

ارزیابی الگوریتم پایدارسازی جهت ناهمبسته‌سازی ماتریس کوواریانس ابهامات شناور در حل سریع ابهام فاز مشاهدات GPS

میر رضا غفاری رزین^{۱*}، بهزاد وثوقی^۲

^۱ استادیار گروه مهندسی عمران و نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی اراک
mr.ghafari@arakut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
vosoghi@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مرداد ۱۳۹۶، تاریخ تصویب اردیبهشت ۱۳۹۸)

چکیده

در تعیین موقعیت کینماتیک آنی دقیق بدست آوردن مقادیر صحیح ابهامات فاز از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. معمولاً در این روش از چندین وحله زمانی مشاهداتی اول جهت بدست آوردن موقعیت استفاده می‌شود. به همین دلیل در مرحله برآورد پارامترها، ابهامات شناور از همبستگی بسیار زیادی با یکدیگر برخوردار می‌باشند. در این مقاله از یک الگوریتم پایدارسازی جهت دست یافتن به کمترین مقدار همبستگی مابین ابهامات شناور استفاده شده است. پارامتر پایدارسازی به گونه‌ای انتخاب شده است که حاصل جمع عناصر روی قطر اصلی (Trace) ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور کمینه گردد. جهت بررسی میزان ناهمبسته‌سازی و کارایی روش پیشنهادی، از دو معیار عدد شرط و همچنین اثر ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور استفاده شده است. پس از ناهمبسته‌سازی ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور و تبدیل فضا، جهت جستجوی ابهامات صحیح از روش کمترین مربعات شرطی متوالی صحیح استفاده می‌شود. حسن این روش در تعیین صحیح ابهامات فاز بصورت سریع و با در نظر گرفتن همبستگی میان آنها می‌باشد. همچنین جهت بررسی صحت نتایج حاصل از این مقاله از آزمون فاکتور واریانس ثانویه استفاده شده است. بر طبق این آزمون در صورت انجام صحیح و جستجوی درست کاندیدهای ابهامات فاز، فاکتور واریانس ثانویه و اولیه از اختلاف فاحشی برخوردار نیستند. کلیه نتایج حاصل از روش پیشنهادی این مقاله با نتایج روش معروف Lambda مقایسه شده است. براساس نتایج حاصل، مقادیر عدد شرط و همچنین اثر ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور ۲ الی ۶ مرتبه نسبت به حالت معمولی کمترین مربعات کاهش پیدا کرده است. البته نتایج مقایسه انجام گرفته حاکی از برتری روش معروف Lambda می‌باشد.

واژگان کلیدی: ابهام فاز، ناهمبسته‌سازی، GPS، کمترین مربعات شرطی متوالی، روش Lambda

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

ابهام فاز^۱ در مشاهدات GPS^۲ به تعداد دورهای کامل^۳ یک موج تا قبل از لحظه برقراری ارتباط بین گیرنده و فرستنده اطلاق می‌گردد. بدست آوردن مقدار صحیح عدد ابهام فاز در اندازه‌گیری توسط مشاهدات فاز موج حامل همچنان به عنوان یک نکته کلیدی در نقشه‌برداری و تعیین موقعیت است. حل سریع ابهام فاز^۴ همانند حل لحظه‌ای آن و بدست آوردن عدد صحیح ابهام فاز یک نیاز اصلی و اساسی در تعیین موقعیت مخصوصاً در تعیین موقعیت‌های آبی می‌باشد. توجه به سه نکته زمان اولیه، قابلیت اطمینان به روش و نیز صحت نتیجه بدست آمده در حل سریع ابهام فاز بسیار مهم و اساسی است. این سه موضوع در ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر می‌باشند. جهت انجام کارهای آبی تعیین موقعیت، زمان اولیه جهت حل ابهام فاز بسیار مهم است. در این گونه از کاربردها، تعیین ابهامات فاز صحیح با قابلیت اطمینان بالا با استفاده از چند وحله زمانی مشاهداتی اول از اهمیت بالایی برخوردار است [۱]. در این موارد کوواریانس مابین ابهامات شناور بدست آمده از مقدار همبستگی بالایی برخوردار است. تلاش‌های بسیار گسترده‌ای جهت کمینه‌سازی همبستگی و در نتیجه بدست آوردن ابهامات صحیح انجام گرفته است [۲، ۳، ۴، ۵، ۶]. نتایج عددی بدست آمده از تحقیقات فوق بیانگر این مطلب است که تمرکز همه این روش‌ها بر کاهش فضای جستجوی ابهام فاز صحیح استوار است.

در حالت کلی روش‌های حل ابهام فاز را می‌توان به دو دسته کلی بر اساس حرکت^۵ و براساس جستجو^۶ تقسیم‌بندی کرد [۷]. روش‌های براساس حرکت با توجه به هندسه ماهواره‌ها و گیرنده‌ها و نحوه قرارگیری آنها نسبت به همدیگر مدل‌سازی شده‌اند. این دسته از روش‌ها معمولاً جهت حل ابهام فاز به زمان زیادی نیاز دارند، در نتیجه برای کاربردهای آبی تعیین موقعیت با مشاهدات فاز موج حامل بکار گرفته نمی‌شوند [۸]. روش‌های براساس جستجو معمولاً روش‌های سریع بوده و به هندسه ماهواره و گیرنده‌ها وابسته نیستند. این دسته از روش‌ها به سه

گروه عمده جستجو در حوزه مختصات^۷، جستجو در حوزه مشاهدات^۸ و جستجو در حوزه ابهام فاز^۹ تقسیم‌بندی می‌شوند [۹]. بیشتر روش‌های حل ابهام فاز با حل شناور^{۱۰} ابهام شروع می‌شوند و با برآورد ابهامات صحیح پایان می‌یابند که مبنای آنها حل کمترین مربعات است. روش کمترین مربعات صرفاً در مرحله برآورد ابهامات شناور مورد استفاده قرار گرفته و در مراحل بعد جهت جستجو و ثابت کردن ابهامات صحیح از کمترین مربعات شرطی استفاده می‌شود [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴].

در روش‌های جستجو محور که از رایج‌ترین روش‌های حل ابهام فاز می‌باشند از سه مرحله جهت حل و بدست آوردن ابهام فاز صحیح استفاده می‌شود. در مرحله اول از قید صحیح بودن مقادیر ابهام فاز صرف‌نظر کرده و پارامترهای ابهام فاز بصورت حقیقی برآورد می‌شوند. این مرحله معمولاً با کمک روش کمترین مربعات استاندارد انجام می‌گیرد. پارامترهای ابهام فاز بدست آمده از این مرحله به پارامترهای شناور معروف می‌باشند. همچنین در این مرحله ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور نیز محاسبه می‌شود [۱۰، ۱۱]. بدلیل اینکه در تعیین موقعیت کینماتیک نسبی از چندین وحله زمانی مشاهداتی اول جهت بدست آوردن پارامترهای ابهام فاز استفاده می‌شود، در نتیجه ماتریس واریانس-کوواریانس بدست آمده از همبستگی^{۱۱} بسیار بالایی برخوردار است. مرحله دوم در روش‌های جستجو محور کاهش میزان همبستگی مابین ابهامات شناور می‌باشد. این مرحله معمولاً به مرحله ناهمبسته‌سازی^{۱۲} و یا کاهش فضا^{۱۳} معروف است. مرحله سوم تعیین پارامترهای مختصات با استفاده از ابهامات صحیح بدست آمده از مرحله دوم می‌باشد. این مرحله معمولاً به مرحله فیکس کردن^{۱۴} معروف است. اساسی‌ترین گام در بدست آوردن ابهامات فاز صحیح، ناهمبسته‌سازی و یا کاهش فضا می‌باشد. در صورت انجام صحیح این مرحله جستجو ابهامات صحیح با سرعت انجام گرفته و همچنین صحت و اطمینان نتایج حاصل بالا خواهد بود [۱۲].

^۷ Coordinate Domain^۸ Observation Domain^۹ Ambiguity Domain^{۱۰} Flout Solution^{۱۱} Correlation^{۱۲} decorrelation^{۱۳} Space Reduction^{۱۴} Fixed solution^۱ Phase Ambiguity^۲ Global Positioning System Observations^۳ Complete Cycle^۴ Fast integer ambiguity resolution^۵ Motion-Based^۶ Search-Based

یک باشد. اگر تبدیلی دارای ۳ ویژگی بالا باشد بطور قطع دو نتیجه زیر را تضمین خواهد نمود:

۱. ابهامات فاز ترانسفر شده ماهیت صحیح بودن خود را در مساله بهینه‌سازی تبدیل شده حفظ خواهند کرد.
 ۲. ماتریس واریانس-کوواریانس تبدیل شده نسبت به ماتریس واریانس-کوواریانس اصلی به حالت قطری نزدیک‌تر خواهد شد، در واقع عناصر خارج از قطر اصلی این ماتریس کوچک‌تر خواهند شد.
- تئوری مسائل معکوس^۱ ابزار بسیار قدرتمندی جهت حل مسائل بد وضع^۲ در ژئودزی می باشد [۹، ۱۷]. مسئله حل ناهمبستگی^۳ در GPS بدلیل نوع مدلسازی و نوع مشاهدات مورد استفاده یک مسئله ناپایدار در ژئودزی محسوب می‌شود. در این مقاله به قابلیت تئوری مسائل معکوس جهت کمینه‌سازی همبستگی مابین ابهامات شناور و صحیح و نیز کاهش فضای جستجو پرداخته می‌شود.

۲- پایدارسازی به عنوان روشی جهت کمینه‌سازی همبستگی

تعیین موقعیت دقیق با سیستم تعیین موقعیت جهانی نیازمند شناخت صحیح از منابع خطای سیستماتیک در این سیستم دارد. از جمله منابع خطای سیستماتیک در GPS می‌توان به خطاهای اتمسفری (یونوسفر و تروپوسفر)، خطاهای مداری و خطاهای ساعت (گیرنده و ماهواره) اشاره نمود. جهت کاهش و یا حذف چنین خطاهای سیستماتیک معمولاً از ترکیبات تفاضلی دوم با استفاده از مشاهدات فاز یا کد استفاده می‌شود. البته استفاده از ترکیبات تفاضلی وابستگی شدید به فاصله مابین گیرنده‌ها خواهد داشت. در حالت ریاضی معادلات تفاضلی مرتبه دوم بصورت مدل‌های غیرخطی ترکیبی صحیح^۴ می‌باشند. برای سیستم تعیین موقعیت جهانی GPS در وحله زمانی i معادله تفاضلی مرتبه دوم خطی شده ترکیبی را می‌توان بصورت زیر نوشت [۲، ۹]:

$$v_i = A_i x + \lambda z - l_i \quad (1)$$

روش Lambda یکی از روش‌های بسیار معروف و موثر جهت پیدا کردن ابهام فاز صحیح است [۲]. این روش دارای ۳ مرحله است: در مرحله اول از صحیح بودن پارامترهای ابهام فاز صرف نظر شده و سرشکنی کمترین مربعات استاندارد انجام می‌گیرد که در نتیجه برآورد کمترین مربعات، مقادیر حقیقی پارامترهای مجهول، همراه با ماتریس واریانس کوواریانس آنها بدست می‌آیند. این جواب به جواب شناور معروف است. در مرحله دوم ابهام فازهای شناور برآورد شده، همراه با ماتریس واریانس کوواریانس آنها برای برآورد ابهام فاز صحیح استفاده می‌شوند. در این مرحله از سرشکنی کمترین مربعات صحیح وزندار استفاده می‌شود و بالاخره در مرحله سوم بقیه پارامترها با استفاده از پارامترهای ابهام فاز صحیح برآورد شده محاسبه می‌گردند. در مرحله دوم این روش از الگوریتم ناهمبسته‌سازی استفاده می‌شود. در واقع هدف اصلی این مرحله از بین بردن وابستگی مابین ابهامات فاز شناور با در نظر گرفتن ماهیت صحیح بودن آنها است. براساس تیونسن ۱۹۹۵ یک تبدیل ایده‌آل جهت انتقال فضای ابهامات شناور بایستی دارای ۳ ویژگی منحصر بفرد زیر باشد [۲، ۳، ۱۴]:

۱. این تبدیل و نیز معکوس آن بایستی دارای عناصر صحیح باشد.
 ۲. این تبدیل بایستی حجم فضای ترانسفر شده را حفظ نماید.
 ۳. این تبدیل بایستی حاصلضرب واریانس‌ها را در ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور کاهش دهد.
- وجود شرط اول به این دلیل ضروری است که در صورت عدم صحیح بودن عناصر تبدیل مذکور، ماهیت صحیح بودن ابهامات فاز در مساله بهینه‌سازی اصلی از بین خواهد رفت. در مورد شرط دوم می‌بایستی به این نکته اشاره کرد که در صورت تغییر حجم فضای ترانسفر شده صحت ابهامات فاز برآورد شده دچار تزلزل خواهد شد. در صورتی که حجم فضای ترانسفر شده کاهش یابد احتمال اینکه تعدادی از کاندیدهای صحیح ابهام فاز از بین برود وجود خواهد داشت و در صورتی که حجم فضای ترانسفر شده افزایش یابد سرعت جستجوی ابهامات فاز در مرحله جستجو کاهش می‌یابد. برای اینکه تبدیل مورد نظر بتواند حجم فضا را حفظ کند بایستی دترمینان آن و معکوسش

^۱ Inverse Problems

^۲ Ill-Posed

^۳ Decorrelation Problems in GPS

^۴ Mixed Integer nonlinear Model

در رابطه (۶) تعداد وحله‌های زمانی مشاهداتی، r تعداد گیرنده‌ها و S تعداد ماهواره‌ها می‌باشند. خواهیم داشت:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (۷)$$

با کمک روابط (۷) و (۵) پارامترهای ابهام فاز شناور را می‌توان از معادلات نرمال زیر استخراج نمود:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{z} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (۸)$$

در تعیین موقعیت کینماتیک و سریع، ماتریس نرمال مشاهدات $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B}$ معمولاً دارای شرایط بد وضعی است. همین امر باعث بوجود آمدن و گسترش تکنیک‌های ناهمبسته‌سازی^۱ در GPS شده است [۱۴، ۱۵]. از نقطه نظر کاربردی، استفاده از تئوری مسائل معکوس ابزار قدرتمندی در حل معادلات ناپایدار و بد وضع می‌باشد. در مسئله تعیین ابهام فاز بدلیل ناپایدار بودن ماتریس نرمال مشاهدات از روش زیر جهت پایداری و بدست آوردن نتیجه‌ای با مقدار خطای بهینه استفاده می‌شود. در استفاده از این روش هدف کمینه‌سازی تابع زیر است [۱۳]:

$$\min : \Phi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{Bz} - \mathbf{l}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{z}\|_2^2 \quad (۹)$$

در رابطه (۹) α پارامتر پایداری است. با حل رابطه (۹) مقدار پارامترهای مجهول و بایاس ایجاد شده در آنها بصورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\mathbf{z}_\alpha = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (۱۰)$$

$$\mathbf{b}_\alpha = -\alpha (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{z}} \quad (۱۱)$$

که در رابطه (۱۱) $\bar{\mathbf{z}}$ بردار ابهامات واقعی^۲ می‌باشد. اگر پارامتر پایداری بدرستی انتخاب گردد در اینصورت معادله (۱۰) مقدار یکتا و درستی را برای پارامترهای مجهول ارائه خواهد داد. جهت محاسبه بایاس در جواب پارامترهای بدست آمده با استفاده از رابطه (۱۰) وجود بردار ابهامات واقعی الزامی است که می‌توان از برآورد بوجود آمده از کمترین مربعات در رابطه (۸) استفاده نمود. با استفاده از قانون انتشار خطاها می‌توان ماتریس

در رابطه (۱) بردار مشاهدات تفاضلی مرتبه دوم، $\mathbf{v}_i$ بردار باقی مانده‌ها، $\mathbf{x}$ پارامترهای موقعیت ۳ بعدی، $\mathbf{z}$ بردار پارامترهای ابهام فاز صحیح، $\mathbf{A}_i$ ماتریس طرح که وابسته به موقعیت گیرنده بوده و λ طول موج سیگنال ماهواره می‌باشند. اگر تعداد (n+1) ماهواره با دو گیرنده را در نظر بگیریم در این صورت n مشاهده تفاضلی و n پارامتر ابهام فاز در هر وحله زمانی خواهیم داشت. اگر m وحله زمانی مشاهداتی را در نظر بگیریم در این صورت معادله (۱) را می‌توان بصورت کلی زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{l} \quad (۲)$$

که در آن $\mathbf{l} = (l_1^T \ l_2^T \ \dots \ l_m^T)^T$ ، $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1^T \ \mathbf{A}_2^T \ \dots \ \mathbf{A}_m^T)^T$ ، $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \dots \ \mathbf{v}_m^T)^T$ ، $\mathbf{B} = \lambda (\mathbf{I} \ \dots \ \mathbf{I})^T$ و $\mathbf{I} = (n \times n)$ ماتریس همانی می‌باشند. به جهت اینکه بردار ابهامات فاز صحیح متغیرهای پیوسته‌ای نیستند در نتیجه نمی‌توان از روش‌های معمولی جهت استخراج معادلات نرمال استفاده کرد. از دو مرحله زیر می‌توان جهت بدست آوردن پارامترهای ابهام فاز کمک گرفت [۹]. این دو مرحله را می‌توان مشابه روش کمترین مربعات استخراج کرد:

$$\min (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{l}) \quad (۳)$$

در مرحله اول از رابطه (۳) نسبت به بردار پارامترهای مجهول موقعیت ($\mathbf{x}$) مشتق گرفته و آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این مرحله تصحیحات پارامترهای موقعیت را می‌توان براساس بردار پارامترهای ابهام فاز بصورت زیر بدست آورد:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{l} - \mathbf{Bz}) \quad (۴)$$

در مرحله دوم رابطه (۴) را در رابطه (۳) جایگزاری کرده، خواهیم داشت:

$$\min (\mathbf{Bz} - \mathbf{l})^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} (\mathbf{Bz} - \mathbf{l}) \quad (۵)$$

در رابطه بالا $\mathbf{P}$ ماتریس وزن مشاهدات تفاضلی مرتبه دوم می‌باشد. ماتریس وزن $\mathbf{P}$ از معکوس‌گیری ماتریس کوواریانس معادلات تفاضلی مرتبه دوم بصورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\mathbf{P}_{m(r-1)(s-1) \times m(r-1)(s-1)} = \mathbf{C}_{\nabla \Delta}^{-1} \quad (۶)$$

^۱ Decorrelation

^۲ True Ambiguities

در رابطه (۱۵) $\Lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n)$ و $\mathbf{U}$ ماتریسی اورتوگنال ($\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$) می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۱۵) در رابطه (۱۳) اثر ماتریس $\mathbf{M}_z$ را می‌توان بصورت زیر بدست آورد [۹]:

$$Tr(\mathbf{M}_z) = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + \alpha)^2} + \alpha^2 \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{u}_i^T \mathbf{z})}{(\lambda_i + \alpha)^2} \quad (16)$$

جهت کمینه‌سازی اثر ماتریس $\mathbf{M}_z$ و نیز بدست آوردن مقدار بهینه پارامتر پایداری α خواهیم داشت:

$$\frac{dTr(\mathbf{M}_z)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i ((\mathbf{u}_i^T \mathbf{z})^2 \alpha - \sigma_0^2)}{(\lambda_i + \alpha)^3} = 0 \quad (17)$$

بعد از انتخاب صحیح پارامتر پایداری به کمک رابطه (۱۷)، با استفاده از رابطه (۱۰) مقادیر پارامترهای شناور ابهام فاز حاصل خواهد شد که از لحاظ نرم به مقادیر پارامترهای ابهام فاز صحیح خیلی نزدیک می‌باشند (نسبت به مقادیر بدست آمده از روش کمترین مربعات رابطه شماره (۸)). پس از محاسبه ابهامات شناور $\mathbf{z}_\alpha$ می‌توان ابهامات فاز صحیح را با کمینه‌سازی رابطه زیر بدست آورد:

$$\min : (\mathbf{z} - \mathbf{z}_\alpha)^T \mathbf{M}_z (\mathbf{z} - \mathbf{z}_\alpha) \quad (18)$$

۴- کمترین مربعات صحیح

کمترین مربعات صحیح^۱ که معمولاً به مساله نزدیکترین نقطه وزندار^۲ شناخته می‌شود یکی از مسائل رایج در حل و بدست آوردن ابهامات فاز صحیح در تعیین موقعیت نسبی با مشاهدات فاز حامل است. البته این موضوع در سایر علوم مهندسی همانند برنامه‌سازی صحیح^۳، هندسه اعداد^۴، سیستم‌های ارتباطی چند ورودی - چند خروجی^۵ و علوم رمز نویسی^۶ نیز وجود دارد. فرض کنیم مشاهدات $y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n$ که بصورت خطی

کوواریانس مربوط به پارامترهای برآورد شده $\mathbf{z}_\alpha$ را بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{C}_z = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \quad (12)$$

که در رابطه (۱۲) σ_0^2 فاکتور واریانس اولیه است. دقت روش پایداری جهت حل یک مساله ناپایدار معمولاً با خطای متوسط محاسبه می‌گردد که شامل کوواریانس‌ها و بایاس‌ها است. برای ابهامات فاز شناور این ماتریس را می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{C}_z + \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\alpha^T \quad (13)$$

اگر مقدار پارامتر پایداری α صحیح انتخاب گردد در این صورت بهترین مقادیر ابهامات شناور از رابطه (۱۰) و دقت و بایاس آنها از روابط (۱۱) و (۱۲) بدست خواهند آمد.

۳- برآورد پارامتر پایداری

معمولاً در مسائل ناپایدار، پارامتر پایداری با روش منحنی L محاسبه می‌گردد [۱۶، ۱۷]. این روش یکی از ساده‌ترین روش‌های موجود برای انتخاب بهینه پارامتر پایداری در پایداری یک مساله گسسته معکوس ناپایدار است که در آن تغییرات نرم جواب پایداری شده نسبت به تغییرات نرم بردار باقیمانده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مسائل گسسته معکوس ناپایدار، نمایش لگاریتمی منحنی این تغییرات غالباً به شکل L بوده و نقطه‌ی شکستگی این منحنی جواب پایداری شده با خطای پایداری مناسبی را پیشنهاد می‌کند. در این مقاله به جای استفاده از روش منحنی L جهت بدست آوردن پارامتر پایداری α از کمینه‌سازی اثر ماتریس $\mathbf{M}_z$ استفاده شده است. با اینکار مقدار پارامتر α طوری انتخاب می‌گردد که مقادیر ابهامات شناور بدست آمده دارای کمترین میزان بایاس باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$\min : Tr(\mathbf{M}_z) \quad (14)$$

بر اساس قضیه تجزیه یک ماتریس به مقادیر و بردارهای منفرد، ماتریس حقیقی و متقارن $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B}$ را می‌توان بصورت زیر به فرم طیفی نوشت [۱۴]:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^T \quad (15)$$

^۱ Integer Leas Square (ILS)

^۲ Weighted Closest Point

^۳ Integer Programming

^۴ Geometry of Numbers

^۵ Multiple Input-Multiple Output (MIMO)

^۶ Cryptography

می‌باشند. در این مقاله جهت حل مساله بهینه‌سازی (۱۸) از روش کمترین مربعات شرطی متوالی صحیح استفاده می‌شود.

۵- کمترین مربعات شرطی متوالی صحیح

از الگوریتم کمترین مربعات شرطی متوالی^۴ می‌توان به‌مراه مفهوم کمترین مربعات صحیح^۵ در مرحله جستجو ابهامات صحیح استفاده کرد. برای این کار مفهوم برآوردگر خود راه انداز^۶ را در نظر می‌گیریم [۳]:

۵-۱- برآوردگر خودراه انداز

اساس این روش بر مبنای برآورد کمترین مربعات شرطی متوالی پایه‌ریزی شده است. اگر مجموعه حقیقی $\hat{\mathbf{a}}_I = (\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{i-1})^T \in \mathbf{R}^{i-1}$ و اعداد حقیقی $\hat{a}_i \in \mathbf{R}^{i-1}$ تعریف گردند در این صورت ماتریس واریانس کواریانس مجموعه فوق را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_I & \mathbf{Q}_{II} \\ \mathbf{Q}_{II}^T & \delta_i^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

در رابطه (۲۴) $\mathbf{Q}_I$ ماتریس واریانس-کواریانس بردار $\hat{\mathbf{a}}_I$ ، $\mathbf{Q}_{II}$ ماتریس واریانس کواریانس بردار $\hat{\mathbf{a}}_I$ و اعداد حقیقی $\hat{a}_i$ و δ_i^2 واریانس اعداد حقیقی می‌باشند. برآورد کمترین مربعات مقدار a_i بشرطی که $\mathbf{a}_I$ مقدار ثابتی براساس بردار ثابت $\mathbf{z}_I$ باشد بصورت زیر خواهد شد:

$$\hat{\mathbf{a}}_{i|I} = \hat{\mathbf{a}}_i - \mathbf{Q}_{II} \mathbf{Q}_I^{-1} (\hat{\mathbf{a}}_I - \mathbf{z}_I) \quad (25)$$

برآوردگر $a_{i|I}$ در واقع برآوردکننده صحیح ابهامات فاز بروش کمترین مربعات شرطی است. در واقع در این روش در هر مرحله ابهام فاز بشرط صحیح بودن آن در مرحله قبل محاسبه می‌شود. در حقیقت در این روش مقادیر $a_{i|I}$ و $\mathbf{a}_I$ نسبت به‌همدیگر ناهمبسته بوده و این ویژگی مهم روش فوق در برآورد ابهامات فاز صحیح می‌باشد [۳]. برآورد بدست آمده از رابطه (۲۵) را می‌توان بصورت متوالی جهت محاسبه ابهامات فاز صحیح استفاده کرد. برای مثال می‌توان نوشت:

یا غیرخطی تابعی از داده‌های واقعی هستند، در دسترس باشند. پارامترهای مجهول صحیح β و $\mathbf{z}$ می‌بایستی برآورد شوند. تئوری کمترین مربعات صحیح در حقیقت برآورد مقادیر صحیح پارامترهای مجهول فوق می‌باشد. این مساله را می‌توان در دو حالت کلی زیر بررسی کرد [۷]:

✓ مدل خطی ترکیبی صحیح^۱

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\beta + \mathbf{B}\mathbf{z} + \varepsilon \quad (19)$$

در رابطه بالا $\mathbf{y}_{n \times 1}$ بردار مشاهدات، $(\mathbf{A}, \mathbf{B})_{n \times (t+m)}$ ماتریس‌های ضرایب، $(\beta \in \mathbf{R}^t)$ بردار مقادیر حقیقی و $(\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^m)$ بردار مقادیر صحیح می‌باشند. $\mathbf{R}^t$ معرف فضای t بعدی برای مقادیر حقیقی و $\mathbf{Z}^m$ معرف فضای m بعدی برای مقادیر صحیح می‌باشند. ε نیز بردار خطا برای مشاهدات در نظر گرفته می‌شود.

✓ اگر در رابطه (۱۹) ماتریس $\mathbf{A}$ صفر شود در این صورت مدل خطی ترکیبی صحیح به مدل خطی صحیح بصورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{z} + \varepsilon \quad (20)$$

اگر بردار مشاهدات $\mathbf{y}_{n \times 1}$ آلوده به نویز و خطاهای تصادفی نباشند در این صورت رابطه (۲۰) تعریف کننده یک شبکه منظم^۲ توسط بردارهای ستونی ماتریس $\mathbf{B}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i z_i \mid z_i \in \mathbf{Z} \right\} \quad (21)$$

اگر متد کمترین مربعات وزندار را به رابطه (۲۰) اعمال کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^m} : F(\mathbf{z}) = (\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{z})^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{z}) \quad (22)$$

رابطه (۲۲) را می‌توان بصورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^m} : F(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_f)^T \mathbf{W}_f (\mathbf{z} - \mathbf{z}_f) \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) $\mathbf{z}$ مقادیر پارامترهای صحیح، $\mathbf{z}_f$ مقادیر پارامترهای شناور^۳ و $\mathbf{W}_f$ ماتریس وزن پارامترهای شناور

^۴ Sequential conditional least-square

^۵ Integer least-square

^۶ Bootstrapping Estimator

^۱ Mixed Integer Linear Model

^۲ Lattice

^۳ Floating Solution

رابطه (۲۹) در فرم ماتریسی بصورت زیر خواهد شد:

$$\tilde{\mathbf{a}} = [\hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{R} - \mathbf{I}_n)(\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}})] \quad (30)$$

در رابطه (۳۰) $\mathbf{R}$ ماتریس پایین مثلثی و نماد $[\cdot]$ نشان‌دهنده گردسازی به نزدیک ترین عدد صحیح می‌باشد.

۶- نتایج عددی و بحث

جهت بررسی و ارزیابی الگوریتم مورد اشاره در این مقاله، از داده‌های واقعی جمع‌آوری شده توسط گیرنده GPS تریمبل R8 در مورخه ۱۲ جولای ۲۰۰۸ استفاده شده است. وحله زمانی برداشت داده‌ها ۵ ثانیه بوده و زمان توقف در هر موقعیت کینماتیک ۱ دقیقه (۱۲) وحله ۵ ثانیه‌ای می‌باشند که جمعاً ۲۴۰ وحله (۲۰) موقعیت کینماتیک، داده جمع‌آوری شده است. در هر موقعیت کینماتیک با استفاده از ۶ وحله اول، بردار ابهامات شناور و ماتریس واریانس-کوواریانس محاسبه می‌شوند. با استفاده از الگوریتم پیشنهاد شده در این مقاله، پایدارسازی صورت گرفته و پارامتر پایدارسازی انتخاب می‌گردد. سپس ناهمبسته‌سازی و جستجو صورت گرفته و نهایتاً بردار ابهامات صحیح به همراه مجهولات موقعیت برآورد می‌شوند. جهت کنترل نتایج بدست آمده در این مقاله، مرحله ناهمبسته‌سازی بروش پایدارسازی با ناهمبسته‌سازی روش Lambda مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج این مقایسه در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل ماتریس واریانس-کوواریانس اصلی بدست آمده از روش کمترین مربعات با ماتریس های واریانس-کوواریانس ناهمبسته شده توسط الگوریتم پایدارسازی و نیز ماتریس واریانس-کوواریانس ناهمبسته شده توسط روش Lambda مقایسه شده است. این مقایسه برای ۵ بعد از فضای جستجو در حالت‌های ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۱۳ انجام گرفته است.

$$\begin{aligned} i=2 & \Rightarrow \hat{a}_{2|1} = \hat{a}_2 - \delta_{21}\delta_1^{-2}(\hat{a}_1 - z_1) \\ i=3 & \Rightarrow \hat{a}_{3|2,1} = \hat{a}_3 - \delta_{3,1}\delta_1^{-2}(\hat{a}_1 - z_1) \\ & \quad - \delta_{3,2|1}\delta_{2|1}^{-2}(\hat{a}_{2|1} - z_2) \end{aligned} \quad (26)$$

به کمک رابطه (۲۶) می‌توان فرم کلی کمترین مربعات شرطی متوالی را برای جستجوی ابهامات فاز با شرط صحیح بودن بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{i|I} &= \hat{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{i,j|I} \delta_{j|I}^{-2} (\hat{a}_{j|I} - z_j) \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) $\delta_{i,j|I}$ نشان‌دهنده کواریانس مابین $\hat{a}_i$ و $\hat{a}_{j|I}$ بیانگر واریانس $\hat{a}_{j|I}$ می‌باشند. برای $i=1$ $\hat{a}_{i|I}$ برابر با $\hat{a}_1$ خواهد شد.

۵-۲- خودراه انداز صحیح

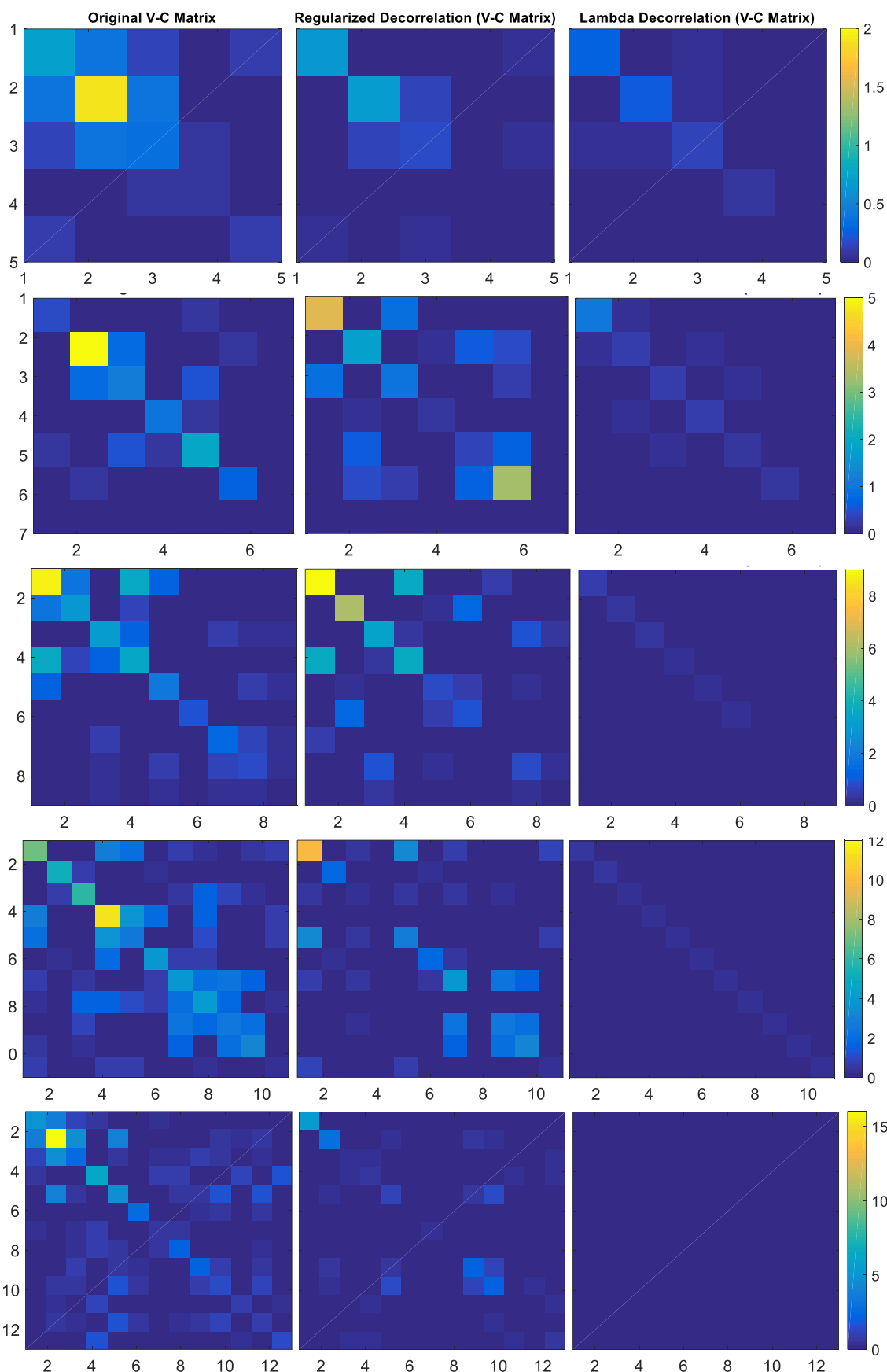
در نظر بگیریم که $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n)^T \in \mathbf{R}^n$ بردار ابهامات شناور بوده و $\tilde{\mathbf{a}}_B = (\tilde{a}_{B,1} \dots \tilde{a}_{B,n})^T \in \mathbf{Z}^n$ نشان‌دهنده مقادیر صحیح متناظر با ابهامات شناور باشد [۳]. برآوردگر خودراه انداز صحیح متوالی^۱ را می‌توان بصورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{B,1} &= [\hat{a}_1] \\ \tilde{a}_{B,2} &= [\hat{a}_{2|1}] = [\hat{a}_2 - \delta_{21}\delta_1^{-2}(\hat{a}_1 - \tilde{a}_{B,1})] \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{B,n} &= [\hat{a}_{n|N}] = \left[\hat{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{n,j|I} \delta_{j|I}^{-2} (\hat{a}_{j|I} - \tilde{a}_{B,j}) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

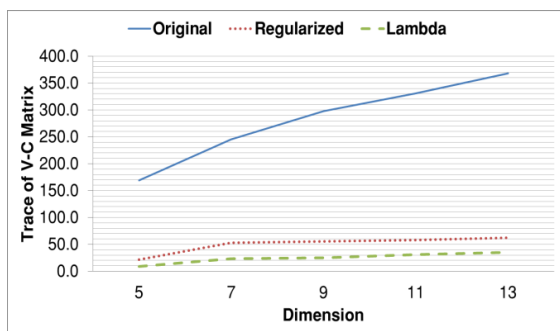
در رابطه (۲۸) نماد $[\cdot]$ بیانگر گردسازی به نزدیک ترین عدد صحیح است. رابطه (۲۸) را می‌توان بصورت دیگری نیز بازنویسی کرد. اگر $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n)^T \in \mathbf{R}^n$ بردار ابهامات شناور و $\tilde{\mathbf{a}}_i = (\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n)^T \in \mathbf{Z}^n$ نشان‌دهنده مقادیر صحیح متوالی برآورد شده ابهامات باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_i &= \left[\hat{a}_i + \sum_{j=1}^{n-1} r_{ij} (\hat{a}_j - \tilde{a}_j) \right] \\ , \quad i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (29)$$

^۱ Sequential Integer Bootstrapping Estimator



شکل ۱- مقایسه ماتریس‌های واریانس-کوواریانس بدست آمده از روش کمترین مربعات (ستون اول)، واریانس-کوواریانس ناهمبسته شده توسط الگوریتم پایداری (ستون دوم) و واریانس-کوواریانس ناهمبسته شده توسط روش Lambda در ۵ بعد از فضای جستجو (۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۱۳)



شکل ۳- مقایسه مقادیر اثر ماتریس واریانس-کوواریانس بدست آمده برای روش کمترین مربعات، ناهمبسته‌سازی شده توسط الگوریتم پایدارسازی و روش Lambda

با توجه به شکل (۳) نیز بوضوح می‌توان مشاهده نمود که مقادیر اثر ماتریس واریانس-کوواریانس با استفاده از الگوریتم پایدارسازی تا حد قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است. جهت بررسی صحت نتایج بدست آمده از الگوریتم پیشنهاد شده در این مقاله، از آزمون فاکتور واریانس ثانویه استفاده شده است. بر طبق این آزمون در صورت انجام صحیح و جستجوی درست کاندیدهای ابهامات فاز، می‌بایستی فاکتور واریانس ثانویه و اولیه از اختلاف فاحشی برخوردار نباشند. برای این منظور از داده‌های ۳ طول مبنا با اندازه‌های مختلف استفاده شده است. در هر طول مبنا مقادیر فاکتور واریانس قبل و بعد از جستجو ابهامات محاسبه شده و مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج این مقایسه در جداول (۱)، (۲) و (۳) آورده شده است.

جدول ۱- مقایسه مقادیر فاکتور واریانس ثانویه و اولیه برای طول مبنای ۲۳/۱۳ متر

روش پایدارسازی		روش Lambda	
Sigma (Float)	Sigma (Fixed)	Sigma (Float)	Sigma (Fixed)
0.17268	0.17359	0.12341	0.12483

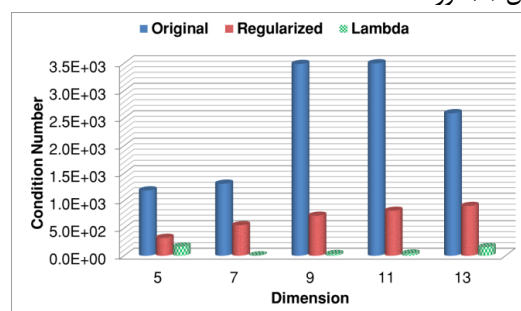
جدول ۲- مقایسه مقادیر فاکتور واریانس ثانویه و اولیه برای طول مبنای ۱۶/۱۳ متر

روش پایدارسازی		روش Lambda	
Sigma (Float)	Sigma (Fixed)	Sigma (Float)	Sigma (Fixed)
0.16457	0.18542	0.15248	0.15974

جدول ۳- مقایسه مقادیر فاکتور واریانس ثانویه و اولیه برای طول مبنای ۹/۸۴ متر

روش پایدارسازی		روش Lambda	
Sigma (Float)	Sigma (Fixed)	Sigma (Float)	Sigma (Fixed)
0.27485	0.27487	0.24321	0.25349

با توجه به نتایج حاصل از شکل (۱) بوضوح می‌توان مشاهده نمود مقادیر عناصر خارج از قطر اصلی ماتریس واریانس-کوواریانس که نشان‌دهنده میزان کوواریانس‌ها مابین ابهامات شناور است به صورت کاملاً محسوسی کاهش پیدا کرده است که این بیانگر قابلیت بالای روش پایدارسازی در مرحله ناهمبسته‌سازی است. البته بایستی به این نکته مهم اشاره کرد که نتایج حاصل از روش معروف Lambda بسیار بهتر از نتایج حاصل از روش پیشنهادی این مقاله است. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی در این مقاله و نیز مقایسه با ماتریس واریانس-کوواریانس اولیه، این روش می‌تواند به عنوان یک روش جایگزین^۱ در مرحله ناهمبسته‌سازی جهت حل سریع ابهام فاز و بدست آوردن مقادیر پارامترهای صحیح ابهام فاز استفاده گردد. همچنین جهت کنترل الگوریتم مورد استفاده در این مقاله، مقادیر عدد شرط ماتریس واریانس-کوواریانس برای روش کمترین مربعات، ناهمبسته‌سازی توسط الگوریتم پایدارسازی و همچنین روش Lambda مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج این مقایسه در شکل (۲) آورده شده است.



شکل ۲- مقایسه مقادیر عدد شرط ماتریس واریانس-کوواریانس برای روش کمترین مربعات، روش ناهمبسته‌سازی شده توسط الگوریتم پایدارسازی و روش Lambda

با توجه به نتایج حاصل از شکل (۲) بوضوح می‌توان مشاهده نمود که مقادیر عدد شرط ماتریس واریانس-کوواریانس در الگوریتم اشاره شده در این مقاله ۲ الی ۶ مرتبه نسبت به روش کمترین مربعات کاهش پیدا کرده است. مجدداً بایستی اشاره شود که عدد شرط ماتریس واریانس-کوواریانس در روش Lambda بسیار پایین‌تر از روش پیشنهادی این مقاله است. همچنین مقادیر اثر ماتریس واریانس-کوواریانس برای دو حالت کمترین مربعات و الگوریتم پایدارسازی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتیجه این مقایسه در شکل (۳) آورده شده است.

^۱ Alternative

با توجه به مقایسه صورت گرفته می توان به این نکته پی برد که صحت نتایج بدست آمده از الگوریتم Λ از اعتبار بالاتری نسبت به روش پیشنهادی این مقاله برخوردار می باشد. البته بایستی اشاره کرد که در طول مبنای کوتاه و متوسط نتایج حاصل از روش پایداری بسیار به نتایج حاصل از روش Λ نزدیک می باشد.

۷- نتیجه گیری

روش های زیادی جهت حل مساله ابهام فاز صحیح در تعیین موقعیت کینماتیک آبی دقیق وجود دارد. مهمترین عامل متمایز کننده مابین این روش ها صحت نتایج بدست آمده و نیز سرعت الگوریتم مورد استفاده می باشد. تمامی روش های موجود از سه مرحله جهت تعیین ابهامات فاز صحیح استفاده می کنند. مرحله اول شامل تعیین ابهامات شناور و ماتریس واریانس-کوواریانس آن می باشد. اکثریت روش های موجود جهت حل ابهام فاز از روش کمترین مربعات استاندارد در این مرحله استفاده می کنند. مرحله دوم خود از دو بخش تشکیل می شود: بخش ناهمبسته سازی و بخش جستجو. این دو بخش در واقع متمایز کننده روش های مختلف است. در این مقاله از الگوریتم پایداری جهت ناهمبسته سازی ماتریس

واریانس-کوواریانس ابهامات شناور استفاده شد. نتایج این تحقیق نشان دهنده این موضوع است که روش فوق از قابلیت بسیار بالایی در ناهمبسته سازی و حل سریع ابهام فاز دارد. نتایج حاصل از این مقاله با نتایج روش معروف Λ مورد مقایسه قرار گرفت. از معیارهای عدد شرط ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور و همچنین مجموع عناصر قطر اصلی این ماتریس جهت بررسی دقت نتایج استفاده شد. مقایسه های صورت گرفته نشان داد که روش پیشنهادی این مقاله توانایی بالایی در ناهمبسته سازی ماتریس واریانس-کوواریانس دارد. در هر دو شاخص عدد شرط و همچنین اثر ماتریس واریانس-کوواریانس ابهامات شناور، نتایج روش پایداری به نتایج حاصل از روش معروف Λ بسیار نزدیک می باشد. همچنین جهت بررسی صحت نتایج حاصل از آزمون فاکتور واریانس ثانویه استفاده شد که مجدداً نتایج حاصل با روش Λ مورد مقایسه قرار گرفت. در طول مبنای متوسط و کوتاه نتایج حاصل از روش پیشنهادی از صحت بالایی برخوردار بودند. نتایج حاصل از این مقاله نشان داد که روش پایداری و نتایج حاصل از آن می تواند به عنوان یک روش جایگزین برای روش Λ در حل سریع ابهام فاز مشاهدات GPS در نظر گرفته شود.

مراجع

- [1] Blewitt, G., (1989). Carrier phase ambiguity resolution for the Global Positioning System applied to geodetic baselines up to 2000 km. J. geophys. Res., B94:10187-10203.
- [2] Teunissen, P.J.G., (1995) The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation. J Geod 70:65-82
- [3] Teunissen, P.J.G., (2005) Integer aperture bootstrapping: a new GNSS ambiguity estimator with controllable fail-rate. J Geod 79: 389-397
- [4] Xu P.L., (1998). Mixed integer geodetic observation models and integer programming with applications to GPS ambiguity resolution. J. Geod. Soc. Japan, 44:169-187.
- [5] Xu P.L., Cannon E. and Lachapelle G., (1995). Mixed integer programming for the resolution of GPS carrier phase ambiguities. Presented at the IUGG95 Assembly, Boulder, Colorado
- [6] Jazaeri. S, Amiri-simkooei. A, Sharifi. M.A, (2011) Fast integer least square estimation for GNSS high-dimensional ambiguity resolution using lattice theory, J Geod
- [7] Xu P.L., Cannon E. and Lachapelle G., (2000). Mixed integer observation models, GPS Decorrelation and integer programming, Technical Report Nr.2000.2.
- [8] Hansen, P. C. and IMM, MATLAB regularization toolbox, version 3.
- [9] Shen, Y. Z, B. F. Li., (2007). Regularized solution to fast GPS ambiguity resolution, Journal of surveying engineering, 2007.
- [10] Jazaeri. S, Amiri-simkooei. A, Sharifi. M.A., (2011) Fast integer least square estimation for GNSS high-dimensional ambiguity resolution using lattice theory, J Geod.
- [11] Xu P.L., (2012). Integer estimation methods for GPS ambiguity resolution: an applications-oriented review and improvement. Survey Review. 44, 59-71

- [12] Chang X.W., Yang X. and Zhou T., (2005). MLAMBDA: a modified LAMBDA method for integer least-squares estimation. *J. Geod.*, 79:552-565.
- [13] Ghaffari Razin, M.R., Voosoghi, B., (2016) Regional ionosphere modeling using spherical cap harmonics and empirical orthogonal functions over Iran. *Acta Geod Geophys*, DOI 10.1007/s40328-016-0162-8.
- [14] Teunissen, PJG., (1997). The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: its performance on short GPS baselines and short observation spans. . *J Geod* 71: 589-602.
- [15] Zhou, Y., (2010). A new practical approach to GNSS high dimensional ambiguity de-correlation. *GPS Solut.* doi:10.1007/s10291-010-0192-6.
- [16] Ghaffari Razin, M.R., (2015). Development and analysis of 3D ionosphere modeling using base functions and GPS data over Iran. *Acta Geod Geophys*, DOI 10.1007/s40328-015-0113-9 Volume 51, Issue 1 , pp 95-111.
- [17] Mashhadi Hossainali, M., (2006): A Comprehensive Approach to the Analysis of the 3D Kinematics of Deformation. Institute of Physical Geodesy. Ph.D. Thesis. Darmstadt, Darmstadt University of Technology, 152 pp.