

مروری بر انواع روش های جداسازی طیفی غیرخطی تصاویر فراطیفی دورسنجی

هادی جمشیدمقدم^۱، مجید محمدی اسکویی^{۲*}

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی اکتشاف معدن - دانشکده مهندسی معدن - دانشگاه صنعتی سهند تبریز
hj_moghadam@sut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی معدن - دانشگاه صنعتی سهند تبریز
mohammady@sut.ac.ir

(تاریخ دریافت اردیبهشت ۱۳۹۸، تاریخ تصویب اسفند ۱۳۹۸)

چکیده

امروزه، استفاده از سنجش از دور فراطیفی بعنوان ابزاری توانمند برای کشف، شناسایی و تهیه نقشه های متنوع از عوارض سطح زمین است. این فن آوری کاربردهای گوناگونی در نقشه برداری، معدن، پایش محیط زیست، کشاورزی، تصاویر شهری و سنجش از دور سیاره ها دارد. در این بین، فرآیند جداسازی تصاویر فراطیفی بعنوان یکی از مهمترین مراحل پردازشی در آنالیز این داده ها محسوب می گردد. که براساس دو مدل اختلاط خطی و غیرخطی پایه ریزی می گردد. در سالیان اخیر، دامنه گسترده ای از انواع این روش های جداسازی بر پایه مدل اختلاط خطی بنا نهاده شده، که براساس آن بخش اصلی فرآیند یعنی تشخیص اعضای انتهایی و مقادیر فراوانی مربوط به آنها تعیین می گردد. با این حال بر کسی پوشیده نیست که در برخی مواقع وجود اثرات اختلاط غیرخطی می تواند جزء مهمی در بسیاری موقعیت های دنیای واقعی همچون: اختلاط کانیاپی مواد، پوشش های گیاهی، محیط های شهری و... محسوب گردد و نادیده گرفتن این اثرات اجتناب ناپذیر است. در نتیجه هدف از این مقاله، مروری بر روش ها و مدل های غیرخطی در فرآیند جداسازی و بررسی جزئی تر تکنیک های محبوب تر می باشد. در همین راستا، انواع روش های جداسازی را می توان به دو گروه روش های مبتنی بر فیزیک و روش های براساس ابرداده ها تقسیم نمود که در آنها از مهمترین تکنیک ها و مدل ها می توان به انواع مدل های دوخطی، چندخطی، مدل های بر پایه اختلاط ذاتی یا داخلی، روش های بر پایه مسیریابی پرتو، روش های کرنلی، شبکه های عصبی و روش های یادگیری منیفولد و توپولوژی اشاره کرد. در این بین، با یک بررسی جامع بر انواع این روش ها می توان پی برد که مدل های دوخطی و شبکه های عصبی در طی این سال ها از اهمیت و محبوبیت بیشتری در بین پژوهشگران این حوزه برخوردار بوده اند.

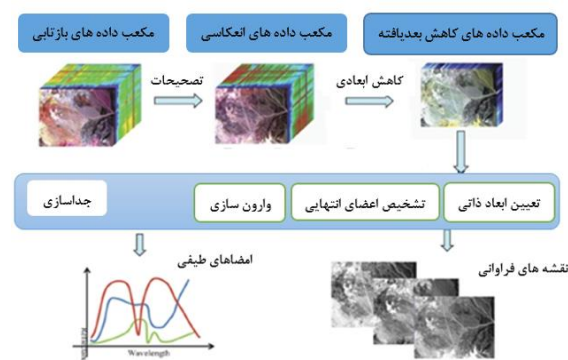
واژگان کلیدی: دورسنجی، جداسازی غیرخطی، دوخطی، چندخطی، شبکه عصبی، کرنل، توپولوژی

۱- مقدمه

امروزه، کارایی و سهولت بکارگیری روش های دورسنجی بویژه در مناطق کوهستانی و صعب العبور باعث شده است، که کاربرد این تکنولوژی بعنوان یکی از روش های معمول در اکتشافات توسعه یابد. در این اثنا، روش های سنجش از دور فراطیفی ابزاری توانمند برای کشف، شناسایی و تهیه نقشه های متنوع از پدیده ها و مواد سطح زمین محسوب می شوند [۱-۶].

با این حال، با وجود توانمندی های قابل توجه داده های فراطیفی، بدلیل توان تفکیک مکانی پایین سنجنده ها و یا بعثت حضور مواد متعدد در میدان دید لحظه ای (IFOV)، طیف اندازه گیری شده ترکیبی از چند عارضه خواهد بود. بنابراین، بکارگیری روش های مختلف و مناسب بمنظور تفکیک صحیح اینگونه اختلاط ها که در حالت کلی به نام آنمیگسینگ^۱ یا جداسازی طیفی نامیده می شود ضرورت دارد [۷].

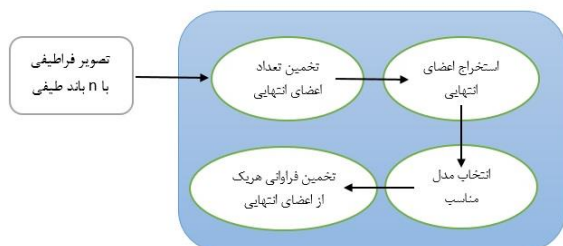
جداسازی طیفی روشی است که پیکسل های مختلط را به مشخصه طیفی اعضای خالص و فراوانی آنها تجزیه می کند. در حالت کلی زنجیره فرآیند جداسازی فراطیفی از سه بخش الف) انجام تصحیحات لازم، ب) کاهش ابعاد، و ج) بخش شناسایی اعضای انتهایی و وارون سازی تشکیل می شود. این مراحل بطور جامع در شکل (۱) نشان داده شده اند [۸].



شکل ۱- مراحل اجرای جداسازی فراطیفی [۸]

بنابراین با توجه به شکل، بخش اصلی فرآیند را مرحله شناسایی اعضای انتهایی و وارون سازی تشکیل می دهد که مستلزم بکارگیری یک مدل اختلاط مناسب و سازگار می باشد (شکل ۲)، مرحله اصلی فرآیند را بصورت جامع تر

نشان می دهد). قبل از انجام این مرحله نیز می توان با استفاده از الگوریتم های مناسب شناسایی ابعاد ذاتی تعداد اعضای انتهایی را از قبل بطور تقریبی تخمین زد. علاوه بر این، بسته به اینکه اعضای انتهایی از قبل شناخته شده باشند و یا به عبارتی دانش قبلی از اعضا و منطقه وجود داشته باشد، فرآیند جداسازی به دو بخش نظارتی و غیرنظارتی (که در آن استخراج اعضای انتهایی و تخمین فراوانی همزمان صورت می گیرد) تقسیم می گردد [۹].



شکل ۲- مراحل انجام بخش جداسازی

معمولاً دو نوع مدل اختلاط طیفی در نظر گرفته می شود. در مدل خطی فرض می شود که پرتوهای بازتاب شده از پدیده های حاضر در یک پیکسل، کنش و اندرکنش مستقیم با هم نداشته اند و اشعه بازتابی تنها با یک ماده تداخل دارد، در این حالت، انرژی رسیده به سنجنده ترکیب خطی انرژی های بازتابی از هر پدیده خاص است. در مدل غیرخطی پرتوهای رسیده به سنجنده حاصل بازتاب های چندگانه و تداخل های چندگانه بین مواد می باشند و بطور کلی مدل بازتابی حاصل پیچیده تر است [۸].

مدل اختلاط خطی زمانی اتفاق می افتد که میزان اختلاط کم و از نوع ماکروسکوپی است. در مدل اختلاط خطی، طیف انعکاسی سطح بعنوان یک ترکیب خطی از تعداد محدودی از طیف های در ارتباط با اجزاء خالص تصویر تحت عنوان اعضای انتهایی در نظر گرفته می شوند که با یکسری ضرایب (کسرهایی از فراوانی اجزای موجود در منطقه) وزن دار می گردند. با انتخاب ایده آل و مناسب اعضای انتهایی، همواره می بایستی دو محدودیت غیرمنفی بودن و مجموع برابر واحد ضرایب نیز رعایت گردد. با توجه به شکل (۳)، که حالتی از یک مدل اختلاط خطی را بصورت شماتیک نشان می دهد، رادیانس اندازه گیری شده در یک پیکسل، متوسط وزن داده شده از مواد موجود در پیکسل می باشد [۸].

^۱ Unmixing

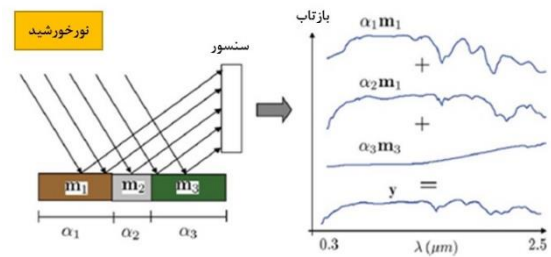
حجم سادک محسوب می‌شوند با این تفاوت که در آنها باید فرض حضور حداقل یک پیکسل در هر عضو انتهایی رعایت شود [۸].

از مهمترین روش‌های مبتنی بر حضور پیکسل خالص می‌توان به الگوریتم شاخص خلوص پیکسلی (PPI) [۱۰، ۱۱]، الگوریتم N-FINDR [۱۲]، الگوریتم آنالیز خطای تکرارشونده (IEA) [۱۳]، الگوریتم آنالیز مؤلفه‌های رأسی (VCA) [۱۴]، الگوریتم در حال رشد سادک (SGA) [۱۵]، الگوریتم مخروط محدب حداکثر زاویه متوالی (SMACC) [۱۶]، الگوریتم حداکثرسازی حجم متناوب (AVMAX) [۱۷]، الگوریتم حداکثرسازی حجم متوالی (SVMAX) [۱۷]، الگوریتم چارچوب محدب مشارکتی [۱۸] و مدل حافظه‌های وابسته به شبکه (LAM) [۱۹-۲۱] را اشاره کرد و از روش‌های مبتنی بر حداقل حجم سادک نیز می‌توان الگوریتم‌های SISAL [۲۲]، و MVSA [۲۳]، الگوریتم MVES [۲۴] و نوع تعمیم یافته آن RMVES [۲۵]، الگوریتم MVC-NMF [۲۶]، الگوریتم اعضای انتهایی تکرارشونده (ICE) [۲۷] و حالت تعمیم یافته آن (SPICE) [۲۸] و الگوریتم آنالیز مخروط محدب (CCA) [۲۹] را نام برد.

زمانیکه حجم اختلاط‌های طیفی بالاست، روش‌های هندسی نتایج ضعیفی را بعثت عدم بردار طیفی کافی در وجوه سادک به همراه دارند. بنابراین روش‌های آماری جایگزین قوی و مناسبی هستند، که معمولاً پیچیدگی محاسباتی بالاتری در مقایسه با روش‌های هندسی دارند. تحت این روش‌ها، یک مسئله جداسازی فراطیفی بعنوان یک مسئله استنتاج آماری مدل‌سازی می‌شود. آنالیز مؤلفه‌های مستقل (ICA) از ابتدایی‌ترین این روش‌ها محسوب می‌گردند، که در سال‌های اخیر حالات تعمیم یافته‌ای از آنها نیز معرفی شده است [۳۰-۳۶]. از نوع پیشرفته‌تر روش‌های آماری می‌توان به الگوریتم DECA و روش DECAGibbs بعنوان تعمیمی از الگوریتم DECA نیز اشاره نمود [۳۷-۴۰].

بنابراین همواره استفاده از مدل‌های خطی نیازمند برقراری دو فرض اساسی است:

- (۱) فرآیند اختلاط باید در مقیاس ماکروسکوپی رخ دهد.
- (۲) پرتو نور رسیده به ناظر ناشی از تداخل تنها یک ماده باشد.



شکل ۳- مدل اختلاط خطی [۸]

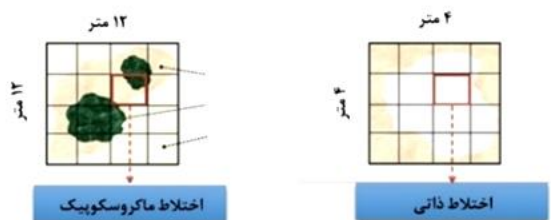
بنابراین مدل اختلاط خطی را می‌توان بصورت ترکیب خطی وزن‌دار با ضرایب، همراه با اعمال محدودیت‌های اشاره شده و وجود نویز گوسی بصورت زیر نوشت:

$$y_p = \sum_{r=1}^R a_{r,p} m_r + n_p \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{r,p} \geq 0 \quad \forall p, \forall r \\ \sum_{r=1}^R a_{r,p} = 1 \quad \forall p \end{cases}$$

که در آن $y_p \in R^L$ طیف اندازه‌گیری شده در L باند طیفی، R تعداد اعضای انتهایی حاضر در تصویر، m_r امضاهای طیفی r امین عضو انتهایی، $a_{r,p}$ فراوانی r امین ماده در پیکسل p و n_p میزان نویز گوسی موجود در تصویر در نظر گرفته می‌شود [۸].

حال در صورتی که میزان اختلاط زیاد و یا در مواقعی که اختلاط داخلی ماده حائز اهمیت است، امکان دارد این مدل‌ها معتبر نباشند لذا لزوم استفاده از یک مدل غیرخطی ضرورت پیدا می‌کند. در اشکال زیر حالاتی از اختلاط که منجر به ایجاد اختلاط از نوع غیرخطی می‌شود، نشان داده شده است [۸].

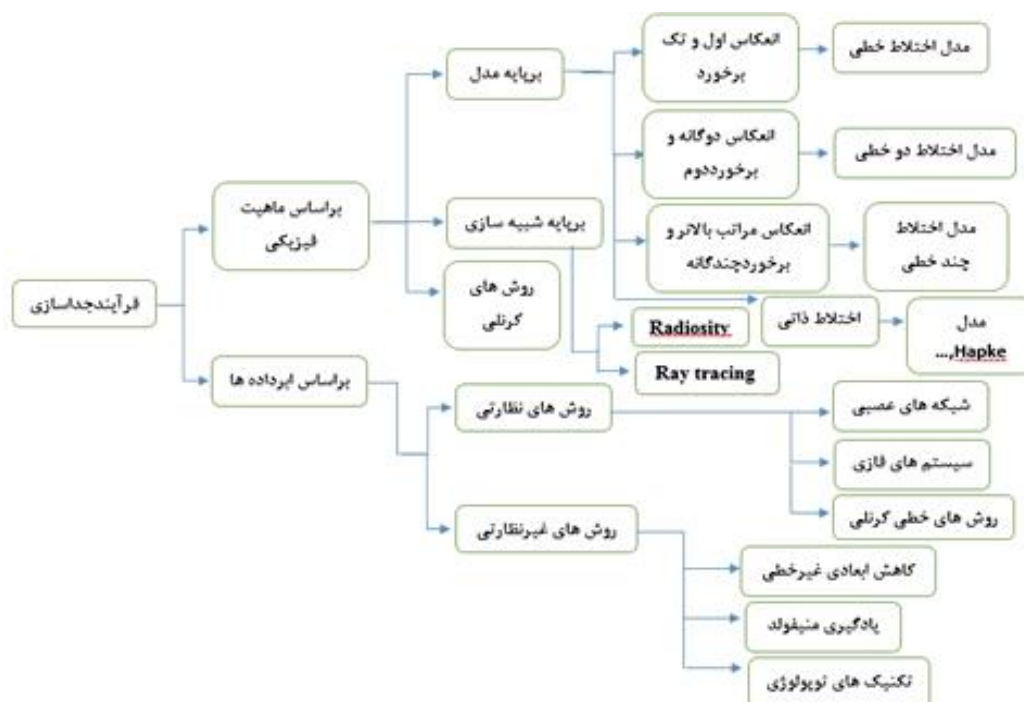


شکل ۴- حالاتی از اختلاط غیرخطی [۸]

بطور کلی، بیشتر روش‌های خطی در دو گروه روش‌های هندسی و روش‌های مبتنی بر آمار قرار می‌گیرند. روش‌های هندسی نیز به دو زیرگروه روش‌های بر پایه حضور پیکسل خالص و روش‌های مبتنی بر حداقل حجم سادک ایجاد شده تفکیک می‌شوند. درواقع، روش‌های مبتنی بر حضور پیکسل خالص نیز جزء روش‌های مبتنی بر حداقل

در صورتی که یکی از این دو فرض فوق برقرار نباشد امکان دارد حالات خطی معتبر نباشند و یکسری اثرات غیرخطی بر روی پرتو نور خروجی بوجود آید [۴۱]. در تحقیقی که در سال ۱۹۹۹، توسط موسترد و سان شین صورت گرفته، به این نتیجه رسیده اند که، خطای تخمین کسره های فراوانی برای یک مجموعه کانی امکان دارد به ۳۰ درصد برسد، در صورتیکه به جای یک سیستم غیرخطی از مدل خطی استفاده شود [۴۱، ۴۲].

تقسیم بندی های متنوعی از تکنیک ها و روش های جداسازی غیرخطی تا به امروز ارائه شده است. یک چارچوب مناسب از این الگوریتم ها در شکل (۵)، نشان داده شده است. طبق شکل، در حالت کلی روش ها به دو گروه مبتنی بر فیزیک و تکنیک های مبتنی بر ابر داده ها که در آن نیازی به فرضیات فیزیکی نیست، تقسیم می شوند. که در بخش های بعدی به تفکیک معرفی می گردند.



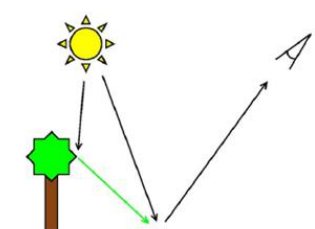
شکل ۵- فلوجارت انواع روش های مختلف جداسازی

۲- روش های مبتنی بر ماهیت فیزیکی (گروه اول)

۲-۱- انواع مدل های دوخطی

ساده ترین مدل غیرخطی در مدل سازی بازتاب های چندگانه، استفاده از تنها یک بازتاب ثانویه یا تعامل دوخطی است، که بطور شماتیک در شکل (۶)، نشان داده شده است. بعبارت دیگر علاوه بر بازتاب اصلی، یک بازتاب ثانویه از تابع هدف یا شی موردنظر وجود دارد. در این حالت، با فرض حضور دو عضو انتهایی e_1 و e_2 تداخل و تعامل دو عضو انتهایی از ضرب هادامارد (ضرب درآیه به درآیه در ماتریس ها) به فرم زیر قابل تعریف است [۴۱، ۴۳]:

$$X = e_1 \odot e_2 \quad \leftrightarrow \quad \forall n \in \{1, \dots, d\}, \quad x_n = e_{1n} \cdot e_{2n} \quad (2)$$



شکل ۶- نمایی از یک مدل دوخطی بصورت شماتیک [۴۱، ۴۳]

در این حالت، می توان مدل را بصورت یک تک پراکندگی (مشابه مدل سازی اختلاط خطی) و یک پراکندگی چندگانه همراه با محدودیت های لازم بازنویسی نمود [۴۱، ۴۳]:

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{12} e_1 \odot e_2 \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 & a_2 \geq 0 & a_{12} \geq 0 \\ a_1 + a_2 + a_{12} = 1 \end{cases}$$

فراوانی دو عضو انتهای مورد اختلاط و با فرض غیر خطی بودن در نظر گرفتند [۴۹].

در این حالت، در صورتی که F_j و F_S کسرهای فراوانی اعضای انتهایی z ، S و $\rho_j(\lambda_i)$ ، $\rho_S(\lambda_i)$ بازتاب‌های طیفی اعضای انتهایی z ، S باشند. فاکتور $F_j \rho_j(\lambda_i) F_S \rho_S(\lambda_i)$ نشان دهنده کسنوری است که بعد از بازتاب از سطح z به سطح S برخورد و سپس به ناظر می‌رسد. بنابراین مدل فان را می‌توان بصورت زیر بیان نمود [۴۹]:

$$\rho(\lambda_i) = \sum_{j=1}^m F_j \rho_j(\lambda_i) + \sum_{\substack{j,S=1 \\ j < S}}^m F_j F_S \rho_j(\lambda_i) \rho_S(\lambda_i) + \varepsilon(\lambda_i) \quad (6)$$

بمنظور کنترل و انعطاف‌پذیری مدل مذکور، در سال ۲۰۱۱، حلیمی^۳ و همکاران مدل فان را تعمیم داده و در چندین مقاله دیگر نیز روش‌های حل مدل و مقایسه‌ی آن با مدل‌های دیگر را معرفی نمودند. طبق تعبیر فیزیکی مدل فان، احتمال تعامل و تداخل دوعضو انتهایی می‌بایستی متناسب با حاصلضرب فراوانی آن دو عضو باشد. در این مدل پیشنهادی، مدل فان با اضافه کردن پارامتری مجهول و اضافی در هر تراکنش محدود شد. در این حالت، مدل دوخطی تعمیم یافته (GBM) برای دوعضو انتهایی را می‌توان بصورت زیر بیان کرد. که در آن علاوه بر محدودیت‌های قبلی، محدوده پارامتر مذکور را نیز باید در نظر گرفت [۵۰-۵۲].

$$Y_p = \sum_{r=1}^R a_r m_r + \sum_{i=1}^{R-1} \sum_{j=i+1}^R \gamma_{i,j} a_i a_j m_i \odot m_j + n \quad (7)$$

$$0 \leq \gamma_{i,j} \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, R-1\}, \forall j \in \{i+1, \dots, R\}$$

با توجه به مدل، در صورتی که $\gamma_{i,j} = 0$ باشد، مدل به یک مدل خطی کاهش می‌یابد، یعنی هیچ تداخلی بین دوعضو انتهایی وجود ندارد و اگر $\gamma_{i,j} = 1$ ، آنگاه مدل تبدیل به مدل فان می‌شود. در شکل (۷)، نمونه‌ای از سادک حاوی سه عضو انتهای برای دو مدل دوخطی تعمیم یافته (GBM) و مدل خطی (LMM) بصورت شماتیک نشان داده شده است [۵۱، ۵۲].

تداخلات و مراتب بالاتر از دو عضو انتهای بدلیل ضرب بیش از سه بازتاب می‌تواند مقدار ناچیز و ارزش کمتری نسبت به تک بازتاب اصلی داشته باشد. لذا در این نوع مدل‌های غیرخطی، مراتب بالاتر در نظر گرفته نشدند، ولی در سال‌های اخیر، بدلیل اهمیت مراتب بالاتر خصوصاً در کارهای معدنی و تداخلات کانایی، روش‌های چندخطی ارائه شده‌اند. از کاربردهای مؤثر مدل‌های دوخطی در بحث تفکیک پوشش گیاهی، تعیین تعاملات موجود بین خاک و گیاه و تأثیر خاک بر روی طیف گیاه است، بطوریکه می‌توان پی‌برد که ارتباط بین شدت باند طیفی ورودی و فراوانی اعضای انتهایی گیاه، رفتاری خطی ندارند و وابسته به نوع خاک هستند. با گسترش رابطه (۳) و استفاده از پارامترهای مختلف و اضافی انواع مدل‌های دوخطی معرفی شدند [۴۴-۴۶].

اولین مدل دوخطی در سال ۲۰۰۹، توسط ناسیمنتو و دیاز^۱ برای یک سناریوی غیرخطی تشکیل شده از یک لایه منفرد گیاه بر روی خاک در نظر گرفته شد، که در آن از یک روش نیمه نظارتی جداسازی بمنظور ارزیابی داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده استفاده گردید. در این حالت، در صورت تداخل بین دوعضو انتهایی مختلف i و j ، مدل ناسیمنتو (NM) بصورت زیر قابل بیان است [۴۷، ۴۸]:

$$X = \sum_{r=1}^R a_r e_r + \sum_{i=1}^{R-1} \sum_{j=i+1}^R \beta_{i,j} e_i \odot e_j + n \quad (4)$$

در رابطه فوق $\beta_{i,j}$ میزان گسترش تداخل بین دو جزء (عضو انتهای) است. علاوه بر این، محدودیت‌های زیر نیز بر روی مدل اعمال می‌گردد [۴۷، ۴۸]:

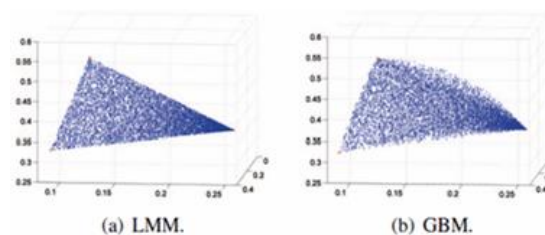
$$\begin{aligned} a_r &> 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \\ \beta_{i,j} &> 0 \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, R-1 \\ j = i, \dots, R+1 \end{cases} \\ \sum_{r=1}^R a_r + \sum_{i=1}^{R-1} \sum_{j=i+1}^R \beta_{i,j} &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

نقطه ضعف مدل ناسیمنتو عدم در نظر گرفتن بخش غیرخطی مدل بعنوان بعد سوم و حل کل مدل بصورت خطی بود. به همین جهت، در اواخر همان سال، فان^۲ و همکاران پارامتر غیرخطی را بصورت حاصلضرب نسبت

^۳ Halimi

^۱ Nascimento & Dias

^۲ Fan



شکل ۷- سادک ایجاد شده با سه عضو انتهایی برای دو مدل خطی و دوخطی [۵۱،۵۲]

در تخمین پارامترهای مجهول مدل نیز از روش های مختلفی استفاده شده است. یکی از الگوریتم های مورد استفاده، الگوریتم بیزین سلسله مراتبی است. این روش در واقع از تخمین توزیع پسین مقادیر $\theta = (a^T, \gamma^T, \sigma^2)^T$ بصورت $f(\theta|y)$ محاسبه می گردد. حل و تخمین پارامترهای توزیع پسین ایجاد شده بعلاوه پیچیدگی رابطه با استفاده از تخمین گره های معمول همچون تخمین-گر حداقل میانگین مربعات خطا (MMSE) و یا حداکثر تخمین گر پسین (MAP) امکان پذیر نیست. در نتیجه از روش های شبیه سازی مونت کارلوی زنجیره مارکوفی (MCMC) برای تولید نمونه هایی در ارتباط با توزیع مذکور استفاده شد (روش نمونه بردار گیبس). روش های MCMC نیز پیچیدگی و بار محاسباتی زیادی را به همراه داشتند و با هدف کاهش این پیچیدگی، با روش های بهینه سازی مختلف (روش های گرادیان و...) جایگزین شدند [۵۱،۵۲].

از معایب مدل GBM، عدم در نظر گرفتن تداخلات موجود بین دو ماده یکسان است. این نقص شاید بر روی سطوح صاف و هموار زیاد تأثیرگذار نباشد، ولی در مواردی که با سطوح خشن مواجه هستیم می تواند اثرات چشمگیری داشته باشد. در نتیجه الگوریتم MGBM در سال ۲۰۱۶، این مشکل را رفع کرد که در آن اثرات خودتداخلی بین دو ماده یکسان لحاظ شد [۵۳].

در سال های اخیر اکثر الگوریتم های مورد استفاده برای حل مدل GBM سنتی، بار محاسباتی بالا، حساسیت به نقطه آغازین و کارایی پایینی در مواجهه با تصاویر فراطیفی با ابعاد بالا را داشتند. به همین جهت، چانگ لی^۱ و همکاران در سال ۲۰۱۶، از الگوریتم گرادیان بهینه نستروف تحت محدودیت های مرزی استفاده کردند. الگوریتم مذکور تحت عنوان BPOGM، بر روی داده های مصنوعی و واقعی ارزیابی

شد، که نشان از بهبود و کارایی این روش نسبت به روش های دیگر داشت. همچنین به تازگی الگوریتم مذکور بر روی داده های هایپرین خوی در ایران نیز تست گردید، که نشان از بهبود و افزایش صحت این روش نسبت به روش های خطی و مرسوم را دارد [۵۴،۵۵].

مدل دوخطی مذکور با وجود اینکه یکی از محبوب ترین مدل های جداسازی فراطیفی غیرخطی تصاویر برای مراتب دوم پراکندگی در نظر گرفته می شود، ولی عملکرد آن براساس روش های جداسازی و تخمین موجود بعلاوه عدم در نظر گرفتن همبستگی فضایی تصاویر چندان رضایت بخش نیست. همچنین، کارایی مناسبی در مواجهه با نویز ناشی از تنگی و پراکندگی همچون: نویز ناشی از ضربه، پیکسل های مرده و خطای ناشی از راه راه شدگی از خود نشان نمی دهد، و تنها نویز سفید و گوسی را در نظر می گیرد به همین جهت، در سال ۲۰۱۸، مدلی تحت عنوان GBM قوی (RGBM) معرفی گردید، که قادر است بطور همزمان علاوه بر نویز گوسی، نویز ناشی از تنگی و پراکندگی را نیز محاسبه کند [۵۶].

نوع دیگری از انواع مدل های دوخطی، الگوریتم های PPNMM می باشند، که تعمیم انعطاف پذیری از مدل های خطی استاندارد هستند و اولین بار از آنها برای حل مسائل تفکیک کور منابع (BSS) استفاده شد [۵۷،۵۸].

مزیت مهمی که این الگوریتم ها دارند توانایی مدل کردن دقیق مسائل غیرخطی است. این الگوریتم ها اولین بار در سال ۲۰۱۲، توسط آلتمن^۲ و همکاران بصورت نظارتی و بمنظور جداسازی غیرخطی تصاویر فراطیفی معرفی شدند. در حالت کلی، این مدل برای L طیف $y = [y_1, \dots, y_L]^T$ از یک پیکسل مخلوط بعنوان یک تبدیل غیرخطی g از اختلاط خطی به همراه نویز گوسی برابر است با [۵۹]:

$$y_p = g\left(\sum_{r=1}^R a_r m_r\right) + n = g(Ma) + n \quad (8)$$

در این مدل، g یک تابع غیرخطی است که انتخاب مناسب آن حائز اهمیت می باشد. توابع غیرخطی چندجمله ای، سیگموئید و یا ترکیبی از هر دو، مشخصات و ویژگی های جالبی را در میحث تفکیک منابع به همراه داشته اند به همین جهت، در الگوریتم حاضر نیز، از تابع غیرخطی چندجمله ای مرتبه دوم بفرم زیر استفاده شد [۵۹]:

^۲ Altmann

^۱ Chang Li

اخیراً، یانگ^۱ و همکاران از طریق مشخصات هندسی انواع مدل‌های خطی و بمنظور کاهش پیچیدگی محاسباتی و تقلیل تأثیر اعضای انتهایی مجازی در بحث هم خطی^۲، یک روش جداسازی غیرخطی غیرنظارتی را معرفی نمودند. در این روش یک رأس غیرخطی منحصر به فرد جایگزین همه اعضای انتهایی مجازی می‌گردد. در این حالت، اعضای انتهایی بطورمستقیم با اعضای اختلاط خطی تقریبی‌شان تصویر می‌گردند و سپس تخمینی از کسرهای فراوانی اعضا برآورد می‌گردد [۶۳-۶۵].

در سال ۲۰۱۸، یک مدل اختلاط نرمال دوخطی (BNMM) با توجه به مدل PPNMM جهت کاهش اثر غیرخطی و استفاده از یک مدل توزیع نرمال بمنظور کاهش تغییرپذیری اعضای انتهایی ارائه شد. براساس این مدل، نویسنده یک الگوریتم مونت کارلوی همیلتون را برای انجام فرآیند جداسازی توسعه داد، که نتایج تجربی بر روی داده‌های مصنوعی و تصاویر معیار نشان از عملکرد مناسب خروجی الگوریتم پیشنهادی نسبت به الگوریتم-های جداسازی کلاسیک داشت. همچنین برخلاف سایر روش‌ها، در این روش تأثیر غیرخطی بودن و تغییرپذیری بطورهمزمان در نظر گرفته شد [۶۶].

از مدل‌های دوخطی دیگر که نسبت به مدل‌های قبلی از اهمیت کمتر و موردتوجه پژوهشگران این حوزه واقع نشد و صرفاً جنبه موردی داشت می‌توان به مدل‌های چن^۳ و مگانم^۴ اشاره نمود. مدل چن در سال ۲۰۰۶ و بعنوان یک مطالعه موردی برای توصیف اثرات غیرخطی بین درخت، خاک، گیاه و سایه معرفی شد. در این مطالعه عملکرد خطی و غیرخطی بودن آنالیز جداسازی با استفاده از یکسری داده‌های منحصر به فرد تهیه شده از طریق سکوی بالنی شکل که در یک نقطه روی زمین ثابت شده بود، بررسی گردید و مدل اختلاط غیرخطی برای چهار عضو انتهایی (درخت p_t ، خاک p_b ، گیاه p_g ، اثر سایه p_s) تعریف شد. نکته حائزاهمیت اینکه بدلیل ساختار موجود بین اعضای انتهایی، در این مدل تنها تداخل بین درخت با خود و سایر اعضا مؤثر تشخیص داده شد و سایر تداخلات بعلت شدت کم نادیده گرفته شده‌اند [۶۷].

$$g_b: [0,1]^L \rightarrow R^L \\ X \rightarrow [X_1 + bX_1^2, \dots, X_L + bX_L^2]^T \quad (9)$$

در حالت $b=0$ ، مدل به مدل خطی کلاسیک کاهش پیدا می‌کند. این مدل نسبت به مدل‌های دیگر، خاصیت خودتداخلی (بین دوماده یکسان) را محاسبه می‌کند و در آن هیچ محدودیتی روی مقادیر ممکن b وجود ندارد. چندین روش نیز بمنظور حل مدل ارائه شده است که می‌توان از مهمترین آنها الگوریتم بیزین را نام برد [۵۹].

بخش غیرخطی این مدل همواره با یک پارامتر واقعی b بعنوان پارامتر غیرخطی بودن کنترل می‌شود در نتیجه می‌توان میزان غیرخطی بودن را براساس تخمین پارامتر موجود با استفاده از آزمون‌های آماری تعیین نمود. در این حالت یک حدآستانه دلخواه می‌تواند برای تصمیم‌گیری درمورد اینکه آیا پیکسل مشاهده شده با مدل خطی سازگاری بهتری دارد یا با مدل غیرخطی، استفاده شود [۶۰].

اکثر روش‌های استخراج اعضای انتهایی بر روی مدل‌های خطی تکیه دارند. با این حال، روش‌های هندسی استخراج تا حدودی می‌توانند برای حالات غیرخطی در نظر گرفته شوند. ولی این روش‌ها نیز از کمبود عدم وجود پیکسل خالص در تصویر رنج می‌برند. به همین منظور، الگوریتم جداسازی بیزین غیرنظارتی بر روی مدل‌های دوخطی PPNMM در سال ۲۰۱۴ توسط آلتمن و همکاران ارائه شد. روش پیشنهادی بطورهمزمان اعضای انتهایی و کسرهای فراوانی را تخمین می‌زند و نیازی به حضور پیکسل خالص در تصویر مشاهده شده ندارد. در این حالت، بعلت تعداد زیاد پارامترهایی که باید برآورد شوند، یک الگوریتم مونت کارلوی همیلتون مقید (CHMC) به جای الگوریتم نمونه بردار گیبس برای برآورد و انتخاب نمونه‌ها معرفی شد [۶۱].

یک استراتژی جدید دیگری بمنظور تخمین همزمان اعضای انتهایی و فراوانی‌های مرتبط با آنها با استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی ازدحام ذرات دومتغیره (BiPSO) براساس مدل فان ارائه گردید. در این حالت، با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی چندمتغیره نیازی به اعمال محدودیت‌های پیچیده‌تر به جهت بکارگیری از فاکتورهای جریمه نیست. الگوریتم مذکور نیازی به حضور پیکسل خالص ندارد و طبق فرآیند اجرای الگوریتم مقادیر اعضای انتهایی و کسرهای فراوانی با توجه به یکدیگر در هر لحظه بروزرسانی می‌شوند [۶۲].

^۱ Yang
^۲ Collinearity
^۳ Chen
^۴ Meganem

ایده طراحی مدل مگانم نیز بر پایه وجود اثر سایه در ساختارهای سه بعدی پایه ریزی شده است. بطوریکه در این حالت، برخلاف سطوح صاف و یکنواخت، ساخت مدلی غیرخطی امری لازم و اجتناب ناپذیر است. این مدل اختلاط در سال ۲۰۱۴ توسط مگانم و همکاران ارائه گردید و با محیط های شهری سازگاری بیشتری دارد. اساس این مدل اختلاط، با معادلات فیزیکی بر پایه تئوری انتقال تابش شروع می شود و در واقع از طریق معادلات این تئوری، مدل هایی برای محیط های شهری شبیه سازی می گردند که در آن عواملی نظیر میزان تابش خورشید، اثرات پراکندگی اتمسفر، تابش ساطع شده بوسیله همسایگی و بازتاب های چندگانه در نظر گرفته می شوند [۶۸].

مدل های دوخطی اشاره شده با وجود تفسیرهای فیزیکی مناسب و روشن، می توانند دارای نقاط ضعف و کاستی هایی نیز باشند. همواره به خاطر اینکه یک اصطلاح دوخطی شامل ضرب حداقل دوعضو انتهایی با مقادیر کمتر از یک است، این امکان وجود دارد که این اندازه کوچکتر از مقدار عضو انتهایی واقعی باشد. این نقص در مدل هایی که این تعاملات دوجانبه با ضرایب و پارامترهای کوچکتر از یک همراه هستند، تشدید می شود. همانند پارامترهایی که در مدل GBM در نظر گرفته شد [۴۱].

علاوه بر این، در چندین مدل دوخطی همچون GBM تعداد زیادی پارامتر آزاد معرفی شده است که در حالت مرتبه دوم M^2 برای M عضو انتهایی، می تواند تعداد اعضای غیرخطی بطور فزاینده ای افزایش یابد و ممکن است مدل بسمت یک بیش برآزش^۱ سوق پیدا کند. البته برای حل این مشکل و کاهش تعداد اعضای انتهایی غیرخطی می توان از یک ارتباط فضایی بین اعضا استفاده کرد و در آن تنها اعضای انتهایی در همسایگی برای ضرب و عامل تداخل در نظر گرفته شوند. در این حالت، می توان از یک الگوریتم جستجوی EVLMM بمنظور پیدا کردن اعضای انتهایی واقعی استفاده نمود [۴۱، ۶۹].

۲-۲- انواع مدل های چندخطی

مدل های دوخطی معرفی شده برای تداخل بین دوعضو انتهایی قابل استفاده اند ولی بصورت تئوری این مدل ها می توانند برای تداخل بیش از دوعضو با معرفی

^۱ Overfitting

مدل های سه خطی و یا مراتب بالاتر و یا استفاده از چندجمله ای های درجه بالاتر در مدل PPNMM به کار گرفته شوند. چنین مراتب بالاتری ممکن است باعث ایجاد مقادیر سیگنال کوچکتر از یک و ناچیز باشد و سهم آنها در کل سیگنال طیفی قابل ملاحظه نباشد، چون سیگنال های طیفی حاصل ضرب چندین بازتاب و مقادیر فراوانی شان هستند. علاوه بر آن، حل مسائلی با چنین درجات بالایی همیشه دشوار و مشکل بوده است. ولی در مقابل، در مواردی همچون کارهای معدنی چنین تداخلات چندگانه می توانند نقش اساسی را در سیگنال طیفی بازی، و قابل اغماض نباشند [۷۰].

نکته حائز اهمیت دیگر، در مورد تصاویر فراطیفی دورسنجی، محدوده بردارهای طیفی آنهاست که می بایستی در بازه $[0, 1]^d$ قرار بگیرند و این محدودیت باید در مدل های اختلاط لحاظ شوند که در مراتب بالاتر، شرط مذکور برقرار نیست. بعنوان مثال، در صورتی که یک مدل PPNMM با پارامتر $b=1$ ، و بدون وجود نویز یا حالتی از مدل فان در نظر گرفته شود، همواره برای مراتب بالاتر می توان نوشت [۷۰]:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^p a_i e_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j e_i \odot e_j \\ &+ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_i a_j a_k e_i \odot e_j \odot e_k + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

که در صورتیکه $y = \sum_{i=1}^p a_i e_i$

$$x = y + (y \odot y) + (y \odot y \odot y) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} y^i \quad (11)$$

در این حالت، در صورتی که همه اجزای y در محدوده $[0, 1]$ باشد. با در نظر گرفتن تصاعد هندسی بین مقادیر بازتابی می توان به نتیجه زیر رسید:

$$x = \frac{y(1 - y^n)}{1 - y} = \frac{y}{1 - y} = \frac{\sum_{i=1}^p a_i e_i}{1 - \sum_{i=1}^p a_i e_i} \quad (12)$$

با کمی دقت در رابطه حاصل می توان پی برد که بازتاب های بدست آمده در محدوده $[0, 1]$ قرار نمی گیرند و مدل های دوخطی برای مراتب بالاتر اختلاط نتایج واقعی را منعکس نمی کنند. به همین جهت، یک مدل چندخطی MLM که گسترش یافته مدل های قبلی است، معرفی شد.

در سال ۲۰۱۹، هیلن^۱ و همکاران با استفاده از تقریب-های تابش نور و توصیف تداخلات نوری براساس ترسیم گراف و بکارگیری فرآیند تصادفی بمنظور محاسبه مسیر گراف ترسیمی و تعیین وزن‌های در نظر گرفته شده برای هر مسیر، مدل گرافیکی جامعی را برای انواع مدل‌های محبوب موجود همچون: خطی، دوخطی، چندخطی (MLM) اجرا و دوباره بازنویسی نمودند. علاوه بر آن، یک مدل جدید که تعمیم یافته مدل MLM است نیز معرفی گردید که در آن تأثیر اثر سایه در تصویر در نظر گرفته شد [۷۳، ۷۲].

یک مدل چندخطی دیگر، تعمیم یافته مدل دوخطی GBM، تحت عنوان مدل دوخطی اصلاح شده در سال ۲۰۱۸ ارائه شد در این حالت، ابتدا با استفاده از روش SID، اعضای انتهایی مشخص و سپس با در نظر گرفتن یک مدل خطی و استفاده از الگوریتم NMF فراوانی اعضا تخمین زده شد. در ادامه، میزان پارامتر غیرخطی بودن برای مدل پیشنهادی با استفاده از تخمین بیز تعیین گردید و مدل پیشنهادی MBM با توجه به معلومات و مفروضات موجود طراحی شد [۷۴].

از مدل‌های چندخطی دیگر، ارائه شده توسط پژوهشگران می‌توان به مدل P خطی مارینونی و همکاران را اشاره نمود، که طی سال‌های اخیر به مرور طراحی و نقاط ضعف آن بهبود یافته است. در سال ۲۰۱۵ مدل اولیه P خطی که توانایی مدل‌سازی تداخلات در مقیاس میکروسکوپی و ماکروسکوپی را داشت طراحی و با استفاده از روش تجزیه POD ضرایب غیرخطی و اعضای انتهایی مدل تعیین گردید. روش تجزیه پلی تاپ راه حلی است که در آن مسئله غیرخطی، خطی سازی می گردد. در این حالت، یک پلی تاپ محدب بصورت زیربخش‌هایی از تعداد متناهی نیم فضا تعریف می‌گردد و سپس با طراحی ارتباط بین دو رأس پلی تاپ با استفاده از توابع مثلثاتی، می‌توان آنرا بصورت معادلات خطی برای بقیه رئوس پلی تاپ تعمیم داد. در این حالت، مدل پیشنهادی برای $P \geq 2$ بصورت تحلیلی به فرم زیر طراحی گردید [۷۵، ۷۶]:

$$y_l = \sum_{r=1}^R a_{rl} m_r + \sum_{k=2}^P \left\{ \sum_{i=1}^R \sum_{j=i}^R [\vartheta_{ikl} m_i + \vartheta_{jkl} m_j]^k + \sum_{\xi_k=1}^{\xi_k} [\zeta_{ivkl} m_i]^{\nu_k} \odot [\zeta_{j\xi kl} m_j]^{\xi_k} \right\} \quad (14)$$

^۱ Heylen

مدل مذکور تنها یک پارامتر خاص را مدنظر قرار می‌دهد و آن توصیف احتمال تداخل اضافی برای پرتو نور ورودی است. علاوه بر آن، مدل MLM برای هر پیکسل تخمینی، جز غیرخطی بودن را نیز تعیین می‌کند. این مدل شامل همه درجات تداخل اعضای انتهایی و یک استدلال فیزیکی اساسی را به همراه دارد و بردارهای بازتابی تولید شده بوسیله این مدل با در نظر گرفتن فرآیند بازتاب در یک پروسه مارکوفی گسسته در محدوده [0,1] قرار می‌گیرند. در نتیجه رابطه چندخطی با فرض اینکه بعد از هر تداخل با یک ماده، پرتو نور با احتمال P دارای تداخلات اضافی است و با احتمال (1-P) تداخل دیگری صورت نگرفته و پرتو مستقیماً توسط ناظر دریافت می‌شود، بصورت زیر بیان می‌گردد [۷۰]:

$$\begin{aligned} x &= (1-P) \sum_{i=1}^P a_i \omega_i \\ &+ (1-P)P \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P a_i a_j \omega_i \odot \omega_j \\ &+ (1-P)P^2 \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P a_i a_j a_k \omega_i \odot \omega_j \odot \omega_k \dots \\ &= (1-P)y + (1-P)Py^2 + (1-P)P^2y^3 \dots \\ &= (1-P)y + Py \odot [(1-P)y + (1-P)Py^2 \dots] \\ &= (1-P)y + Py \odot x \rightarrow x \\ &= \frac{(1-P)y}{1-Py} \\ &= \frac{(1-P) \sum_{i=1}^P a_i \omega_i}{1 - P \sum_{i=1}^P a_i \omega_i} \end{aligned} \quad (13)$$

طبق رابطه، مقادیر انعکاسی برای احتمال $P < 1$ ، بازه [0,1] قرار می‌گیرند و در صورتی که $P = 0$ باشد، مدل به مدل خطی کاهش می‌یابد [۷۰].

اکثر مدل‌های اختلاط غیرخطی و روش‌های جداسازی ارائه شده بطور صریح درجه‌ی پراکندگی در هر باند را یکسان فرض می‌کنند و بطور کلی اساس غیرخطی بودن در آنها براساس پیکسل می‌باشد (پیکسل محور). این مورد با موقعیت‌های واقعی در تضاد است و اختلاط طیفی ذاتاً وابسته به طول موج است. بعنوان مثال، میزان تداخل بین گیاه و خاک در قلمرو NIR به مراتب می‌تواند شدت بیشتری نسبت به منطقه مرئی داشته باشد. به همین جهت، در سال‌های اخیر، مدل تعمیم یافته‌ای از مدل MLM معرفی شده است که در آن این ضعف حل و اساس الگوریتم باند محور می‌باشد [۷۱].

جاییکه، $v_k = k - \xi_k$ و $m_i^k = [m_{i_n}^k]_{n=1, \dots, N}$ علاوه بر این، کمیت های ξ_{ikl} ، $\xi_{i\xi_{kl}}$ ، $\xi_{iv_{kl}}$ اثرات غیرخطی ارائه شده برای آمین عضوتهایی به روی L آمین پیکسل درون k امین مرتبه تداخل هستند و همواره سه پارامتر فوق داخل فضای $[0,1]^3$ قرار می گیرند. در رابطه فوق، با قرار دادن $P=2$ مدل به یک مدل دوخطی کاهش می یابد. در ادامه، با استفاده از تغییر متغیر و ساده سازی، مدل فوق را می توان بصورت زیر بیان نمود [۷۶]:

$$y_l = \sum_{r=1}^R a_{rl} m_r + \sum_{k=2}^P \sum_{r'=1}^R \beta'_{r'kl} m_{r'}^k \quad (15)$$

که در آن $\beta'_{r'kl} = \psi_{r'kl}^k \cdot (R+1)$ در ارتباط با تغییر متغیر $\psi_{r'kl}^k$ است که در آن محدودیت های فیزیکی زیر نیز می بایستی اعمال گردد (برای بررسی بیش تر می توان به رفرنس مراجعه نمود) [۷۶]:

$$\begin{aligned} a_{rl} \geq 0, \beta'_{rkl} \geq 0 \\ \sum_r a_{rl} + \sum_{rk} \beta'_{rkl} = 1, \quad \forall r \in \{1, \dots, R\}, k \in \{2, \dots, P\} \end{aligned} \quad (16)$$

روش مذکور نمی تواند مراتب غیرخطی را خودش تخمین بزند، در نتیجه ممکن است باعث عملکرد پایین فرآیند و پدیده بیش برآزش گردد. به همین منظور، برای رفع این مشکل از یک روش یادگیری براساس شبکه عصبی مصنوعی (ANN)، میزان غیرخطی بودن P در ابتدا تخمین و سپس فرایند جداسازی انجام گرفت [۷۷].

مدل فوق شاید در توصیف مراتب غیرخطی خیلی بالا بعلت افزایش بارمحاسباتی و... دچار مشکل گردد به همین دلیل، یک مدل هارمونیک براساس مراتب بی نهایت جهت توصیف این مشخصات معرفی و ترکیبی هارمونیک از طیف اعضای انتهایی برای تعیین تداخلات فراخطی بصورت زیر تعریف گردید [۷۸، ۷۹]:

$$y_l = \sum_{r=1}^R \widehat{a}_n (\cos \underline{m}_r + \sin \underline{m}_r) + \sum_{k=2}^{\widehat{P}} \sum_{r=1}^R \widehat{\beta}_{rkl} (\cos \underline{m}_r^k + \sin \underline{m}_r^k) \quad (17)$$

برای حل این مدل اختلاط $\widehat{P}$ هارمونیک ($\widehat{P} - \text{HMM}$) نیز، یک روش سینوسی براساس تجزیه پلی تاپ بنام SiPOD ارائه شد. علاوه براین، یک چارچوب کاربردی از مدل های مراتب بالاتر پیشنهادی جهت شناسایی کانی های

مافیکی بر روی سطح کره مریخ توسط مارینونی و کلاینت معرفی گردید [۷۸-۸۱].

یک مدل نرمالیزه شده براساس مدل P خطی نیز معرفی گردید (NPLA)، که در آن مقادیر فراوانی و ضرایب غیرخطی نرمال سازی شدند. با این کار میزان بیش برآزش مدل کاهش یافت. در این حالت، با انتخاب یک محدودیت نرم L_2 برای فراوانی ها و ضرایب غیرخطی، مسئله تبدیل به یک مسئله بهینه سازی محدب گردید [۸۲].

اگرچه مدل های pLMM و pHMM می توانند بارزسازی صحیحی از تصاویر فراطیفی را به ارمغان آورند ولی نمی توانند بطور مستقیم کسرهای فراوانی اعضا را ارزیابی کنند. علاوه بر آن، همانطور که قبلاً اشاره شد، مدل اختلاط چندخطی (MLM) که ترکیب شده مشخصات دومدل دوخطی PPNMM و GBM در مراتب بالاتر تداخل بود، همواره توانایی ارزیابی رخداد احتمالاتی تداخلات غیرخطی در میان عناصر تصویر را داشت. در همین راستا، مدلی تحت عنوان مدل اختلاط چند هارمونیک (MHPNMM) در سال ۲۰۱۸ معرفی شد، که حالتی گسترش یافته از مدل MLM می باشد و قادر بود که بطور همزمان مزایای مدل های MLM، pLMM و pHMM را در نظر بگیرد [۸۳].

۲-۳- مدل های اختلاط ذاتی یا داخلی

بطور کلی اختلاط های ذاتی یا داخلی، مخلوطی از ذرات یا دانه ها هستند که در تماس نزدیک با یکدیگر و اصطلاحاً حالت بسته بندی دارند، ذرات کانیایی موجود در ماسه و خاک یا قطرات موجود در امولسیون ها یا ابرها مثال هایی از این نوع اختلاط ها محسوب می شوند. مشخصات مطلوب برای چنین اختلاط هایی به پارامترهای زیادی همچون تعداد کل ذره و کسری از هر جزء، توزیع اندازه ذرات برای هر جزء، شکل و جهت دانه ها، فاصله متوسط بین بازتاب ها، خصوصیات جذب و پراکندگی، تابع توزیع انعکاس دوجتهی هر ماده (BRDF) وابسته است [۴۱].

همواره در یک اختلاط داخلی، نور بطور معمول چندین بار با ذرات تشکیل دهنده مخلوط قبل از رسیدن به ناظر برخورد می کند و در هر برخورد با ذره فوتون ممکن است در یک جهت تصادفی جذب یا پراکنده شود. بطور کلی، کسری از فوتون های ورودی پراکنده شده توسط یک ذره نسبت به کل فوتون های تحت تأثیر قرار گرفته بوسیله آن ذره را می توان

بنابراین در این حالت، انعکاس در یک طول موج داده شده (λ) از یک سطح شامل ذرات دلخواه با تقریب نزدیک به هم را می توان بصورت زیر بیان کرد [۴۱، ۸۴]:

$$x(\mu_s, \mu_0, g) = \frac{\omega}{4\pi \mu_0 + \mu_s} \{ [1 + B(g)]P(g) + H(\omega, \mu_0)H(\omega, \mu_s) - 1 \} \quad (۱۸)$$

که در آن ω متوسط آلودی پراکندگی منفرد (SSA) است. $B(g)$ تابع پس انتشار، $P(g)$ متوسط تابع فاز ذرات، $H(\omega, \mu_s)$ و $H(\omega, \mu_0)$ تابع پراکندگی چندگانه یا تابع چاندراکسار و $\mu_0 = \cos(\theta_0)$ و $\mu_s = \cos(\theta_s)$ است. در واقع مدل هپکه، معادله ای را ارائه می دهد که انعکاس دوطرفه از یک ماده با ذرات خیلی نزدیک به هم را با پارامترهای فیزیکی و نوری ارتباط می دهد [۴۱، ۸۴].

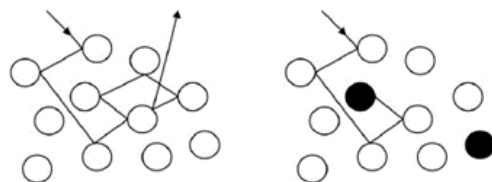
رابطه فوق، براساس یکسری تقریبها و طبق پژوهشی که توسط موسترداد و پیترز تحت فرضیات سنجش از دوری صورت گرفت، ساده سازی گردید. در این حالت، رابطه ساده شده هپکه که برای موقعیت های عملی مناسب تر و کارآمدتر است بصورت زیر قابل بیان است [۸۴، ۸۵]:

$$x(\mu_s, \mu_0, \omega) = \frac{R(\omega)}{(1 + 2\mu_s \sqrt{1 - \omega})(1 + 2\mu_0 \sqrt{1 - \omega})} \quad (۱۹)$$

اخیراً چندین مدل پیشنهادی از ترکیب مدل های خطی با مدل هپکه بمنظور حل مسائل اختلاط ذاتی و کانمایی معرفی شده است. دلیل بکارگیری این مدل ها، امکان وجود هر دو حالت خطی و اختلاط داخلی در یک زمینه معین در موقعیت های واقعی است. یکی از این ترکیبات در سال ۲۰۱۰، توسط ناسیمنتو و دیاز ارائه شد که در آن از یک روش دو مرحله ای برای جداسازی فرایندی اختلاط های داخلی استفاده می شد [۸۶].

یک الگوریتم K-FCLS با کرنل های مختلف نیز برای جداسازی اختلاط های داخلی توسط برودواتر^۲ و همکاران ارائه گردید و یک مقایسه بین ۴ تابع کرنلی خطی، RBF، چندجمله ای و کرنل های پیشنهادی صورت گرفت. علاوه بر آن، این روش ها با موفقیت بر روی داده های آزمایشگاهی که در آنها اعضای انتهایی شناخته شده و اثرات اتمسفری غایب هستند، تست شد. همچنین، بر روی

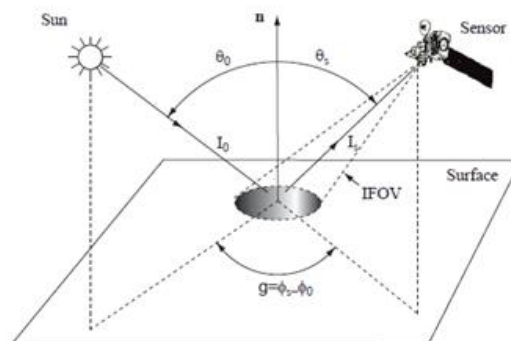
اصطلاحاً آلودی پراکندگی منفرد (SSA) نامید. بعلت تداخل چندگانه در یک اختلاط ذاتی یک ارتباط پیچیده ای بین SSA ذرات تشکیل دهنده و حجم بازتاب برای اختلاطی که یک ناظر اندازه گیری می کند، وجود دارد. شکل (۸)، یک طرح شماتیک برای بازتاب های چندگانه بین ذرات در یک تداخل داخلی را نشان می دهد [۴۱].



شکل ۸- طرح شماتیک نشاندهنده انعکاس چندگانه که بین دانه ها در یک اختلاط رخ می دهد. سمت چپ، دانه ها آلودی بالایی دارند بنابراین احتمال پراکندگی در هر دانه بالاست. سمت راست، کسر پایینی از آلودی برای هر دانه را نشان می دهد بنابراین در هر مسیر و برخورد با دانه احتمال جذب وجود دارد [۴۱]

مدل های فراوانی بمنظور توصیف چنین اختلاط های ذاتی و داخلی خصوصاً در بحث کانمایی تا به امروز معرفی شده است، تا جاییکه به چنین اختلاط هایی، اختلاط های کانمایی نیز اطلاق می شود. یکی از محبوب ترین و پرکاربردترین این مدل ها، مدل هپکه نام دارد که توسط بروس هپکه در سال ۱۹۸۱ ارائه گردید [۴۱، ۸۴].

مدل هپکه براساس تئوری انعکاس دوجهتی و اصل های بنیادین در بحث انتقال تابش (RT) بیان شده توسط کارهای چاندراکسار^۱ توسعه پیدا کرده است. در صورتی که یک طرح شماتیک برای یک مدل انتقال تابش در شکل (۹)، نشان داده شده باشد، با توجه به شکل، زوایای θ_0 و θ_s نسبت به نرمال زمین n ، زوایای برخورد و پراکندگی نامیده می شوند و در آن $g = \theta_0 - \theta_s$ برابر با زاویه فاز است [۸۴].



شکل ۹- طرح شماتیک از یک مدل انتقال تابش [۸۴]

^۲ Broadwater

^۱ Chandrasekhar

داده های فراطیفی واقعی های مپ^۱ نیز آزمایش و مورد بررسی قرار گرفت. در این حالت، تعداد اعضای انتهایی و اثرات اتمسفری از قبل مجهول بودند، ولی با این حال الگوریتم نتایج مثبتی را بهمراه داشت [۸۷-۸۹].

در سال ۲۰۱۲، کلوز^۲ ارتباط بین اختلاط خطی و غیرخطی را بررسی نمود و مدلی تحت عنوان مدل چنداختلاطی MMP ارائه کرد. این مدل یک پیکسل را بصورت اختلاط ماکروسکوپی از اعضای انتهایی و یک اختلاط میکروسکوپی (از تابع توزیع انعکاس دوطرفه) در نظر می گرفت و قادر بود بطور صحیح فرآیند جداسازی تصاویر فراطیفی تشکیل شده از هر دو نوع اختلاط را بطور مستقیم و بدون نیاز به دانش قبلی از انواع اختلاطها تخمین بزند [۹۰، ۹۱].

در سال های اخیر مدلی مشابه MMP که در آن نیز مدل های خطی و اختلاط های غیرخطی باهم ترکیب می شوند، توسط هیلن ارائه شد که نتایج بهتری در مقایسه با مدل های خطی و MMP از خود نشان داد (خطای بازسازی کمتر و ضرایب فراوانی صحیح تر). روش مذکور برخلاف الگوریتم MMP که برای یک اختلاط کانایی در نظر گرفته می شد، با در نظر گرفتن هر طیف پیکسلی بعنوان ترکیب خطی از اختلاط های ذاتی می توانست مدل MMP را گسترش دهد و به همین جهت، مدل مذکور تحت عنوان اختلاط خطی برای اختلاط داخلی (LIM) معرفی گردید [۹۲].

تئوری های دیگری نیز در این سال علاوه بر مدل هیپکه معرفی شده اند، که از آنها می توان به مدل ایزوگرین^۳ در سال ۱۹۹۲، میشچنکو^۴ در سال ۱۹۹۹ و تئوری شوکرافت^۵ به سال ۱۹۹۹ اشاره کرد. این مدل ها توانایی تخمین دقیق و صحیحی از فراوانی و اندازه ذره را در مورد سطوح پودر شده می توانند ارائه دهند. در واقع این روش ها در کارهای آزمایشگاهی و تست های زمینی بمنظور استخراج ضرایب فراوانی با داشتن اندازه دقیق ذره با صحت بین ۵ تا ۱۰٪ مؤثر و کارا هستند، ولی بدلیل ساختار بشدت پیچیده و نیاز به داده ها و اطلاعات قبلی برای انجام، از محبوبیت کمتری برخوردارند [۹۳-۹۶].

اخیراً یک روش غیرخطی از ترکیب دو مدل هیپکه و شوکرافت برای فرآیند جداسازی استفاده شده که در آن آنالیز کمی کانیهها در یک پروسه سه مرحله ای انجام می گیرد. با توجه به اینکه از نقاط ضعف مدل هیپکه، نیاز این مدل به وجود ثابت های نوری برای تعیین SSA می باشد، در نتیجه، فقدان این ثابت های نوری برای گستره وسیعی از کانیه ها، محاسبات برای SSA را محدود می کند. بنابراین براساس مدل پیشنهادی در مرحله اول فرآیند، ثابت های نوری با استفاده از مدل شوکرافت محاسبه و سپس در مرحله بعدی آلبدوهای پراکندگی و چندگانه برای هر عضو انتهایی از طریق معادلات چاندراکسار استخراج می گردد و نهایتاً، هر طیف اختلاط با ایجاد یک جدول جستجو بین انعکاس و فراوانی هر عضو انتهایی براساس مدل هیپکه ساخته می شود [۹۷، ۹۸].

۴-۲- روش های برپایه شبیه سازی

از انواع دیگر روش های غیرخطی براساس تقسیم بندی ارائه شده می توان معالات ردیابی پرتو و رادیوسیتی^۶ را عنوان کرد، که بیشتر جنبه آزمایشگاهی داشته و در گرافیک های کامپیوتری و تعیین پرتو نور در یک تصویر مجازی و برای کارهای شبیه سازی مورد استفاده قرار می گیرند. در همین راستا، برای تعیین نور در یک فضای مجازی، یک نقطه آغازین مورد استفاده در گرافیک های کامپیوتری، معادله رندرینگ است. این معادله، توصیف کننده پرتو نور خروجی از یک نقطه در یک جهت مشخص بعنوان مجموع پرتو نور ورودی انعکاسی و منتشره می باشد. وابستگی های زاویه ای نیز از طریق BRDF معرفی می شود. در این حالت، معادله رندرینگ فرض می کند که توصیف هندسی تصویر موجود، و بصورت زیر قابل بیان است [۴۱]:

$$B(X, \omega) = E(X, \omega) + \int_S \rho(X, \omega, \omega') B(X', \omega') G(X, X') dA \quad (20)$$

که در آن، $B(X, \omega)$ پرتو نور در طول موج ω از نقطه X روی یک سطح در جهت ω ، $E(X, \omega)$ پرتو منتشره در جهت ω و برای منابع نوری غیرصفر، $\rho(X, \omega, \omega')$ ، طول موج وابسته به BRDF در X, S توصیف کننده کل سطوح

^۱ HyMap

^۲ Close

^۳ Isograin

^۴ Mishchenko

^۵ Shkuratov

^۶ Ray tracing & Radiosity

همه جفت نقاط در آن فضا انجام می‌شود، که این روش‌ها اصطلاحاً ترفند کرنلی^۱ نامیده می‌شوند و هر مدل خطی می‌تواند بوسیله این ترفند کرنلی تبدیل به یک مدل غیرخطی شود [۴۱].

ترفند کرنلی یک روش محبوب برای معرفی غیرخطی بودن در یک الگوریتم خطی دیگر است، که می‌توان آنرا براساس دو ایده کلی پایه‌ریزی نمود: یکی، طراحی الگوریتمی در فضای ویژگی که در آن از ضرب داخلی استفاده گردد و دیگری، استفاده از یک تابع کرنلی که توصیف‌کننده ضرب داخلی بین دو نقطه در فضای ویژگی و بعنوان تابعی از این دونقطه در نظر گرفته شود. از انواع الگوریتم‌هایی که قادر به انجام با چنین کرنل‌هایی هستند را می‌توان به کرنل پرسپترون^۲، SVM، پرازش‌های گوسی، PCA، همبستگی کانولوشن، خوشه‌بندی طیفی و فیلترهای تطبیقی اشاره کرد [۴۱].

یکی از روش‌های بر پایه کرنل، الگوریتم حداقل مربعات مقید کامل، کرنل‌سازی شده می‌باشد، که توسط برودواتر و برای چندین کرنل مختلف ارائه گردید و قبلاً بدان اشاره شد و می‌توانند در این گروه از روش‌ها نیز قرار گیرند [۸۷-۸۹].

در سال ۱۹۹۴، الگوریتم (OSP) یا تصویربردار زیرفضای اورتوگونال بمنظور تعیین امضای طیفی، تفکیک‌پذیری و طبقه‌بندی اهداف معرفی گردید. (OSP)، یک الگوریتم خطی براساس مدل اختلاط خطی است و قادر به برقراری همبستگی مراتب بالاتر باندهای طیفی نیست، در نتیجه اختلاط غیرخطی امضای طیفی در داده‌های واقعی را نمی‌تواند تشخیص دهد. پس این روش به اندازه کافی برای پردازش داده‌های پیچیده خصوصاً در تصاویر فراطیفی انعطاف پذیر نیست. این روش در مورد طبقه بندی‌های خطی زمانی که داده بطورخطی تفکیک نیافته باشد نیز دچار شکست می‌گردد. در این حالت، پس از تبدیل داده‌های واقعی در داخل یک فضا با ابعاد خیلی بالا بوسیله یک نقشه برداری غیرخطی مناسب، داده‌های نقشه برداری شده بطور خطی در این فضای ویژگی ابعاد بالا قابل تفکیک می‌باشند. در همین راستا، یک نسخه غیرخطی براساس کرنل از الگوریتم مذکور تحت عنوان

قابل دید در تصویر از نقطه نظر X ، ω' بردار از X' تا X و $G(X, X')$ فاکتور هندسی بین دو سطح است [۴۱].

این معادله به طول موج وابسته است که می‌توان آنرا با اضافه کردن فاکتورهایی همچون: انتقال، انتشار، فلورسانس و ... ارتقاء داد. در حالی که روش ردیابی پرتو اغلب نتایج واقعی را به همراه دارد، اما همیشه نیازمند یک توصیف هندسی با جزئیات مشخص از تصویر می‌باشد و این کار نیز مستلزم بار محاسباتی زیادی است، اما می‌توان آنرا با تکنیک‌های عددی و روش‌های تحلیلی ساده‌سازی نمود. از این رو، با استفاده از یکسری فرضیات اضافی می‌توان راه حل‌های دقیقی از سناریوهای ساده بدست آورد، که در این حالت، معادله رندرینگ به کمک فرضیات پراکندگی لامبرترین ساده‌سازی می‌شود، بطوریکه در آن می‌توان فاکتور هندسی را بطور صریح تعیین کرد. نتایج حاصل از این ساده سازی تحت عنوان معادله رادیوسیتی بصورت زیر قابل تعریف است:

$$B(X) = E(X) + \rho(X) \int_S B(X') \frac{\cos(\theta_X) \cos(\theta_{X'})}{\pi r^2} dA' \quad (21)$$

که در آن، $B(X)$ شار نیمه کروی انرژی خروجی اطراف X ، $E(X)$ انرژی منتشره از منابع نوری، $\rho(X)$ انعکاس در X ، r طول بردار بین X و X' ، $\theta_X, \theta_{X'}$ زاویه بین بردار X, X' با نرمال سطح است [۴۱].

نمونه‌هایی از بررسی اثرات غیرخطی برای یک تصویر فراطیفی شبیه‌سازی شده با استفاده از معادلات مذکور در پژوهش‌های [۹۹-۱۰۴] ارائه شده است.

۲-۵- روش‌های کرنلی

روش‌های کرنلی کلاسی از الگوریتم‌ها جهت آنالیز الگوهای شناسایی محسوب می‌شوند، که محبوب‌ترین عضو این گروه را می‌توان ماشین بردار پشتیبان (SVM)، در نظر گرفت. بطورکلی، این روش‌ها آنالیز یافتن و مطالعه انواع کلی از روابط (همچون: خوشه‌بندی، رتبه‌بندی، مؤلفه‌های اصلی، همبستگی و طبقه‌بندی و...) در داده‌ها محسوب می‌شوند.

انواع روش‌های کرنلی برحسب نوع تابع کرنلی که آنها را قادر به کار در ابعاد بزرگ می‌کند، نامگذاری می‌گردند و در یک فضای مشخص بدون نیاز به محاسبه مختصات داده‌ها و بوسیله محاسبه ضرب داخلی ساده بین تصاویر

^۱ Kernel Trick

^۲ Kernel perceptron

(KOSP) بمنظور حل مسئله تعیین هدف زیرپیکسلی در تصاویر فراطیفی معرفی گردید و یک حالت جدیدی از این الگوریتم در سال ۲۰۰۶ ارائه شد [۱۰۷-۱۰۵].

در سال ۲۰۰۷، یک کرنل براساس الگوریتم رگرسیونی حداقل مربعات بمنظور تقریب غیرخطی مشخصات زیرپیکسلی تصاویر توسعه یافت، که مدل اختلاط خطی طیفی را در فضای ویژگی ایجاد شده توسط کرنل مرسر^۱ اجرا می کند [۱۰۸].

الگوریتم های کرنلی مورد اشاره ماهیتی نظارتی داشته و همواره نیازمند به دانش قبلی از ماتریس اعضای انتهایی هستند. در سال ۲۰۱۰، یک مدل جدید غیرنظارتی از الگوریتم (NMF) براساس کرنل، تحت عنوان (KSCNMF) بمنظور جداسازی داده های اختلاطی غیرخطی معرفی گردید. این الگوریتم نیز در یک فضای ویژه با استفاده از تابع کرنلی و بمنظور اجتناب از پیچیدگی در فضایی با ابعاد بالا استنتاج می گردد [۱۰۹].

در سال های اخیر روش های مختلفی از انواع الگوریتم های (NMF) کرنل سازی شده ارائه شده است، که می توان از آنها الگوریتم (KDNMF) را نام برد که از بهینه سازی تابع هدف در یک فضای ویژگی تحت محدودیت های غیرمنفی و تفکیک پذیر، به کمک ساختار هندسی داده ها استفاده می کند. الگوریتم (CKNMF) نیز یک الگوریتم جداسازی فراطیفی غیرخطی کور (تک مرحله ای) است و در آن ساختار غیرخطی داده های واقعی از طریق نقشه برداری غیرخطی حاصل از کرنل انجام می گیرد و هیچ نیازی به پی بردن به نوع مدل غیرخطی ندارد. در این روش بمنظور بهبود عملکرد، دو محدودیت حجم سادک و میزان صافی فراوانی ها نیز در نظر گرفته شده است [۱۱۰، ۱۱۱].

علاوه بر موارد فوق، الگوریتم های گسترش یافته (NMF) دیگری در [۱۱۲-۱۱۵] معرفی شده اند. از دیگر روش های جداسازی براساس کرنل می توان به کارهای چن اشاره نمود، که در آن معادلات اختلاط از دو بخش اختلاط خطی و نوسانات غیرخطی وابسته به امضاهای طیفی تشکیل یافته اند. در این حالت، تابع غیرخطی توصیف کننده این نوسانات در یک فضای هیلبرت کرنلی بازتولید شده (RKHS) تعریف می شود. این خانواده از مدل ها تفسیرهای فیزیکی روشن و قابلیت محاسبه

تداخلات پیچیده اعضای انتهایی را دارند. مقادیر فراوانی ها نیز توسط یک مسئله رگرسیونی براساس کرنل مناسب تحت محدودیت های موجود تعیین می گردد. در واقع این روش راه حلی برای یک مسئله رگرسیونی براساس کرنل مناسب را پیشنهاد می داد. الگوریتم مذکور تحت عنوان مدل اختلاط K-Hype معرفی گردید، منتها ضعف آن در عدم تعادل بین تداخلات خطی و غیرخطی بود. در نتیجه بمنظور مدیریت این محدودیت، مدل SK-Hype معرفی گردید، که به عنوان تعمیم یافته مدل قبل، به مفهوم یادگیری کرنلی چندگانه وابسته بوده و علاوه بر آن، بطور اتوماتیک توزیع خطی و غیرخطی را نیز تنظیم می نمود. این تکنیک در ادامه توسعه پیدا کرد، بطوریکه به آن یک ترم تصحیح فضایی بمنظور بهبود پیوستگی فضایی نقشه های فراوانی نیز اضافه گردید [۱۱۶-۱۲۰]. در نهایت، از کارهایی که در آن ملاک کرنل غیرخطی SVM در نظر گرفته شده نیز می توان به پژوهش های [۱۲۱-۱۲۸] اشاره کرد. اخیراً نیز یک سری روش های براساس کرنل بمنظور حل مدل های اختلاط غیرخطی در سال ۲۰۱۹ معرفی شده است [۱۲۹-۱۳۱].

۳- روش های مبتنی بر ابر داده ها (گروه دوم)

۳-۱- روش های شبکه عصبی و فازی

شبکه های عصبی مصنوعی (ANN)، یک زمینه گسترده ای از پژوهش ها و یک محدوده وسیعی از معماری ها و مدل ها را براساس زمان و بمنظور حل تنوعی از مسائل همچون: الگوی شناسایی، پیش بینی، سیستم های کنترلی، خوشه بندی و یادگیری ارتباطات غیرخطی پیچیده، در مجموعه داده ها تشکیل می دهند. بطور کلی شبکه های عصبی بصورت ساختارگرافی جهت دار با رئوسی که نشان دهنده نورو می باشند، و یکسری ورودی ها و خروجی ها و لبه های وزن دار که ارتباط دهنده بین این رئوس هستند، توصیف می شوند. پویایی شبکه نیز بوسیله قوانین فعال سازی برای هر نورو بیان می گردد [۱۳۲].

یکی از محبوب ترین معماری ها، شبکه عصبی (MLP) است، که کاربرد فراوانی در پردازش تصویر از جمله فرآیند جداسازی دارد. ساختار اولیه یک شبکه (MLP) در شکل (۱۰)، نشان داده شده، که از یک لایه ورودی، تعدادی لایه پنهان و یک لایه خروجی تشکیل یافته است. هر لایه از

^۱ Mercer

علاوه بر آن، یک روش ترکیبی از ترکیب شبکه‌های عصبی هاپفیلد و MLP نیز در سال ۲۰۰۴ توسط پلاتزا و همکاران معرفی شده است. یکسری شبکه‌های عصبی نیز برای این منظور براساس PCA غیرخطی در سال ۲۰۱۱ طراحی شده‌اند [۱۴۵-۱۴۸]. اخیراً نیز یک نسخه بهبودیافته از شبکه‌های عصبی تحت عنوان شبکه‌های عصبی عمیق موضوع نو و داغ پژوهشگران این حوزه قرار گرفته است [۱۴۹-۱۵۴].

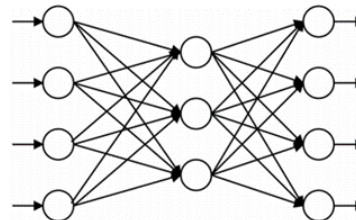
۳-۲- روش های غیرنظارتی (کاهش ابعادی غیرخطی، یادگیری منیفولد و توپولوژی)

یکی از پیشرفت‌های غیرمنتظره در ریاضیات قرن بیستم رشد برق آسای موضوعی مرسوم به توپولوژی می‌باشد. توپولوژی از خواص اشیاء هندسی است که بر اثر تبدیلات پیوسته اشیاء دستخوش تغییر نمی‌شوند. تبدیل پیوسته، تبدیلی است که در آن نقاطی که در ابتدا نزدیک به هم هستند در آخر تبدیل هم، نزدیک به هم باشند. مثل خم کردن و کشیدن ولی پاره کردن یا شکستن مجاز نیست. اشیاء اصلی مورد مطالعه در توپولوژی، فضاهای توپولوژیک خوانده می‌شوند. به طور شهودی باید این فضاها را به صورت اشکال هندسی تصور کرد. از لحاظ ریاضی این فضاها، مجموعه‌هایی هستند با ساختاری اضافی موسوم به توپولوژی، که امکان ساختن مفهوم پیوستگی را فراهم می‌آورند. دو فضای توپولوژیک هم ارز هستند هرگاه بتوان به طور پیوسته از یکی به دیگری رفت و نیز به طور پیوسته به وضع اول برگشت.

نوع خاصی از منیفولد توپولوژی، منیفولد دیفرانسیل-پذیر نام دارد که تقریباً نزدیک به هندسه دیفرانسیلی است و در واقع آنها با هم تئوری هندسی برای منیفولدهای دیفرانسیل‌پذیر را تشکیل می‌دهند. بعبارتی دیگر، منیفولدی است که روی آن توابع دیفرانسیل‌پذیر قابل تعریف‌اند و با استفاده از حساب دیفرانسیل این توابع قابل حل هستند. توپولوژی دیفرانسیل‌پذیر مشخصات و ساختارهایی که نیازمند تنها یک ساختار نرم و صاف روی یک منیفولد تعریف شده است را در نظر می‌گیرد [۴۱].

هر نقطه از یک منیفولد دیفرانسیل‌پذیر n بعدی یک فضای تانژانتی دارد در واقع، یک فضای اقلیدسی n بعدی شامل بردارهای تانژانتی از منحنی‌ها در یک نقطه است.

تعدادی نورون تشکیل شده، که لایه‌ها از طریق این نورون‌ها به هم وصل می‌شوند. که خروجی هر نورون یک تابع سیگموئید از داده‌های ورودی است و این خروجی، نورون در لایه بعدی را بوسیله یک وزن‌دهی تغذیه می‌کند [۴۱].



شکل ۱۰- ساختار و معماری یک شبکه عصبی MLP [۴۱]

شبکه (MLP) می‌تواند بوسیله ارتباط ورودی-خروجی آموزش یابد. برای چنین یادگیری نظارتی، داده‌های آموزشی در شبکه موجود است. در این حالت، خروجی تعیین و یک سیگنال خطا محاسبه می‌شود که این خطا با توجه به وزن‌های ارتباطی بروزرسانی می‌شود تا میزان آن کاهش یابد [۴۱].

اولین روش‌های فرآیند جداسازی با شبکه‌های عصبی، را می‌توان استفاده از شبکه (MLP) استاندارد در مجموعه داده‌های غیرخطی که در سال ۱۹۹۶ توسط فودی ارائه شد، را نام برد، که در ادامه نمونه‌هایی از حالات بهبودیافته این روش برای فرآیند جداسازی معرفی شده است [۱۳۳-۱۳۹]. همچنین در تحقیقات مشابه، از سری دیگری از شبکه‌های عصبی بنام (ART) نیز برای جداسازی غیرخطی استفاده و با تکنیک‌های دیگر مقایسه شدند [۱۴۱، ۱۴۰].

یک شبکه عصبی (RBFNN) نیز جهت جداسازی طراحی شد که با استفاده از دو مجموعه آموزشی، آموزش می‌یابد: مجموعه بدست آمده با مدل (LMM) و مجموعه بدست آمده با معادلات هپکه. تکنیک مذکور نشان داد که مقادیر فراوانی بهتر و خطای بارزسازی کمتری نسبت به مدل خطی بر روی داده‌های غیرخطی دارد [۱۴۳، ۱۴۲].

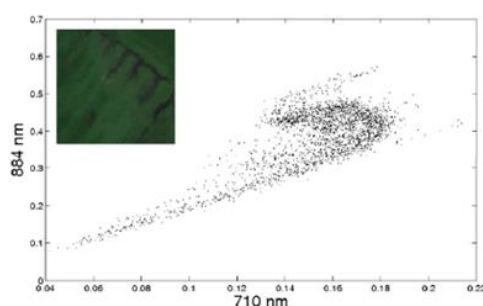
در پژوهشی دیگر بمنظور استخراج اعضای انتهایی از یک شبکه عصبی (SOM) که قابلیت خوشه‌بندی غیرنظارتی داده‌هایی با ابعاد بالا را دارد استفاده شد. خروجی این شبکه بعنوان ورودی شبکه عصبی هاپفیلد^۱ وارد و فراوانی‌ها با توجه به این ورودی‌ها آموزش داده شدند [۱۴۴].

^۱ Hopfield

بمنظور اندازه گیری فواصل و زوایا روی منیفولدها، منیفولد می بایستی ریمانی باشد. هندسه ریمانی شاخه ای از هندسه دیفرانسیل است که به بررسی منیفولدهای ریمانی می پردازد. یک منیفولد ریمانی، منیفولدی است که مجهز به یک متریک ریمانی می باشد یعنی یک ضرب داخلی در فضای مماس بر هر نقطه منیفولد که به طور یکنواخت در حال تغییر است [۴۱].

در پردازش تصاویر فراطیفی، هندسه دیفرانسیل و تکنیک های یادگیری منیفولد با موفقیت برای کاربردهای مختلفی بکار برده شده اند، که نمونه بارز آن کاربرد در طبقه بندی غیرخطی تصاویر فراطیفی می باشد. اخیراً از کاربرد روش های یادگیری منیفولد در ایجاد الگوریتم جداسازی غیرخطی غیرنظارتی که در سال ۲۰۱۰ و ۲۰۱۱ توسط هیلن و همکاران ارائه گردید، استفاده شده است [۱۵۵-۱۵۷].

اگر طیف اعضای انتهایی بطور غیرخطی اختلاط پیدا کنند، نقشه پراکندگی پیکسل ها در فضای طیفی معمولاً خیلی به فرم سادک نیست. شکل واقعی این نقشه پراکندگی، وابسته به فیزیک موجود بین اختلاط طیفی اعضای انتهایی یا مدل مورد استفاده بوده و می تواند بین موقعیت های مختلف با معنی باشد. شکل (۱۱)، یک نقشه پراکندگی از باند ۱۰ و باند ۱۶ بخشی از زمین زراعی را نشان می دهد. با توجه به شکل مذکور، منیفولد داده ها شکل بسیار نامتقارنی دارد که نشان دهنده تعاملات غیرخطی پیچیده در داده ها است [۱۵۷].



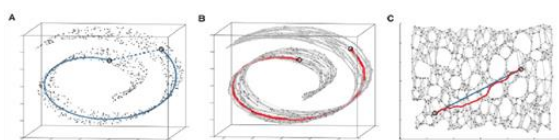
شکل ۱۱- نقشه پراکندگی بخشی از زمین زراعی با منیفولد غیرخطی از داده ها [۱۵۷]

زمانی که ضرایب فراوانی، از مجموعه ای به مجموعه دیگر پیوسته هستند، می توان فرض کرد که طیف پیکسل مرتبط با آنها نیز از طیف ابتدایی تا طیف نهایی پیوستگی بالایی دارد حال اگر چنین نباشد یک پرش گسسته در طیف مشاهده شده در مجموعه فراوانی ها رخ می دهد. در

نتیجه یک نقشه برداری^۱ بین فضای ضرایب فراوانی و فضای طیفی می تواند راه حل مناسبی باشد و فرض می شود که این نقشه برداری یک ساختار توپولوژی از سادک را حفظ می کند [۱۵۷].

در همین راستا، هیلن و همکاران گراف نزدیکترین همسایگی (KNN) را معرفی و با استفاده از الگوریتم ایزومپ^۲ بعنوان روش کاهش ابعاد غیرخطی، جداسازی غیرخطی تصاویر فراطیفی را با الگوریتم N-FINDR کلاسیک انجام دادند [۱۵۵].

این گراف نزدیکترین همسایگی متقارن، متصل و وزن داده شده بر روی داده ها پیاده سازی می گردد برای ساخت چنین گرافی، از یک ثابت K نیز بایستی استفاده شود و هر نقطه در فضای طیفی با نزدیکترین همسایگی K خود (با کوچکترین فاصله اقلیدسی و گراف متقارن) در ارتباط باشد. وزن هر لبه برابر طول اقلیدسی آن است و فاصله بین دو نقطه بعنوان کوتاه ترین مسیر در میان گراف، وزن داده شده است که می توان آنرا با الگوریتم دیجکسترا^۳ محاسبه نمود. از آنجا که ساختار گراف، هندسه کل منیفولد داده ها را در برمی گیرد، مسیریابی که در طول این فاصله اندازه گیری می شوند منحنی این منیفولد را دنبال می کنند و فاصله ژئودزی تقریبی حاصل می گردد. مثالی از گراف مذکور بر پایه فاصله ژئودزی در شکل (۱۲)، نشان داده شده است [۴۱، ۱۵۵].



شکل ۱۲- مثالی از گراف تشکیل شده برای منیفولد داده ها: شکل A منیفولد داده ها، که خط چین فاصله اقلیدسی و خط ممتد فاصله ژئودزی می باشد، شکل B گراف حاصل بر روی منیفولد، شکل C حالت مسطح و دوبعدی گراف مذکور [۴۱، ۱۵۵]

هیلن و همکاران در سال ۲۰۱۱، در تکمیل کار قبلی بمنظور جداسازی تصاویر فراطیفی الگوریتم N-FINDR را در فواصل هندسی (NFINDR هندسی) دوباره فرموله کردند [۱۵۷].

در سال های اخیر یک الگوریتم تصویربردار سادک SPU بمنظور آنالیز اختلاط طیفی خطی معرفی گردید که

^۱ Projection

^۲ ISOMAP

^۳ Dijkstra

انتهایی برای یک زنجیره جداسازی براساس حداکثرسازی فاصله متعامد متوالی (DMaxD) در حالتی که آن قابلیت استفاده در متریک‌های مختلف بجای فاصله اقلیدسی را داشت توسط هیلن و همکاران معرفی شد [۱۶۶, ۱۶۷].

۴- نتیجه گیری

بطور کلی، فرآیند جداسازی طیفی را می‌توان بعنوان ابزار آنالیزی قدرتمندی در نظر گرفت که قادر به کشف ساختارهای طیفی و فضایی ناپایدار و ناشناخته در تصاویر فراطیفی سنجنش از دور بدست آمده از روش‌های مختلف است. مدل‌های اختلاط خطی، مدل‌های خیلی محبوبی در فرآیند اختلاط تصاویر طیفی در دهه‌های گذشته و حال محسوب می‌شوند و تلاش‌های فراوانی در طی این سال‌ها در زمینه طراحی و ارتقاء انواع این الگوریتم‌ها شده است. با این حال، در سالیان اخیر با اشراف به این نکته که وجود اثرات اختلاط طیفی غیرخطی در اکثر موقعیت‌ها و کاربردهای مختلف انکارناپذیر است و استفاده از انواع روش‌های غیرخطی امکان دارد نتایج قابل قبول‌تری به همراه داشته باشد، پژوهش‌های گسترده‌ای در این زمینه صورت گرفته و تعداد مقالات ارائه شده مرتبط با توسعه این الگوریتم‌ها روز به روز در حال افزایش است که نشان دهنده علاقه پژوهشگران حوزه سنجنش از دور به آن را می‌رساند. در مقاله حاضر، مروری بر اکثر روش‌های جداسازی غیرخطی مورد استفاده در پردازش تصاویر دورسنجی شد. دسته‌بندی‌های مختلفی از این روش‌ها شامل انواع مدل‌های دوخطی، چندخطی و اختلاط ذاتی، روش‌های شبکه عصبی و کرنلی و تکنیک‌های بر پایه منیفولد داده‌ها و توپولوژی تهیه گردید. با توجه به مطالب ارائه شده می‌توان گفت که انواع مدل‌های دوخطی و روش‌های شبکه عصبی از محبوبیت بیشتری برخوردار هستند. شایان ذکر است که امکان دارد برخی از الگوریتم‌های ارائه شده در هیچ کدام از دسته‌بندی‌های مورد اشاره قرار نگیرد، به همین دلیل تقسیم‌بندی فوق می‌تواند بعنوان ملاک ابتدایی و معرفی اولیه‌ای برای ورود پژوهشگران حوزه سنجنش از دور به این زمینه محسوب گردد و از حیث جامعیت امکان دارد کل مباحث موجود را پوشش ندهد.

توانایی انجام جداسازی نظارتی داده‌های فراطیفی، با رعایت محدودیت‌های موجود بر روی آنها را دارد. بعلت اینکه در الگوریتم مذکور هیچ استفاده‌ای از روش‌های حداکثرسازی یا بهینه‌سازی صورت نمی‌گیرد، عملکرد محاسباتی خیلی بالایی داشته و در موقعیت‌های جداسازی طیفی واقعی، نتایجی قابل قبول‌تر از خود نشان می‌دهد [۱۵۸]. به کمک تکنیک استفاده از تبدیل کلاسیک الگوریتم به هندسی، علاوه بر مرحله استخراج اعضای انتهایی می‌توان در مرحله حل معکوس‌پذیری و بمنظور یافتن فراوانی‌ها نیز از آن استفاده نمود. بنابراین الگوریتم معکوس‌پذیر جداسازی تصویربردار سادک (SPU) بعنوان تکنیکی جدید در فرآیند جداسازی، در فاصله هندسی دوباره بازنویسی و با فواصل ژئودزی تقریب زده شده به کارگیری شد (DSPU) [۱۵۹]. مثال‌هایی از کارآیی روش فوق نیز در مقالات [۱۶۰, ۱۶۱] ارائه شده است.

به جهت بهبود الگوریتم مذکور یک الگوریتم مؤثر دیگری تحت عنوان تصویربردار سادک معتبر (VSPU) ارائه شد، که در آن یک مرحله اضافی جهت اعتبارسنجی و شروع الگوریتم از یک نقطه آغازی بهتر در مواردی که حل مسئله دارای اعتبار کافی نیست در نظر گرفته شده است [۱۶۲].

علاوه بر این، یک روش کاربردی نیز از ترکیب روش تقریبی فواصل ژئودزی با یک مدل دوخطی (GBM) در سال ۲۰۱۲ توسط هیلن معرفی شده است که در آن بمنظور رسیدن به ژئودزی تقریبی از هندسه دیفرانسیلی و روش‌های عددی استفاده شده است. همچنین، به جای روش ایزومپ بعنوان مرحله پیش پردازش از روش کاهش ابعادی غیرخطی MDS استفاده شده که نتایج به مراتب بهتری نسبت به روش‌های قبلی داشته است [۱۶۳].

یک تکنیک تخمین ابعاد مجازی نیز براساس مقیاس نسبت به فواصل نزدیکترین همسایگی با توجه به ایده روش بالا در سال ۲۰۱۳ توسط هیلن و همکاران بنام تخمین ابعاد ذاتی فراطیفی با نزدیکترین همسایگی (HIDENN) معرفی گردید. همچنین تأثیر اثر نویز نیز بر روی الگوریتم بررسی شد و با اضافه کردن این آیت، الگوریتم به (DHIDENN) ارتقاء یافت [۱۶۴, ۱۶۵].

یک چارچوب کلی از مراحل انجام یک فرآیند جداسازی براساس هندسه فاصله از مرحله تخمین ابعاد گرفته تا مرحله تخمین فراوانی در مقاله‌ای در سال ۲۰۱۴ نیز ارائه شد. در سال ۲۰۱۵ یک الگوریتم استخراج اعضای

علائم اختصاری

ANN	Artificial Neural Network	MLP	Multilayer Perceptron
ART	Adaptive Resonance Theory	MMP	Multimixture Pixel Model
AVMAX	Alternating Volume Maximization	MMSE	Minimum Mean Square Error
BiPSO	Bilinear Particle Swarm Optimization	MNF	Minimum Noise Fraction
BNMM	Bilinear Normal Mixing Model	MVC-NMF	Minimum Volume Transform-Nonnegative Matrix Factorization
BPOGM	Bound Projected Optimal Gradient Method	MVES	Minimum Volume Enclosing Simplex
BRDF	Bidirectional reflectance distribution function	MVSA	Minimum Volume Simplex Analysis
BSS	Blind Source Separation	NM	Nascimento Model
CCA	Convex Cone Analysis	NPLA	Normalized P-Linear Algorithm
CHMC	Constrained Hamiltonian Markov Chain	OSP	Orthogonal Subspace Projection
CKNMF	Constrained Kernel NMF	PCA	Principal Component Analysis
DHIDENN	Denoised HIDENN	PHMM	P-harmonic mixing model
DMaxD	Distance-geometry Maximal Distance	POD	POLytope Decomposition
DSPU	Distance SPU	PPI	Pixel Purity Index
EMLM	Extended MLM	PPNMM	Polynomial Post Nonlinear Mixing Model
EVLMM	Endmember Variable LMM	RBF	Radial Basis Function
GBM	Generalized Bilinear Model	RBFNN	Radial Basis Function Neural Network
HIDENN	Hyperspectral Intrinsic Dimensionality Estimation with Nearest-Neighbor	RE	Reconstruction Error
ICA	Independent Component Analysis	RGBM	Robust GBM
ICE	Iterated Constrained Endmembers algorithm	RKHS	Reproducing Kernel Hilbert Space
IEA	Iterative Error Analysis	RT	Radiative transfer
IFOV	Instantaneous Field of View	SGA	Simplex Growing Algorithm
KDNMF	Kernel Discriminant NMF	SID	Spectral Information Divergence
K-Hype	Kernel-based Hyperspectral mixture model	SiPOD	Sinusoidal POD
KOSP	Kernel - OSP	SISAL	Simplex Identification via variable Splitting Augmented Lagrangian
KSCNMF	Kernel Spatial Complexity based Non-negative Matrix Factorization	SK-Hype	Super K-Hype
LAM	Lattice Associative Memories	SNR	Signal to Noise Ratio
LIM	Linear mixture of Intimate Mixture	SMACC	Sequential Maximum Angle Convex Cone
LMM	Linear Mixture Model	SOM	Self-Organizing Map
LSE	Least Square Error	SPICE	Sparsity – Promoting ICE
MAP	Maximum A Posteriori	SPU	Simplex Projection Unmixing
MBM	Modified Bilinear Model	SSA	Single scattering albedo
MCMC	Markov Chain Monte Carlo	SVMAX	Successive Volume Maximization
MDS	Multidimensional Scaling	SVM	Support Vector Machine
MGBM	Modified GBM	SVR	Support Vector Regression
MHPNM	Multiharmonic Postnonlinear Mixing Model	VCA	Vertex Component Analysis
M	Model	VSPU	Validated SPU
MICA	Multidimension ICA		
MLM	Multilinear Mixing Model		

مراجع

- [1] M. E. Schaepman, S. L. Ustin, A. J. Plaza, T. H. Painter, J. Verrelst, and S. Liang, "Earth system science related imaging spectroscopy—An assessment," Remote Sensing of Environment, vol. 113, pp. S123-S137, 2009.
- [2] F. A. Kruse, J. W. Boardman, and J. F. Huntington, "Comparison of airborne hyperspectral data and EO-1 Hyperion for mineral mapping," IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 41, pp. 1388-1400, 2003.

- [3] I. Lau, G. Heinson, P. James, and A. Mauger, "Hyperspectral mapping of regolith materials and landforms for mineral exploration, Olary Domain, South Australia," IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium., pp. 3329-3331, 2003.
- [4] T. Yajima, K. Ohkawa, and S. Huzikawa, "Hyperspectral alteration mineral mapping using the POSAM method," IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2004, pp. 1491-1493, 2004.
- [5] M. Bochow, K. Segl, and H. Kaufman, "Comparison of multi-and hyperspectral remote sensing data for use in comprehensive urban biotope mapping," IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, pp. V-5-V-8, 2008.
- [6] E. Adam, O. Mutanga, and D. Rugege, "Multispectral and hyperspectral remote sensing for identification and mapping of wetland vegetation: a review," Wetlands Ecology and Management, vol. 18, pp. 281-296, 2010.
- [7] N. Dobigeon, Y. Altmann, N. Brun, and S. Moussaoui, "Linear and nonlinear unmixing in hyperspectral imaging," Data Handling in Science and Technology: Resolving Spectral Mixtures, p. 41, 2016.
- [8] J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, "Hyperspectral Unmixing Overview: Geometrical, Statistical, and Sparse Regression-Based Approaches," IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, vol. 5, pp. 354-379, 2012.
- [9] R. Heylen, D. Burazerovic, and P. Scheunders, "Fully constrained least squares spectral unmixing by simplex projection," IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 49, pp. 4112-4122, 2011.
- [10] J. Boardman, "Automating spectral unmixing of AVIRIS data using convex geometry concepts," in Proc. Ann. JPL Airborne Geosci. Work-shop, vol. 1, pp. 11-14, 1993.
- [11] J. W. Boardman, F. A. Kruse, and R. O. Green, "Mapping target signatures via partial unmixing of AVIRIS data," in Proc. JPL Airborne Earth Sci. Workshop, pp. 23-26, 1995.
- [12] M. E. Winter, "N-FINDR: An algorithm for fast autonomous spectral endmember determination in hyperspectral data," in Proc. SPIE Image Spectrometry V, vol. 3753, pp. 266-277, 1999.
- [13] R. A. Neville, K. Staenz, T. Szeredi, J. Lefebvre, and P. Hauff, "Automatic endmember extraction from hyperspectral data for mineral exploration," in Proc. Canadian Symp. Remote Sens., pp. 21-24, 1999.
- [14] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 43, no. 4, pp. 898-910, 2005.
- [15] C.-I Chang, C.-C. Wu, W. Liu, and Y.-C. Ouyang, "A new growing method for simplex-based endmember extraction algorithm," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 44, no. 10, pp. 2804-2819, 2006.
- [16] J. Gruninger, A. Ratkowski, and M. Hoke, "The sequential maximum angle convex cone (SMACC) endmember model," in Proc. SPIE, vol. 5425, pp. 1-14, 2004.
- [17] T.-H. Chan, W.-K. Ma, A. Ambikapathi, and C.-Y. Chi, "A simplex volume maximization framework for hyperspectral endmember extraction," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 49, no. 11, 2011.
- [18] M. Moller, E. Esser, S. Osher, G. Sapiro, and J. Xin, "A Convex Model for Matrix Factorization and Dimensionality Reduction on Physical Space and its Application to Blind Hyperspectral Unmixing," UCLA, CAM Report 02-07, 2010.
- [19] G. X. Ritter, G. Urcid, and M. S. Schmalz, "Autonomous single-pass endmember approximation using lattice auto-associative memories," Neurocomputing, vol. 72, no. 10-12, pp. 2101-2110, 2009.
- [20] G. X. Ritter and G. Urcid, "A lattice matrix method for hyperspectral image unmixing," Inf. Sci., vol. 181, no. 10, pp. 1787-1803, 2011.
- [21] M. Grana, I. Villaverde, J. O. Maldonado, and C. Hernandez, "Two lattice computing approaches for the unsupervised segmentation of hyperspectral images," Neurocomputing, vol. 72, pp. 2111-2120, 2009.
- [22] J. M. Bioucas-Dias, "A variable splitting augmented lagrangian approach to linear spectral unmixing," in Proc. IEEE GRSS Workshop Hyperspectral Image Signal Process, pp. 1-4, 2009.
- [23] J. Li and J. Bioucas-Dias, "Minimum volume simplex analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data," in Proc. IEEE Int. Conf. Geosci. Remote Sens. (IGARSS), vol. 3, pp. 250-253, 2008.
- [24] T. Chan, C. Chi, Y. Huang, and W. Ma, "Convex analysis based minimum-volume enclosing simplex algorithm for hyperspectral unmixing," IEEE Trans. Signal Process, vol. 57, no. 11, pp. 4418-4432, 2009.
- [25] A. Ambikapathi, T.-H. Chan, W.-K. Ma, and C.-Y. Chi, "Chance-constrained robust minimum-volume enclosing simplex algorithm for hyperspectral unmixing," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 49, no. 11, pp. 4194-4209, 2011.

- [26] L. Miao and H. Qi, "Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 45, no. 3, pp. 765–777, 2007.
- [27] M. Berman, H. Kiiveri, R. Lagerstrom, A. Ernst, R. Dunne, and J. F. Huntington, "ICE: A statistical approach to identifying endmembers in hyperspectral images," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 42, no. 10, pp. 2085–2095, 2004.
- [28] A. Zare and P. Gader, "Sparsity promoting iterated constrained endmember detection for hyperspectral imagery," *IEEE Geosci. Remote Sens.*, vol. 4, no. 3, pp. 446–450, 2007.
- [29] A. Ifarraguerri and C.-I Chang, "Multispectral and hyperspectral image analysis with convex cones," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 37, no. 2, pp. 756–770, 1999.
- [30] P. Common, "Independent component analysis: A new concept," *Signal Process.*, vol. 36, pp. 287–314, 1994.
- [31] J. Bayliss, J. A. Gualtieri, and R. Crompt, "Analysing hyperspectral data with independent component analysis," in *Proc. SPIE*, vol. 3240, pp. 133–143, 1997.
- [32] C. Chen and X. Zhang, "Independent component analysis for remote sensing study," in *Proc. SPIE Image and Signal Processing and Remote Sensing V*, vol. 3871, pp. 150–158, 1999.
- [33] T. M. Tu, "Unsupervised signature extraction and separation in hyperspectral images: A noise-adjusted fast independent component analysis approach," *Opt. Eng.*, vol. 39, no. 4, pp. 897–906, 2000.
- [34] J. Nascimento and J. Bioucas-Dias, "Does independent component analysis play a role in unmixing hyperspectral data?," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 43, no. 1, pp. 175–187, 2005.
- [35] M. M. Oskoui and R. Poormirzaee, "Application of non-negative ICA for unmixing of Hyperion data," *Journal of Hyperspectral Remote Sensing*, vol. 4, pp. 121–128, 2014.
- [36] S. Babakan, and M.M.Oskoui, Improvement of Dependent Component Analysis Methods in Hyperspectral Data Unmixing Aiming Mineral Detection in Lahroud, Ph. D. dissertation, Sahand University of Technology, Faculty of Mining Engineering ,2016 (Persian).
- [37] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Hyperspectral unmixing algorithm via dependent component analysis," in *Proc. IEEE Int. Conf. Geosci. Remote Sens.*, vol. 1, pp. 4033–4036, 2007.
- [38] J. M. Bioucas-Dias and J. Nascimento, "Hyperspectral unmixing based on mixtures of Dirichlet components," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 50, no. 3, pp. 863–878, 2012.
- [39] G. Vikneswaran, "Techniques of Parallelization in Markov Chain Monte Carlo Methods," Ph.D. dissertation, Univ. Florida, Gainesville, George Casella, adviser, 2011.
- [40] S. Babakan and M. M. Oskoui, "Application of Gibbs sampling in efficient hyperspectral unmixing based on the mixtures of Dirichlet components," *Journal of Applied Remote Sensing*, vol. 9, p. 095045, 2015.
- [41] R. Heylen, M. Parente, and P. Gader, "A review of nonlinear hyperspectral unmixing methods," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 7, pp. 1844–1868, 2014.
- [42] J. F. Mustard and J. M. Sunshine, "Spectral analysis for earth science: investigations using remote sensing data," *Remote sensing for the earth sciences: Manual of remote sensing*, vol. 3, pp. 251–307, 1999.
- [43] R. B. Singer and T. B. McCord, "Mars: Large scale mixing of bright and dark surface materials and implications for analysis of spectral reflectance," in *Proc. 10th Lunar Planet. Sci.*, pp. 1835–1848, 1979.
- [44] A. Huete, R. Jackson, and D. Post, "Spectral response of a plant canopy with different soil backgrounds," *Remote sensing of environment*, vol. 17, pp. 37–53, 1985.
- [45] T. W. Ray and B. C. Murray, "Nonlinear spectral mixing in desert vegetation," *Remote sensing of environment*, vol. 55, pp. 59–64, 1996.
- [46] L. Zhang, D. Li, Q. Tong, and L. Zheng, "Study of the spectral mixture model of soil and vegetation in PoYang Lake area, China," *Int. J. Remote Sens.*, vol. 19, no. 11, pp. 2077–2084, 1998.
- [47] J. M. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Nonlinear mixture model for hyperspectral unmixing," *Proc. SPIE Image and Signal Processing for Remote Sensing XV*, vol. 7477, p. 74770I, 2009.
- [48] S. Chakravorty and E. Shah, "Application of non-linear spectral unmixing on hyperspectral data for species level classification of mangroves," in *Communications and Signal Processing (ICCSP), International Conference on*, pp. 1123–1127, 2013.
- [49] W. Fan, B. Hu, J. Miller, and M. Li, "Comparative study between a new nonlinear model and common linear model for analysing laboratory simulated-forest hyperspectral data," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 30, pp. 2951–2962, 2009.

- [50] Y. Altmann, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, "Bilinear models for nonlinear unmixing of hyperspectral images," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, pp. 1-4, 2011.
- [51] A. Halimi, Y. Altmann, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, "Nonlinear unmixing of hyperspectral images using a generalized bilinear model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 4153-4162, 2011.
- [52] A. Halimi, Y. Altmann, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, "Unmixing hyperspectral images using the generalized bilinear model," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 1886-1889, 2011.
- [53] C. Liu and H. Ren, Multiple reflection effects in nonlinear mixture model for hyperspectral image analysis. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, 41, 2016.
- [54] C. Li, Y. Ma, J. Huang, X. Mei, C. Liu, and J. Ma, "GBM-based unmixing of hyperspectral data using bound projected optimal gradient method," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 13, pp. 952-956, 2016.
- [55] M. Ebrahimi and M.M. Oskouei, Unmixig of the Hyperion data using the bilinear method and comparing to common linear methods in Khoy area, M. Sc. Thesis, Sahand University of Technology, Faculty of Mining Engineering ,2019 (Persian).
- [56] X. Mei, Y. Ma, C. Li, F. Fan, J. Huang, and J. Ma, "Robust GBM hyperspectral image unmixing with superpixel segmentation based low rank and sparse representation," *Neurocomputing*, vol. 275, pp. 2783-2797, 2018.
- [57] M. Babaie-Zadeh, C. Jutten, and K. Nayebi, "Blind separating convolutive post-nonlinear mixtures," in *ICA*, pp. 138-143, 2001.
- [58] C. Jutten and J. Karhunen, "Advances in nonlinear blind source separation," in *Proc. of the 4th Int. Symp. on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation* , pp. 245-256, 2003.
- [59] Y. Altmann, A. Halimi, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, "Supervised nonlinear spectral unmixing using a postnonlinear mixing model for hyperspectral imagery," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, pp. 3017-3025, 2012.
- [60] Y. Altmann, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, "Nonlinearity detection in hyperspectral images using a polynomial post-nonlinear mixing model," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, pp. 1267-1276, 2013.
- [61] Y. Altmann, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, "Unsupervised post-nonlinear unmixing of hyperspectral images using a Hamiltonian Monte Carlo algorithm," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 23, pp. 2663-2675, 2014.
- [62] W. Luo, L. Gao, A. Plaza, A. Marinoni, B. Yang, L. Zhong, et al., "A New Algorithm for Bilinear Spectral Unmixing of Hyperspectral Images Using Particle Swarm Optimization," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 9, pp. 5776-5790, 2016.
- [63] B. Yang, B. Wang, Z. Wu, and Q. Lu, "Abundance estimation for hyperspectral images based on bilinear mixture models," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 644-647, 2017.
- [64] B. Yang, B. Wang, and Z. Wu, "Nonlinear hyperspectral unmixing based on geometric characteristics of bilinear mixture models," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 56, pp. 694-714, 2018.
- [65] B. Yang, B. Wang, and Z. Wu, "Unsupervised Nonlinear Hyperspectral Unmixing Based on Bilinear Mixture Models via Geometric Projection and Constrained Nonnegative Matrix Factorization," *Remote Sensing*, vol. 10, p. 801, 2018.
- [66] W. Luo, L. Gao, R. Zhang, A. Marinoni, and B. Zhang, "Bilinear normal mixing model for spectral unmixing," *IET Image Processing*, 2018.
- [67] X. Chen and L. Vierling, "Spectral mixture analyses of hyperspectral data acquired using a tethered balloon," *Remote Sensing of Environment*, vol. 103, pp. 338-350, 2006.
- [68] I. Meganem, P. Deliot, X. Briottet, Y. Deville, and S. Hosseini, "Linear-quadratic mixing model for reflectances in urban environments," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, pp. 544-558, 2014.
- [69] N. Raksuntorn and Q. Du, "Nonlinear spectral mixture analysis for hyperspectral imagery in an unknown environment," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 7, pp. 836-840, 2010.
- [70] R. Heylen and P. Scheunders, "A multilinear mixing model for nonlinear spectral unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 54, pp. 240-251, 2016.

- [71] B. Yang and B. Wang, "Band-Wise Nonlinear Unmixing for Hyperspectral Imagery Using an Extended Multilinear Mixing Model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. 1-16, 2018.
- [72] R. Heylen, V. Andrejchenko, Z. Zahiri, M. Parente, and P. Scheunders, "Nonlinear Hyperspectral Unmixing With Graphical Models," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019.
- [73] L. Drumetz, J. Chanussot, and C. Jutten, Spectral unmixing: A derivation of the extended linear mixing model from the Hapke model. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2019.
- [74] K. Niranjani and K. Vani, "Unsupervised Nonlinear Spectral Unmixing of Satellite Images Using the Modified Bilinear Model," *Journal of the Indian Society of Remote Sensing*, p. 1-12, 2018.
- [75] A. Marinoni and P. Gamba, "Non-linear hyperspectral unmixing by polytope decomposition," 6th Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing, pp. 1-4, 2014.
- [76] A. Marinoni and P. Gamba, "A novel approach for efficient p-linear hyperspectral unmixing," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 9, pp. 1156-1168, 2015.
- [77] A. Marinoni, J. Plaza, A. Plaza, and P. Gamba, "Nonlinear hyperspectral unmixing using nonlinearity order estimation and polytope decomposition," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 8, pp. 2644-2654, 2015.
- [78] A. Marinoni and P. Gamba, "Order- ∞ nonlinear hyperspectral unmixing by sinusoidal polytope decomposition," 7th Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing, pp. 1-4, 2015.
- [79] A. Marinoni, A. Plaza, and P. Gamba, "Harmonic mixture modeling for efficient nonlinear hyperspectral unmixing," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 9, pp. 4247-4256, 2016.
- [80] A. Marinoni and H. Clenet, "Identification of mafic minerals on Mars by nonlinear hyperspectral unmixing," 8th Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing, pp. 1-4, 2016.
- [81] A. Marinoni and H. Clenet, "Higher order nonlinear hyperspectral unmixing for mineralogical analysis over extraterrestrial bodies," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 10, pp. 3722-3733, 2017.
- [82] M. Tang, L. Gao, A. Marinoni, and B. Zhang, "Nonlinear hyperspectral unmixing based on normalized P-linear algorithm," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 1145-1148, 2017.
- [83] M. Tang, B. Zhang, A. Marinoni, L. Gao, and P. Gamba, "Multiharmonic Postnonlinear Mixing Model for Hyperspectral Nonlinear Unmixing," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, pp. 1-5, 2018.
- [84] B. Hapke, Bidirectional reflectance spectroscopy: 1. Theory, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B4): p. 3039-3054, 1981.
- [85] J. F. Mustard and C. M. Pieters, "Abundance and distribution of ultramafic microbreccia in Moses Rock dike: Quantitative application of mapping spectroscopy," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 92, pp. 10376-10390, 1987.
- [86] J. M. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Unmixing hyperspectral intimate mixtures," in *Image and Signal Processing for Remote Sensing XVI*, p. 78300C, 2010.
- [87] J. Broadwater and A. Banerjee, "A comparison of kernel functions for intimate mixture models," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, pp.1-4, 2009.
- [88] J. Broadwater and A. Banerjee, "A generalized kernel for areal and intimate mixtures," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, pp. 1-4, 2010.
- [89] J. Broadwater and A. Banerjee, "Mapping intimate mixtures using an adaptive kernel-based technique," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, pp. 1-4, 2011.
- [90] R. Close, P. Gader, J. Wilson, and A. Zare, "Using physics-based macroscopic and microscopic mixture models for hyperspectral pixel unmixing," in *Proc. SPIE*, p. 83901L, 2012.
- [91] R. Close, P. Gader, A. Zare, J. Wilson, and D. Dranishnikov, "Endmember extraction using the physics-based multi-mixture pixel model," in *SPIE*, pp. 85150L-85150L-14, 2012.
- [92] R. Heylen and P. Gader, "Nonlinear spectral unmixing with a linear mixture of intimate mixtures model," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 11, pp. 1195-1199, 2014.
- [93] S. Asadzadeh and C. R. de Souza Filho, "A review on spectral processing methods for geological remote sensing," *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, vol. 47, pp. 69-90, 2016.

- [94] T. Hiroi and C. M. Pieters, "Effects of grain size and shape in modeling reflectance spectra of mineral mixtures," in *Lunar and Planetary Science Conference Proceedings*, pp. 313-325, 1992.
- [95] M. I. Mishchenko, J. M. Dlugach, E. G. Yanovitskij, and N. T. Zakharova, "Bidirectional reflectance of flat, optically thick particulate layers: an efficient radiative transfer solution and applications to snow and soil surfaces," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 63, pp. 409-432, 1999.
- [96] Y. Shkuratov, L. Starukhina, H. Hoffmann, and G. Arnold, "A model of spectral albedo of particulate surfaces: Implications for optical properties of the Moon," *Icarus*, vol. 137, pp. 235-246, 1999.
- [97] F. Poulet and S. Erard, "Nonlinear spectral mixing: Quantitative analysis of laboratory mineral mixtures," *Journal of Geophysical Research: Planets*, vol. 109, 2004.
- [98] X. Zhang, H. Lin, Y. Cen, L. Zhang, and H. Yang, "A nonlinear spectral unmixing method for Abundance retrieval of mineral mixtures," in *Remotely Sensed Data Compression*, XII, p. 98740Z, 2016.
- [99] W. Grundy, S. Douté, and B. Schmitt, "A Monte Carlo ray-tracing model for scattering and polarization by large particles with complex shapes," *Journal of Geophysical Research*, vol. 105, pp. 29291-29314, 2000.
- [100] M. Gilabert, F. Garcia-Haro, and J. Melia, "A mixture modeling approach to estimate vegetation parameters for heterogeneous canopies in remote sensing," *Remote Sensing of Environment*, vol. 72, pp. 328-345, 2000.
- [101] E. J. Lentilucci and S. D. Brown, "Advances in wide-area hyperspectral image simulation," in *Targets and Backgrounds IX: Characterization and Representation*, pp. 110-122, 2003.
- [102] J. Stuckens, B. Somers, S. Delalieux, W. Verstraeten, and P. Coppin, "The impact of common assumptions on canopy radiative transfer simulations: A case study in Citrus orchards," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 110, pp. 1-21, 2009.
- [103] Y. Shkuratov, V. Kaydash, V. Korokhin, Y. Velikodsky, D. Petrov, E. Zubko, et al., "A critical assessment of the Hapke photometric model," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 113, pp. 2431-2456, 2012.
- [104] L. Tits, W. Delabastita, B. Somers, J. Farifteh, and P. Coppin, "First results of quantifying nonlinear mixing effects in heterogeneous forests: A modeling approach," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 7185-7188, 2012.
- [105] H. Kwon and N. M. Nasrabadi, "Kernel orthogonal subspace projection for hyperspectral signal classification," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, pp. 2952-2962, 2005.
- [106] J. C. Harsanyi and C.-I. Chang, "Hyperspectral image classification and dimensionality reduction: an orthogonal subspace projection approach," *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, vol. 32, pp. 779-785, 1994.
- [107] B. Wu, L. Zhang, P. Li, and J. Zhang, "Nonlinear estimation of hyperspectral mixture pixel proportion based on kernel orthogonal subspace projection," in *International Symposium on Neural Networks*, pp. 1070-1075, 2006.
- [108] L. Zhang, B. Wu, B. Huang, and P. Li, "Nonlinear estimation of subpixel proportion via kernel least square regression," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 28, pp. 4157-4172, 2007.
- [109] X. Wu, X. Li, and L. Zhao, "A kernel spatial complexity-based nonlinear unmixing method of hyperspectral imagery," in *Life System Modeling and Intelligent Computing*, pp. 451-458, 2010.
- [110] Z. Liang, Y. Li, and T. Zhao, "Projected gradient method for kernel discriminant nonnegative matrix factorization and the applications," *Signal Processing*, vol. 90, pp. 2150-2163, 2010.
- [111] X. Li, J. Cui, and L. Zhao, "Blind nonlinear hyperspectral unmixing based on constrained kernel nonnegative matrix factorization," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 8, pp. 1555-1567, 2014.
- [112] F. Zhu, P. Honeine, and M. Kallas, "Kernel nonnegative matrix factorization without the pre-image problem," in *Machine Learning for Signal Processing*, IEEE International Workshop on, 2014, pp. 1-6.
- [113] J. Cui, X. Li, and L. Zhao, "Nonlinear hyperspectral unmixing based on constrained multiple kernel NMF," in *Satellite Data Compression, Communications, and Processing X*, p. 91240N, 2014.
- [114] F. Zhu and P. Honeine, "Online nonnegative matrix factorization based on kernel machines," in *Signal Processing Conference, 23rd European*, pp. 2381-2385, 2015.
- [115] W. Wang and Y. Qian, "Kernel based sparse NMF algorithm for hyperspectral unmixing," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, IEEE International*, pp. 6970-6973, 2016.
- [116] J. Chen, C. Richard, and P. Honeine, "A novel kernel-based nonlinear unmixing scheme of hyperspectral images," *Conference Record of the Forty Fifth Asilomar*, pp. 1898-1902, 2011.

- [117] J. Chen, C. Richard, and P. Honeine, "Nonlinear unmixing of hyperspectral images based on multi-kernel learning," in *Hyperspectral Image and Signal Processing ,4th Workshop on*, pp. 1-4, 2012.
- [118] J. Chen, C. Richard, and P. Honeine, "Nonlinear unmixing of hyperspectral data based on a linear-mixture/nonlinear-fluctuation model," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, pp. 480-492, 2013.
- [119] A. Jibreen, N. Alqahtani, and O. Bchir, "Performance Evaluation of Various Hyperspectral Nonlinear Unmixing Algorithms," *American Journal of Signal Processing*, vol. 8, pp. 1-8, 2018.
- [120] J. Chen, C. Richard, and P. Honeine, "Nonlinear Estimation of Material Abundances in Hyperspectral Images With L1-Norm Spatial Regularization," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, pp. 2654-2665, 2014.
- [121] P.-X. Li, B. Wu, and L. Zhang, "Abundance estimation from hyperspectral image based on probabilistic outputs of multi-class support vector machines," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, IEEE International*, pp. 4315-4318, 2005.
- [122] L. Wang and X. Jia, "Integration of soft and hard classifications using extended support vector machines," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 6, pp. 543-547, 2009.
- [123] C.-I. Chang and B. Ji, "Weighted abundance-constrained linear spectral mixture analysis," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, pp. 378-388, 2006.
- [124] X. Jia, C. Dey, D. Fraser, L. Lymburner, and A. Lewis, "Controlled spectral unmixing using extended support vector machines," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing, 2nd Workshop on*, pp. 1-4, 2010.
- [125] X. Li, L. Wang, and X. Jia, "Spectral unmixing based on improved extended support vector machines," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium , IEEE International*, pp. 4118-4121, 2012.
- [126] F. A. Mianji and Y. Zhang, "SVM-based unmixing-to-classification conversion for hyperspectral abundance quantification," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 4318-4327, 2011.
- [127] X. Li, X. Jia, L. Wang, and K. Zhao, "On spectral unmixing resolution using extended support vector machines," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 53, pp. 4985-4996, 2015.
- [128] X. Li, X. Jia, L. Wang, and K. Zhao, "Reduction of Spectral Unmixing Uncertainty Using Minimum-Class-Variance Support Vector Machines," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 13, pp. 1335-1339, 2016.
- [129] R.A. Borsoi, T. Imbiriba, C. M. Bermudez, and C. Richard, "A blind multiscale spatial regularization framework for kernel-based spectral unmixing," *arXiv preprint arXiv: 1908.06925*, 2019.
- [130] K.T. Shahid, and I.D. Schizas, "Unsupervised Kernelized Correlation-Based Hyperspectral Unmixing With Missing Pixels," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019. 57(7): p. 4509-4520.
- [131] H. Xiao, "Supervised Kernel Based Nonlinear Unmixing of Hyperspectral Data," in *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. IOP Publishing.
- [132] S. S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*. EnglewoodCliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 2009.
- [133] G. M. Foody, "Relating the land-cover composition of mixed pixels to artificial neural network classification output," *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, vol. 62, pp. 491-498, 1996.
- [134] A. Baraldi, E. Binaghi, P. Blonda, P. A. Brivio, and A. Rampini, "Comparison of the multilayer perceptron with neuro-fuzzy techniques in the estimation of cover class mixture in remotely sensed data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, pp. 994-1005, 2001.
- [135] R. Pu, B. Xu, and P. Gong, "Oakwood crown closure estimation by unmixing Landsat TM data," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 24, pp. 4422-4445, 2003.
- [136] J. Plaza, A. Plaza, R. Pérez, and P. Martinez, "Joint linear/nonlinear spectral unmixing of hyperspectral image data," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 4037-4040, 2007.
- [137] R. Pu, P. Gong, R. Michishita, and T. Sasagawa, "Spectral mixture analysis for mapping abundance of urban surface components from the Terra/ASTER data," *Remote Sensing of Environment*, vol. 112, pp. 939-954, 2008.
- [138] M. Karkee, B. L. Steward, L. Tang, and S. A. Aziz, "Quantifying sub-pixel signature of paddy rice field using an artificial neural network," *computers and electronics in agriculture*, vol. 65, pp. 65-76, 2009.
- [139] J. Plaza, A. Plaza, R. Perez, and P. Martinez, "On the use of small training sets for neural network-based characterization of mixed pixels in remotely sensed hyperspectral images," *Pattern Recognition*, vol. 42, pp. 3032-3045, 2009.

- [140] W. Liu, K. C. Seto, E. Y. Wu, S. Gopal, and C. E. Woodcock, "ART-MMAP: A neural network approach to subpixel classification," *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, vol. 42, pp. 1976-1983, 2004.
- [141] W. Liu and E. Y. Wu, "Comparison of non-linear mixture models: sub-pixel classification," *Remote Sensing of environment*, vol. 94, pp. 145-154, 2005.
- [142] K. J. Guilfoyle, M. L. Althouse, and C.-I. Chang, "A quantitative and comparative analysis of linear and nonlinear spectral mixture models using radial basis function neural networks," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, pp. 2314-2318, 2001.
- [143] Y. Altmann, N. Dobigeon, J.-Y. Tournet, and S. McLaughlin, "Nonlinear unmixing of hyperspectral images using radial basis functions and orthogonal least squares," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 1151-1154, 2011.
- [144] M. Cantero, R. Perez, P. J. Martinez, P. Aguilar, J. Plaza, and A. Plaza, "Analysis of the behavior of a neural network model in the identification and quantification of hyperspectral signatures applied to the determination of water quality," in *Chemical and Biological Standoff Detection II*, pp. 174-186, 2004.
- [145] J. Plaza, P. J. Martinez, R. M. Perez, A. Plaza, and C. Cantero, "Nonlinear neural-network-based mixture model for estimating the concentration of nitrogen salts in turbid inland waters using hyperspectral imagery," in *Chemical and Biological Standoff Detection II*, pp. 165-174, 2004.
- [146] J. Plaza, P. Martínez, R. Pérez, and A. Plaza, "Nonlinear neural network mixture models for fractional abundance estimation in AVIRIS hyperspectral images," in *Airborne Earth Science*, p. 201, 2004.
- [147] G. A. Licciardi and F. Del Frate, "Pixel unmixing in hyperspectral data by means of neural networks," *IEEE transactions on Geoscience and remote sensing*, vol. 49, pp. 4163-4172, 2011.
- [148] G. Licciardi, X. Ceamanos, S. Douté, and J. Chanussot, "Unsupervised nonlinear spectral unmixing by means of NLPCA applied to hyperspectral imagery," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 1369-1372, 2012.
- [149] F. I. Alam, J. Zhou, L. Tong, A. W.-C. Liew, and Y. Gao, "Combining Unmixing and Deep Feature Learning for Hyperspectral Image Classification," *International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications*, pp. 1-8, 2017.
- [150] B. Palsson, J. Sigurdsson, J. R. Sveinsson, and M. O. Ulfarsson, "Hyperspectral unmixing using a neural network autoencoder," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 25646-25656, 2018.
- [151] S. Ozkan and G. B. Akar, "Improved Deep Spectral Convolution Network for Hyperspectral Unmixing with Multinomial Mixture Kernel and Endmember Uncertainty," *arXiv preprint arXiv: 1808.01104*, 2018.
- [152] X. Xu, Z. Shi, and B. Pan, "A supervised abundance estimation method for hyperspectral unmixing," *Remote sensing letters*, vol. 9, pp. 383-392, 2018.
- [153] Y. Su, J. Li, A. Plaza, A. Marinoni, P. Gamba, and S. Chakravorty, "DAEN: Deep Autoencoder Networks for Hyperspectral Unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019.
- [154] F. Khajehrayeni, and H. Ghassemian, "Hyperspectral Unmixing Using Deep Convolutional Autoencoders in a Supervised Scenario," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2020.
- [155] R. Heylen, D. Burazerović, and P. Scheunders, "A graph-based method for non-linear unmixing of hyperspectral imagery," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 197-200, 2010.
- [156] R. Heylen and P. Scheunders, "Nonlinear barycentric dimensionality reduction," *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 1341-1344, 2010.
- [157] R. Heylen, D. Burazerovic, and P. Scheunders, "Non-linear spectral unmixing by geodesic simplex volume maximization," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 5, pp. 534-542, 2011.
- [158] R. Heylen, D. Burazerovic, and P. Scheunders, "Fully constrained least squares spectral unmixing by simplex projection," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 4112-4122, 2011.
- [159] R. Heylen and P. Scheunders, "Spectral unmixing using distance geometry," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, 3rd Workshop on, 2011, pp. 1-4.
- [160] R. Heylen and P. Scheunders, "Non-linear fully-constrained spectral unmixing," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, IEEE International, pp. 1295-1298, 2011.
- [161] D. Burazerović, R. Heylen, and P. Scheunders, "Towards streaming hyperspectral endmember extraction," *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pp. 2519-2522, 2011.
- [162] R. Heylen and P. Scheunders, "A fast geometric algorithm for solving the inversion problem in spectral unmixing," *Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, pp. 1-4, 2012.

- [163] R. Heylen and P. Scheunders, "Calculation of geodesic distances in nonlinear mixing models: Application to the generalized bilinear model," IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, vol. 9, pp. 644-648, 2012.
- [164] R. Heylen and P. Scheunders, "Estimating the number of endmembers in hyperspectral imagery with nearest neighbor distances," in Geoscience and Remote Sensing Symposium, pp. 1377-1380, 2012.
- [165] R. Heylen and P. Scheunders, "Hyperspectral intrinsic dimensionality estimation with nearest-neighbor distance ratios," IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, vol. 6, pp. 570-579, 2013.
- [166] R. Heylen and P. Scheunders, "A distance geometric framework for nonlinear hyperspectral unmixing," IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, vol. 7, pp. 1879-1888, 2014.
- [167] R. Heylen, P. Scheunders, A. Rangarajan, and P. Gader, "Nonlinear unmixing by using different metrics in a linear unmixing chain," IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, vol. 8, pp. 2655-2664, 2015.