فرض گردند. حال به تشکیل ماتریس‌های مورد نیاز برای حل مساله می‌پردازیم.

ماتریس ژاکوبین نسبت به مجهولات بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{h}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{h}_n^T]$$

$$;\mathbf{h}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} (x_i - x) / \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \\ (y_i - y) / \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \\ (z_i - z) / \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

و ماتریس ژاکوبین نسبت به مشاهدات بصورت زیر خواهد بود:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix}} \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1^T \quad \mathbf{b}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{b}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{b}_n^T];$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{l}} = \begin{bmatrix} (x_i - x) / \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \\ (y_i - y) / \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \\ (z_i - z) / \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

که در این مساله خاص تعیین موقعیت، دو رابطه زیر برقرار است:

$$-\mathbf{H}_i^T = \mathbf{B}_i \quad (39)$$

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + b_{i3}^2 = h_{i1}^2 + h_{i2}^2 + h_{i3}^2 = 1 \quad (40)$$

با این دانسته‌ها و مفروضات مدل خطی شده جایگزین برای کمترین مربعات کامل در مدل غیرخطی را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت [۵]:

$$(\mathbf{H} + \mathbf{G}^{(j)})^T d\mathbf{r}^{(j+1)} + d\delta^{(j+1)} + [\mathbf{B}_i^{(j)} \otimes \mathbf{I}_n \quad -\mathbf{I}_n] \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{G}^{(j+1)})^T \\ \mathbf{e}^{(j+1)} \end{bmatrix} - \mathbf{q}^{(j)} = \mathbf{0} \quad (41)$$

$$;q_i^{(j)} = f_i \left(\begin{bmatrix} \mathbf{l}_i \\ s_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix}^{(j)} \right)$$

۱۱. محاسبه

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix}^{-1}$$

۱۲. محاسبه

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}} \square \mathbf{Q}_{en} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{N}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T; \bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{H}}^T \quad \text{ones}(n,1)]$$

۳- بیان معادلات شبه فاصله برای تعیین موقعیت گیرنده

در حل کمترین مربعات کامل وزن‌دار غیرخطی در این حالت که ماتریس ساختار برای هر مشاهده یک بردار با بعد $u=3$ بوده (مختصات سه‌بعدی گیرنده) و پارامتر متناظر با ستون‌های بدون خطای ماتریس ساختار یک اسکالر (دریافت ساعت گیرنده) است، برای هر مشاهده i ام شبه فاصله می‌توان معادله زیر را نوشت [۱۲]:

$$f_i \left(\begin{bmatrix} \mathbf{l}_i \\ s_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix} \right) = \sqrt{(E(x_i) - x)^2 + (E(y_i) - y)^2 + (E(z_i) - z)^2} + \delta + E(s_i) \quad (34)$$

که x, y, z مختصات نقطه مجهول، δ دریافت ساعت گیرنده، x_i, y_i, z_i مختصات ماهواره i ام، s_i شبه‌فاصله مشاهده شده و $E(\cdot)$ تابع امید ریاضی می‌باشد. با توجه به خطادار بودن مختصات ماهواره و شبه فاصله‌ها، بردار مشاهدات را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_i \\ s_i \end{bmatrix}; \mathbf{l}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (35)$$

بنابراین مجهولات مساله تعیین مختصات عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \delta \end{bmatrix}; \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (36)$$

دلیل جدا کردن مجهول دریافت ساعت گیرنده از پارامترهای نقطه مجهول، آنست که بتوانیم ماتریس ضرائب نسبت به $\mathbf{r}$ را از ماتریس ضرائب نسبت به δ جدا

که $\otimes$ نماد ضرب کرونگر ، $\text{vec}(\cdot)$ عملگری که ستونهای یک ماتریس را زیر هم قرار می‌دهد و $(\cdot)^{(i)}$ مقدار پارامتر در تکرار i ام می‌باشد. توجه کنید که اگر مساله خطی باشد، مدل بصورت زیر تبدیل خواهد شد [۵]:

$$(\mathbf{H} + \mathbf{G}^{(i)})^T \mathbf{r}^{(i+1)} + \delta^{(i+1)} + [\mathbf{r}^{(i)} \otimes \mathbf{I}_n \quad -\mathbf{I}_n] \begin{bmatrix} \text{vec}((\mathbf{G}^{(i+1)})^T) \\ \mathbf{e}^{(i+1)} \end{bmatrix} - \mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{0} \quad (42)$$

حال اگر بخواهیم مدل‌های (۴۱) و (۴۲) را بصورت مجزا برای هر مشاهده شبه‌فاصله i ام بنویسیم، خواهیم داشت:

برای مدل غیرخطی

$$(\mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i)^T d \mathbf{r}^{(i+1)} + d \delta^{(i+1)} + (\mathbf{g}_i^{(i+1)})^T \mathbf{b}_i^{(i)} - q_i^{(i)} - e_i^{(i+1)} = 0 \quad (43)$$

$$\bar{\mathbf{h}}_i = \mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i$$

و برای مدل خطی با فرض $q_i = s_i$

$$(\mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i)^T \mathbf{r}^{(i+1)} + \delta^{(i+1)} + (\mathbf{g}_i^{(i+1)})^T \mathbf{r}_i^{(i)} - q_i^{(i)} - e_i^{(i+1)} = 0 \quad (44)$$

$$\bar{\mathbf{h}}_i = \mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i$$

تنها فرق این دو مدل آنست که در مدل غیر خطی بجای بردار $\mathbf{r}$ ، بردار $\mathbf{b}$ قرار گرفته است؛ بنابراین می‌توان الگوریتم زیر را برای حل کمترین مربعات کامل وزن‌دار از طریق الگوریتم ۱ نوشت:

الگوریتم ۲:

ورودی‌های مساله عبارتند از:

ماتریس ساختار $\mathbf{H}^T \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ ، بردار مشاهدات شبه-فاصله $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ، مختصات‌های ماهواره‌ها، مقدار اولیه مجهولات و فاکتورواریانس ثانویه مشاهدات (که می‌تواند از روش کمترین مربعات معمولی محاسبه گردد)، ماتریس قطری وزن مشاهدات $\mathbf{w}_e = (1/\hat{\sigma}_0^2) \mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و ماتریس قطری وزن ماتریس ساختار برای هر ماهواره i ام

$$\mathbf{w}_{g_i} = \begin{bmatrix} w_{g_{i1}} & 0 & 0 \\ 0 & w_{g_{i1}} & 0 \\ 0 & 0 & w_{g_{i1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

اگر $i \in \mathbb{R}, i = 1:n$ (به عنوان شماره هر مشاهده) و $j \in \mathbb{R}, j = 1:n$ (به عنوان شماره هر تکرار استفاده می‌شود) در نظر بگیریم داریم:

۱. بروز رسانی ماتریس $\mathbf{H}$ و بردار

$$\mathbf{q}_i^{(j)} = f_i \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{s}_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix}^{(j-1)} \right)$$

۲. محاسبه $\mathbf{Q}_{en_i}^{(j)} = \mathbf{Q}_{e_i} + \mathbf{B}_{(j)}^T \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{B}_{(j)}$; $\mathbf{Q}_{g_i} = \mathbf{w}_{g_i}^{-1}$

۳. محاسبه $q_{n_i}^{(j)} = q_i + (\mathbf{g}_i^{(j)})^T \mathbf{B}_{(j)}$ (در تکرار اول $\mathbf{g}_i^{(1)} = \mathbf{0}$ و $\bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} = \mathbf{h}_i^{(j)}$)

۴. محاسبه دیفرانسیل مجهولات از رابطه زیر و سپس بروزرسانی مقادیر اولیه مجهولات برای رسیدن به مجهولات مرحله بعدی از رابطه زیر:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^{(j+1)} \\ \delta^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{(j)} \\ \delta^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \mathbf{r}^{(j+1)} \\ -d \delta^{(j+1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d \mathbf{r}^{(j+1)} \\ d \delta^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} (\mathbf{h}_i^{(j)})^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} (\mathbf{h}_i^{(j)})^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n q_{n_i}^{(j)} \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} \\ \sum_{i=1}^n q_{n_i}^{(j)} \mathbf{w}_{en_i}^{(j)} \end{bmatrix}$$

۵. محاسبه

$$\mathbf{g}_i^{(j+1)} = \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{B}_{(j)} (\mathbf{Q}_{en_i}^{(j)})^{-1} [q_i - d \delta^{(j+1)} - \mathbf{h}_i^T d \mathbf{r}^{(j+1)}]$$

۶. محاسبه $\bar{\mathbf{h}}_i^{(j)} = \mathbf{h}_i + \mathbf{g}_i^{(j)}$

۷. تکرار مراحل ۱ الی ۶ تا رسیدن به شرط پایان حلقه که می‌تواند بصورت زیر تعریف شود.

$$\left\| \begin{bmatrix} d \mathbf{r}^{(j+1)} \\ d \delta^{(j+1)} \end{bmatrix} \right\| < \varepsilon \quad (\text{e.g. } \varepsilon = 10^{-12})$$

۸. محاسبه $\hat{\lambda}_i = \mathbf{Q}_{en_i}^{-1} [q_i - \delta - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}]$

۹. محاسبه $\hat{e}_i$ با یکی از دو رابطه زیر:

$$\hat{e}_i = -\mathbf{Q}_{e_i} \mathbf{Q}_{en_i}^{-1} (q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta) = -\mathbf{Q}_{e_i} \hat{\lambda}_i$$

$$\hat{e}_i = f_i \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{s}_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \delta \end{bmatrix}^{(\text{final})} \right)$$

۱۰. محاسبه $\hat{\sigma}_0^2$ با یکی از دو رابطه زیر:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{w}_{en} \hat{\mathbf{e}}}{d_f} \quad \text{یا} \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [\hat{\lambda}_i (q_i - \mathbf{r}^T \mathbf{h}_i - \delta)]}{d_f}$$

باشند، $\sigma_{g_{i1}}^2 = \sigma_{g_{i2}}^2 = \sigma_{g_{i3}}^2 = \sigma_{g_i}^2$ ، می‌توان α_i و g_i را از رابطه (۴۷) بصورت زیر نوشت:

$$\alpha_i = \frac{-[q_i - \delta - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}]}{\sigma_{e_i}^2 + \sigma_{g_i}^2}, \quad \mathbf{g}_i = -\sigma_{g_i}^2 \alpha_i \begin{bmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ h_{i3} \end{bmatrix} \quad (48)$$

در اینحالت بردار g_i در راستای بردار h_i قرار خواهد گرفت و از آنجاییکه خطای در راستای بردار h_i می‌تواند در بردار باقیمانده‌ها جذب گردد [۱۲]، جواب روش کمترین مربعات کامل وزن‌دار و کمترین مربعات وزن‌دار بهم نزدیک خواهد شد و در واقع استفاده از کمترین مربعات کامل وزن‌دار توجیه نخواهد داشت. حال می‌توان دو حالت وزن‌دهی زیر را در نظر گرفت:

حالت اول: اگر قرار بر تقویت روش کمترین مربعات کامل وزن‌دار باشد، باید خطاهای در غیر از راستای بردار h_i نیز در نظر گرفته شود تا نتیجه خوبی بدست آید؛ پس باید مقادیر واریانس‌های $\sigma_{g_{i1}}^2, \sigma_{g_{i2}}^2, \sigma_{g_{i3}}^2$ طوری انتخاب شود که بردار g_i تا حد ممکن در امتداد h_i واقع نشود که ساده‌ترین راه مینیمم کردن قدر مطلق ضرب داخلی دو بردار زیر است:

$$\mathbf{h}_i, \mathbf{g}_i \rightarrow \min \quad (49)$$

با جاگذاری رابطه (۴۷) در (۴۹) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i, \mathbf{g}_i &= -\alpha_i \mathbf{h}_i \cdot \begin{bmatrix} h_{i1} \sigma_{g_{i1}}^2 \\ h_{i2} \sigma_{g_{i2}}^2 \\ h_{i3} \sigma_{g_{i3}}^2 \end{bmatrix} = -\alpha_i \begin{bmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ h_{i3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{i1} \sigma_{g_{i1}}^2 \\ h_{i2} \sigma_{g_{i2}}^2 \\ h_{i3} \sigma_{g_{i3}}^2 \end{bmatrix} \\ &= -\alpha_i (h_{i1}^2 \sigma_{g_{i1}}^2 + h_{i2}^2 \sigma_{g_{i2}}^2 + h_{i3}^2 \sigma_{g_{i3}}^2) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (50)$$

با در نظر گرفتن اینکه در مساله تعیین موقعیت مورد بحث ما بردارهای h_i یک‌هسته‌ای و شرط $|h_{ij}| < 1$ برقرار است، برای رسیدن به رابطه (۵۰) می‌توان از رابطه زیر برای وزن‌دهی بهینه استفاده کرد که البته تجربه نیز در این انتخاب دخیل می‌باشد:

$$\sigma_{g_{ij}}^2 = |h_{ij}|^4; i, j = 1, 2, 3 \quad (51)$$

با این انتخاب رابطه (۵۰) به صورت $-\alpha_i (|h_{i1}|^6 + |h_{i2}|^6 + |h_{i3}|^6)$ تبدیل می‌گردد که با توجه به شرط $|h_{ij}| < 1$ کوچکتر شده است.

۱۱. محاسبه

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \bar{\mathbf{h}}_i^T & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{en_i} \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}$$

۱۲. محاسبه

$$\mathbf{Q}_e \square \mathbf{Q}_{en} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{N}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T; \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}^T & \text{ones}(n,1) \end{bmatrix}$$

۴- روش پیشنهادی برای وزن‌دهی به ماتریس ساختار

از رابطه (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} Q_{en_i} &= Q_{e_i} + \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_{g_i} \mathbf{B}_i \\ &= \sigma_{e_i}^2 + \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{g_{i1}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{g_{i2}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{g_{i3}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ b_{i3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\Rightarrow Q_{en_i} = \sigma_{e_i}^2 + (b_{i1}^2 \sigma_{g_{i1}}^2 + b_{i2}^2 \sigma_{g_{i2}}^2 + b_{i3}^2 \sigma_{g_{i3}}^2)$$

اگر رابطه (۱۶) را برای مساله تعیین موقعیت در نظر گرفته و رابطه (۴۵) را در آن قرار دهیم داریم:

$$\mathbf{g}_i = \frac{[q_i - \delta - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}]}{\sigma_{e_i}^2 + (b_{i1}^2 \sigma_{g_{i1}}^2 + b_{i2}^2 \sigma_{g_{i2}}^2 + b_{i3}^2 \sigma_{g_{i3}}^2)} \begin{bmatrix} b_{i1} \sigma_{g_{i1}}^2 \\ b_{i2} \sigma_{g_{i2}}^2 \\ b_{i3} \sigma_{g_{i3}}^2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

می‌توان رابطه (۴۶) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= -\alpha_i \begin{bmatrix} h_{i1} \sigma_{g_{i1}}^2 \\ h_{i2} \sigma_{g_{i2}}^2 \\ h_{i3} \sigma_{g_{i3}}^2 \end{bmatrix} \\ \alpha_i &= \frac{[q_i - \delta - \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}]}{\sigma_{e_i}^2 + (b_{i1}^2 \sigma_{g_{i1}}^2 + b_{i2}^2 \sigma_{g_{i2}}^2 + b_{i3}^2 \sigma_{g_{i3}}^2)} \end{aligned} \quad (47)$$

پارامتر اسکالر α_i به عنوان یک ضریب ثابت عمل می‌کند و مقدار مخرج آن بیشتر به بستگی دارد؛ چون مقدار $\sigma_{g_{ij}}^2$ نسبت به $\sigma_{e_i}^2$ عدد کوچکتری بوده و باعث می‌شود مقدار عبارت $b_{i1}^2 \sigma_{g_{i1}}^2 + b_{i2}^2 \sigma_{g_{i2}}^2 + b_{i3}^2 \sigma_{g_{i3}}^2$ ، با یادآوری اینکه $|b_{ij}| \leq 1$ می‌باشد، کمتر از $\sigma_{e_i}^2$ گردد. حال اگر مقادیر واریانس‌های $\sigma_{g_{i1}}^2, \sigma_{g_{i2}}^2, \sigma_{g_{i3}}^2$ با هم یکسان

حالت دوم: برعکس حالت اول، اگر قرار بر تضعیف روش کمترین مربعات کامل وزن دار باشد، باید مقادیر واریانس‌های $\sigma_{g_{i1}}^2, \sigma_{g_{i2}}^2, \sigma_{g_{i3}}^2$ طوری انتخاب شود که بردار g_i تا حد ممکن در امتداد h_i واقع شود که ساده‌ترین راه ماکزیمم کردن قدر مطلق ضرب داخلی دو بردار زیر است:

$$h_i \cdot g_i \rightarrow \max \quad (52)$$

مشابه استنباط حالت قبل، برای رسیدن به رابطه (52) می‌توان از رابطه زیر برای وزن‌دهی بهینه استفاده کرد که البته تجربه نیز در این انتخاب دخیل می‌باشد:

$$\sigma_{g_{ij}}^2 = |h_{ij}|^{-4}; i, j = 1, 2, 3 \quad (53)$$

با این انتخاب رابطه (50) به صورت $-\alpha_i (|h_{i1}|^{-2} + |h_{i2}|^{-2} + |h_{i3}|^{-2})$ تبدیل می‌گردد که با توجه به شرط $|h_{ij}| < 1$ بزرگتر شده است.

در عمل برای انتخاب حالت مناسب، می‌توان ابتدا هر دو را برای فقط یک اپک انجام داد و هر کدام که نرم بردار باقیمانده‌های بزرگتر را داشته باشد آن را انتخاب نمود؛ چرا که در وزن‌دهی مناسب، قدرمطلق باقیمانده‌های متناظر با ماهواره‌های شکست بزرگتر و سایر ماهواره‌ها کوچکتر شده و در نتیجه نرم آن بزرگتر خواهد شد (با توجه به ثابت ماندن تقریبی نرم ۱ آن).

۵- نتایج عددی

مشاهدات شامل ۲۰ اپک با نرخ یک ثانیه که در هر اپک ۱۰ ماهواره مشاهده شده است، می‌باشد. برای تولید این داده‌ها یک مختصات برای گیرنده در نظر گرفته شده و با داشتن مختصات ماهواره‌ها (از داده‌های واقعی) طول هندسی بین گیرنده تا هر ماهواره در هر اپک محاسبه می‌گردد. توجه کنید که با اینکار هم مختصات ماهواره‌ها و هم مشاهدات فاصله‌ها بدون هیچگونه خطایی خواهد بود که باعث می‌شود مساله از آنچه در عمل اتفاق می‌افتد دور گردد. برای جبران این کمبود نویزهای تصادفی بصورت رابطه زیر بر حسب متر به مختصات‌های ماهواره‌ها وارد می‌گردد:

$$35 \times \text{rand}(200,3) - 35 \times \text{rand}(200,3) \quad (54)$$

$\text{rand}(200,3)$ در رابطه (54)، ماتریس تصادفی با ابعاد 200×3 را تعریف می‌کند (۱۰ ماهواره در ۲۰ اپک دارای ۲۰۰ مختصات سه بعدی هستند که تشکیل این ابعاد را می‌دهند) که دارای درایه‌های بین صفر و یک هستند و با این تعریف اعدادی در بازه -35 تا $+35$ به مختصات‌های ماهواره‌ها اعمال می‌گردد. این میزان خطا به مقادیر واقعی خطای مداری ماهواره‌ها نزدیک است.

سپس خطاهایی به صورت زیر به مشاهدات شبه‌فاصله اعمال گردید تا با داده‌های واقعی مطابقت بیشتری داشته باشد و از حالت ایده‌آل خارج گردد:

$$3 \times \text{rand}(200,1) - 3 \times \text{rand}(200,1) \quad (55)$$

$\text{rand}(200,1)$ در رابطه (55)، ماتریس تصادفی با ابعاد 200×1 را تعریف می‌کند (۱۰ ماهواره در ۲۰ اپک دارای ۲۰۰ مشاهده شبه‌فاصله است که تشکیل این ابعاد را می‌دهند) که دارای درایه‌های بین صفر و یک هستند و با این تعریف اعدادی در بازه -3 تا $+3$ متر به مشاهدات اعمال می‌گردد.

در ادامه از اپک ۱۵ خطاهای ۷۰۰، ۵۵۰ و ۵۵۰ متر بترتیب به شبه‌فاصله ماهواره‌های ۱، ۳ و ۷، به عنوان شکست، اعمال گردید تا بتوان نحوه رفتار بردار باقیمانده‌ها را در حضور چند شکست بررسی نمود. موقعیت صحیح نقطه مجهول گیرنده نیز به عنوان معیار مقایسه روش‌ها در نظر گرفته شد.

با انجام محاسبات سرشکنی کمترین مربعات معمولی در این ۲۰ اپک (که انتخاب نوع روش در این مرحله هیچ فرقی ندارد)، نرم بردار باقیمانده‌ها بصورت جدول ۱ بدست آمده است.

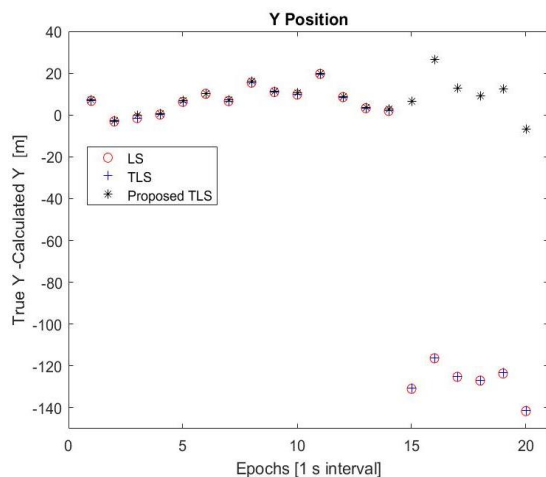
جدول ۱- بردار باقیمانده‌های برآورد شده با سه روش بر حسب متر

اپک	1	2	3	4	5
نرم	34	29	18.5	29.2	32.6
اپک	6	7	8	9	10
نرم	25	23.2	30.6	20.4	18.1
اپک	11	12	13	14	15
نرم	21.1	33.97	38	29.4	800
اپک	16	17	18	19	20
نرم	793.1	783	787.5	797.8	804.3

از جدول ۱ مشخص است که نرم بردار باقیمانده‌ها، از اپک ۱۵ که شکست وجود دارد، بطور چشمگیری افزایش

با مراجعه به جدول ۲ مشاهده می‌گردد در اپک ۱۴ که هنوز هیچ شکستی وجود ندارد، اولاً مقادیر باقیمانده‌ها تقریباً اعداد کوچکی بوده و طبیعتاً از تست باردا رد نخواهند شد و دوماً این اعداد در هر سه روش به هم نزدیک می‌باشند که نشان می‌دهد وقتی شکستی وجود ندارد نتایج هر سه روش بهم نزدیک است. به محض بروز شکست در سه ماهواره ۱، ۳ و ۷ از اپک ۱۵، قدرمطلق باقیمانده‌های متناظر با این ماهواره‌ها بزرگ شده و تفاوت فاحشی با سایر باقیمانده‌ها پیدا می‌کنند که نشان از وجود شکست دارد. با نگاه دقیق‌تر به جدول ۲ در اپک‌های ۱۵ و ۱۶ (که شکست وجود دارد)، ملاحظه می‌گردد که در روش پیشنهادی باقیمانده‌های متناظر با ماهواره‌های شکست ۱، ۳ و ۷ از نظر قدرمطلق بزرگترین اعداد هستند و در حالیکه در دو روش قبلی اینطور نبوده و در هر دوی آنها باقیمانده‌های متناظر با ماهواره‌های شکست ۱، ۳ و ۵ از نظر بزرگترین قدرمطلق را دارا هستند. این نشان می‌دهد که روش پیشنهادی به نوعی کار کشف شکست را ساده‌تر می‌نماید؛ چرا که باقیمانده‌های برآورد شده را متناسب با میزان شکست موجود بدست می‌آورد.

این موثر بودن روش پیشنهادی در برآورد مجهولات مختصات و دریافت ساعت گیرنده در شکل‌های ۱ تا ۵ نیز کاملاً مشهود است.



شکل ۱- مقایسه بین کمترین مربعات، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات کامل بهینه در تعیین مولفه X

می‌یابد و نشانگر وجود شکست در آن اپک می‌باشد. با این دانسته محاسبات بعدی برای کشف شکست در کدامیک از ماهواره‌ها را در یک اپک قبل ۱۵ یعنی اپک ۱۴ و یک اپک در بعد از آن یعنی اپک ۱۶ معطوف می‌نماییم.

با توضیحات ارائه‌شده در بخش ۴، برای اپک ۱۵، ابتدا از هر دو روش وزن‌دهی استفاده شد و نرم بردار باقیمانده‌ها در حالت اول 884.27 و در حالت دوم 776.74 بدست آمد و در نتیجه وزن‌دهی حالت اول برای ادامه کار در روش پیشنهادی انتخاب گردید.

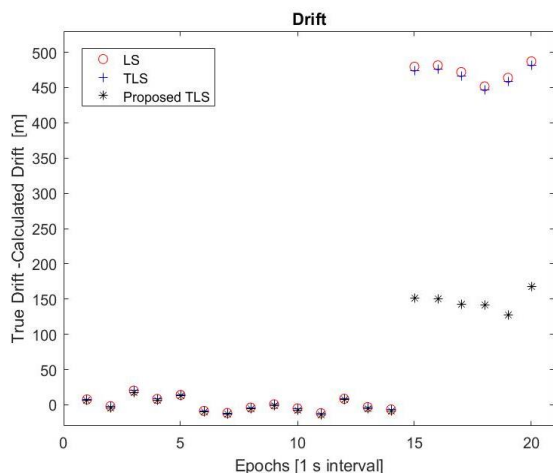
جدول ۲، باقیمانده‌های مربوط به اپک‌های ۱۴ الی ۱۶ را که با هر سه روش سرشکنی کمترین مربعات معمولی، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات کامل پیشنهادی محاسبه گردیده نمایش می‌دهد.

جدول ۲- بردار باقیمانده‌های برآوردشده با سه روش بر حسب متر

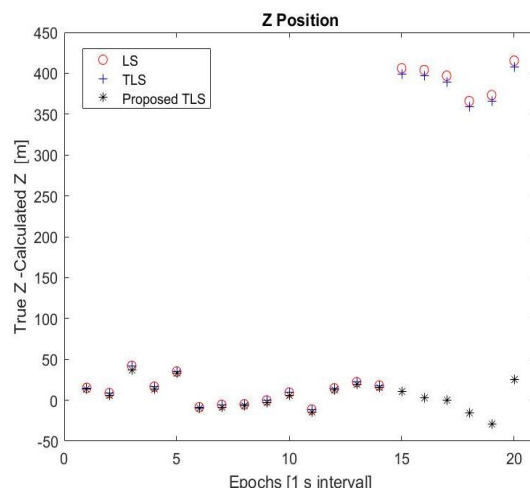
اپک ۱۴			
شماره ماهواره	LS	TLS	TLS بهینه
1	4.31035	4.32623	4.76767
2	8.2139	8.23186	9.25064
3	5.76669	5.7326	4.68494
4	3.00531	3.00815	3.27163
5	-17.2776	-17.2867	-18.201
6	-15.8996	-15.8961	-15.461
7	13.3188	13.3092	12.395
8	1.72973	1.73457	1.54442
9	-1.75313	-1.75875	-1.5974
10	-1.41454	-1.40111	-0.6119

اپک ۱۵			
شماره ماهواره	LS	TLS	TLS بهینه
1	-599.006	-596.719	-516.158
2	21.4703	23.3839	173.258
3	-257.327	-261.125	-362.509
4	108.888	109.943	221.869
5	304.224	303.572	163.719
6	155.913	155.089	131.717
7	-139.48	-141.83	-423.1
8	206.098	207.13	186.645
9	144.799	144.247	208.737
10	54.4196	56.3081	214.43

اپک ۱۶			
شماره ماهواره	LS	TLS	TLS بهینه
1	-574.087	-571.86	-492.557
2	16.4314	18.3017	171.878
3	-256.64	-260.367	-362.682
4	99.6504	100.658	211.931
5	326.429	325.79	180.6
6	178.66	177.885	159.856
7	-161.6	-163.85	-446.155
8	190.683	191.687	167.817
9	145.863	145.312	211.6
10	34.6111	36.4428	196.335



شکل ۵- مقایسه بین کمترین مربعات، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات کامل بهینه در تعیین دریفت ساعت



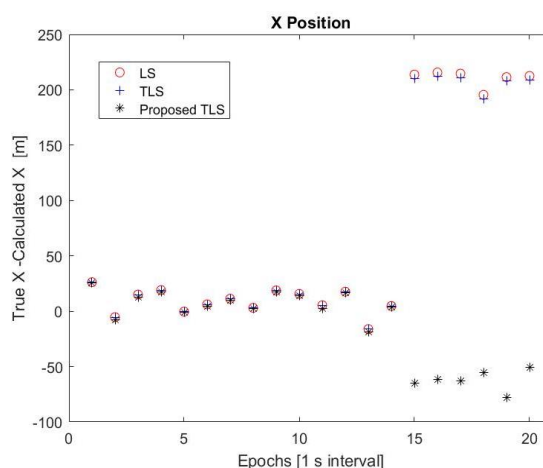
شکل ۶- مقایسه بین کمترین مربعات، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات کامل بهینه در تعیین مولفه Y

در این شکل‌ها محور افقی نشان‌دهنده شماره اپک بوده و محور عمودی اختلاف بین مولفه مورد نظر با مقدار صحیح (که در شبیه‌سازی داده‌ها مورد استفاده قرار گرفته است) است؛ یعنی شکل‌های ۱ تا ۵ بترتیب مربوط به اختلاف مولفه X محاسبه شده با مولفه X صحیح، اختلاف مولفه Y محاسبه شده با مولفه Y صحیح، اختلاف مولفه Z محاسبه شده با مولفه Z صحیح، نرم اختلاف مختصات محاسبه شده با مختصات صحیح و اختلاف مولفه دریفت محاسبه شده با مولفه دریفت صحیح است.

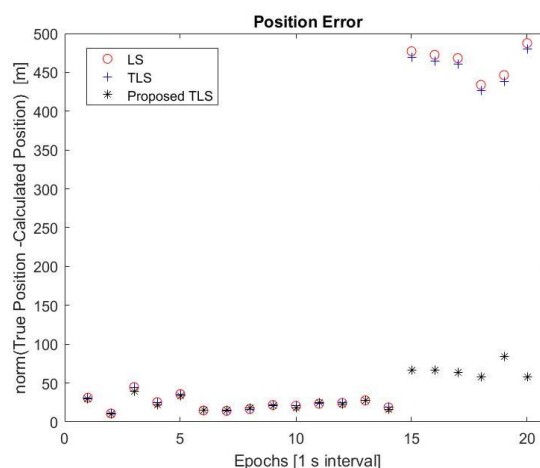
از این شکل‌ها مخصوصاً شکل ۴ (که به نوعی دربرگیرنده سه مولفه X، Y و Z می‌باشد) مشخص است تا زمانی‌که شکستی رخ نداده است، مختصات برآورد شده در هر سه روش تقریباً بر هم منطبق هستند؛ اما به محض وقوع شکست اختلاف مختصات در دو روش کمترین مربعات و کمترین مربعات کامل بیشتر می‌شود، اما این اختلاف در روش پیشنهادی بسیار کمتر می‌باشد و نشان دهنده آنست که این روش باعث می‌شود خطای مشاهدات کمتر جواب بدست آمده را متاثر سازد و بتوان جواب نزدیک به جواب صحیح را حتی در حضور چند شکست بدست آورد.

۶- نتیجه‌گیری

ما یک روش تکراری برای حل کمترین مربعات کامل در یک حالت خاص مورد نیاز برای مدل تعیین مختصات گیرنده با مشاهدات شبه‌فاصله GPS، که ماتریس ساختار برای هر مشاهده یک بردار با بعد $u=3$ بوده و پارامتر متناظر با ستون‌های بدون خطای ماتریس ساختار یک اسکالر،



شکل ۷- مقایسه بین کمترین مربعات، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات کامل بهینه در تعیین مولفه Z



شکل ۸- مقایسه بین کمترین مربعات، کمترین مربعات کامل و کمترین مربعات کامل بهینه در موقعیت

واقعیترا) بزرگ بودن باقیمانده‌های متناظر با مشاهدات شکست و کوچک بودن سایر باقیمانده‌ها) در حضور چندین شکست می‌شود؛ بطوریکه در درجه اول از طریق همین بردار باقیمانده‌ها می‌توان به مشاهدات شکست دست یافت و در درجه دوم استفاده از سایر الگوریتم‌های ارائه‌شده پایش بی‌عیبی مستقل مشاهدات جواب بهتر و مطمئن‌تری را ارائه می‌کند.

نتایج عددی نشان از موفقیت این روش بهینه ارائه‌شده می‌دهد که می‌تواند بدون تشکیل زیرمجموعه‌هایی از مشاهدات و حل متوالی آنها، با یکبار حل به نتیجه دلخواه برسد چون وجود حتی چندین شکست جواب را تحت تاثیر زیادی قرار نمی‌دهد.

ناهمزمانی ساعت ماهواره و گیرنده، است) بر پایه استفاده از علامت جمع بدست آورده‌ایم که بدون نیاز به ضرایب لاگرانژ و عدم استفاده از تجزیه به مقادیر سینگولار، می‌تواند مساله را با حجم کم محاسبات و سرعت زیاد حل نماید و در ضمن نیازی به وارد کردن صفر در ماتریس وزن ماتریس ساختار متناظر با درایه‌های ثابت ماتریس ساختار نمی‌باشد. به دلیل شباهت روش حل به حل کمترین مربعات معمولی، مشابه آن می‌توان بردار باقیمانده‌های برآورده‌شده، فاکتوروارینانس ثانویه، و ماتریس‌های دقت پارامترهای برآورده‌شده را بدست آورد.

پایش بی‌عیبی مستقل مشاهدات با تاکید بر معرفی وزن بهینه برای ماتریس ساختار که باعث جواب بسیار بهتر در تعیین موقعیت گیرنده و در نتیجه باقیمانده‌های

مراجع

- [1] Golub, G. H. and C. F. J. S. j. o. n. a. Van Loan (1980). "An analysis of the total least squares problem." 7(6): 883-893.
- [2] Schaffrin, B. and Y. A. Felus (2008). "Multivariate total least-squares adjustment for empirical affine transformations." VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy, Springer.
- [3] Neri, F., et al. (1989). "An accurate and straightforward approach to line regression analysis of error-affected experimental data." 22(4): 215.
- [4] Schaffrin, B. and Y. A. Felus (2005). On total least-squares adjustment with constraints. A Window on the Future of Geodesy, Springer: 417-421.
- [5] Xing, F. (2011). Weighted total least squares solutions for applications in geodesy, Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz-Univ.
- [6] Schaffrin, B. J. L. a. and i. applications (2006). "A note on constrained total least-squares estimation." 417(1): 245-258.
- [7] Markovsky, I., et al. (2006). "The element-wise weighted total least-squares problem." 50(1): 181-209.
- [8] Huffel, S. V., et al. (1989). "Analysis and properties of the generalized total least squares problem $AX \approx B$ when some or all columns in A are subject to error." 10(3): 294-315.
- [9] Schaffrin, B. and Y. A. Felus (2008). Multivariate total least-squares adjustment for empirical affine transformations. VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy, Springer.
- [10] Schaffrin, B., et al. (2006). "Total least-squares (TLS) for geodetic straight-line and plane adjustment." 65(3): 141-168.
- [11] Jazaeri, S., et al. (2014). "Iterative algorithm for weighted total least squares adjustment." 46(334): 19-27.
- [12] Juang, J.-C. J. I. T. o. A. and E. Systems (2000). "On GPS positioning and integrity monitoring." 36(1): 327-336.
- [13] Jeon, C. W., et al. (2004). "Development of a sequential algorithm for a GNSS-based multi-sensor vehicle navigation system." 2(2): 165-170.
- [14] Jeon, C.-W., et al. (2005). "A new TLS-based sequential algorithm to identify two failed satellites." 3(2): 166-172.
- [15] Yang, Y., et al. (2016). "GNSS receiver autonomous integrity monitoring (RAIM) algorithm based on robust estimation." 7(2): 117-123.
- [16] Henderson, H. V. and S. R. J. S. R. Searle (1981). "On deriving the inverse of a sum of matrices." 23(1): 53-60.
- [17] Hamilton, W. C. J. S. (1964). "For Laboratory Scientists.(Book Reviews: Statistics in Physical Sciences. Estimation, hypothesis testing, and least squares)." 146: 1570-1571.