

مدلسازی میدان ثقل منطقه‌ای با استفاده از آنالیز هارمونیک کلاهی کروی^۱

محسن فیضی^۱، مهدی روفیان نایینی^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
mfeizi@mail.kntu.ac.ir

^۲ استادیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
mraoofian@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت آذر ۱۳۹۵، تاریخ تصویب فروردین ۱۳۹۶)

چکیده

در این مقاله مدل‌سازی میدان ثقل منطقه‌ای با استفاده از روش آنالیز هارمونیک کلاه کروی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، در گام نخست جواب مسئله مقدار مرزی دیرخه برای معادله‌ی لاپلاس، با مقادیر مرزی تعریف‌شده در محدوده کلاهی کروی تعیین می‌شود. در این حالت جواب مسئله بر مبنای ترکیب خطی توابع لژاندر وابسته از مرتبه‌ی صحیح و درجه غیر صحیح بیان می‌گردد. سپس با استفاده از مشاهدات ثقلی، دستگاه معادلات تشکیل شده و ضرایب مدل به کمک روش کمترین مربعات برآورد می‌گردد. به‌منظور تعیین کارایی مدل فوق در مدل‌سازی محلی میدان ثقل، منطقه‌ای به شکل یک کلاهی کروی تحت زاویه مرکزی یک درجه واقع در شمال غرب کشور انتخاب گردیده است. در گام نخست، به کمک اطلاعات مدل‌های جهانی ژئوپتانسیل، داده‌های ثقلی هواپرد، بر فراز منطقه فوق به‌صورت یک مدل شبیه‌سازی تولیدشده و جهت تطابق بهتر با مشاهدات واقعی، یک نویز تصادفی به آن اضافه می‌گردد. سپس داده‌های حاصل، به سری هارمونیک‌های کلاه کروی بسط داده‌شده و ضرایب مدل محاسبه خواهد شد. با توجه به بد وضع بودن مسئله فوق، از روش پایدارسازی تیخونوف جهت حل معادلات مشاهدات و پایدارسازی ماتریس نرمال مسئله استفاده می‌گردد. در نهایت نتایج حاصل‌شده از مدل‌سازی باقیمانده شتاب ثقل در راستای مؤلفه‌ی شعاعی نشان می‌دهد که مدل هارمونیک کلاه کروی توانایی مدل‌سازی میدان جاذبه به اندازه $RMSE^2$ شش هزارم میلی گال را دارد.

واژگان کلیدی: آنالیز هارمونیک کلاه کروی، میدان ثقل محلی، ثقل سنجی هوایی، مدل ژئوپتانسیل

* نویسنده رابط

^۱ Spherical Cap Harmonic Analysis

^۲ Root Mean Square Error

۱- مقدمه

یکی از اهداف مهم در دانش ژئودزی به‌عنوان علم و هنر مطالعه هندسه و میدان ثقل زمین، مدل‌سازی میدان ثقل زمین است. چراکه تمامی مشاهدات و سیستم‌های مبنا به نحوی وابسته به میدان ثقل زمین می‌باشند. در گذشته به دلیل در اختیار نبودن مشاهدات ثقلی با پراکندگی و تراکم مناسب، اغلب مدل‌سازی میدان ثقل از طریق حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیک صورت می‌پذیرفت. این مدل‌ها به دلیل پراکندگی نامناسب داده‌ها اغلب دقت بالایی نداشته و تنها در مقیاس‌های محلی قابل‌استفاده بودند. با توسعه‌ی فناوری در اندازه‌گیری مشاهدات ژئودزی، و پرتاب ماهواره‌های ثقلسنجی، امکان اندازه‌گیری مشاهدات ثقلی در مقیاس‌های جهانی، با تراکم و قدرت تفکیک مکانی بالا فراهم شده است. این اندازه‌گیری‌ها منجر به تولید مدل‌های جهانی ثقل شده‌اند که تحت عنوان مدل‌های ژئوتانسیل شناخت می‌شوند. این مدل‌ها، میدان ثقل جهانی را برحسب بسط به سری هارمونیک‌های کروی نمایش می‌دهند. مدل‌های فوق امکان مطالعات گسترده‌ای را در مباحث ژئودینامیکی و هیدرولوژی امکان‌پذیر نموده و نقش مهمی در افزایش شناخت بشر نسبت به چرخه پویای زمین داشته‌اند. باین‌حال به دلیل ساختار مشاهدات ماهواره‌ای، مدل‌های فوق در نمایش جزئیات میدان ثقل ناتوان بوده و تنها قادر به بازسازی طول‌موج‌های بالای میدان گرانش می‌باشند. به همین دلیل در کاربردهای منطقه‌ای، کماکان تولید مدل‌های محلی با قدرت تفکیکی مکانی بالا حائز اهمیت می‌باشند.

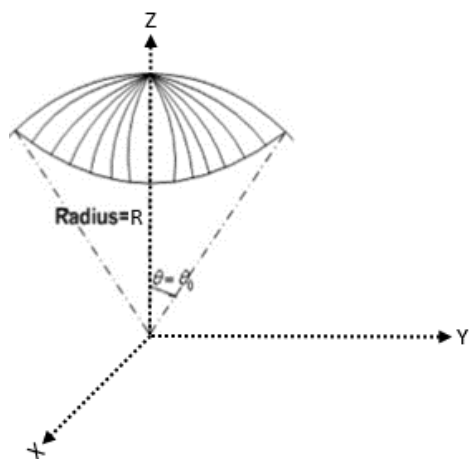
یکی از روش‌های متداول در مدل‌سازی محلی میدان ثقل، استفاده از بسط به توابع پایه‌ی محلی می‌باشد. هارمونیک‌های کروی به دلیل محمل جهانی، برای مدل‌سازی محلی میدان ثقل مناسب نمی‌باشند. به‌عبارت‌دیگر، استخراج جزئیات مربوط به طول‌موج‌های کوتاه میدان ثقل به‌وسیله بسط به سری هارمونیک کروی، معمولاً به شکست می‌انجامد [۱]. از طرف دیگر، برای رسیدن به قدرت تفکیک مکانی بالا از میدان به وسیله مدل هارمونیک‌های کروی، می‌بایست محاسبه پارامترهای بیشتر و حجم محاسبات بیشتری صورت گیرد که این به نوبه خود موجب جلوگیری از دسترسی به جواب بهینه از مسئله می‌گردد و در عمل نرخ همگرایی به جواب پایین می‌باشد [۲].

هینز در سال ۱۹۸۵، تئوری هارمونیک‌های کلاه کروی را توسعه داد. این تئوری امکان حل معادله‌ی لاپلاس را با در نظر گرفتن مقادیر مرزی بر روی محدوده‌ای به شکل کلاه کروی فراهم می‌کند [۳]. در این مدل، مرز مسئله یک کلاه کروی است که قطب آن روی مرکز منطقه‌ی مورد مطالعه قرار دارد و بدین ترتیب می‌توان از این روش جهت مدل‌سازی محلی میدان ثقل استفاده نمود (شکل (۱)). بر مبنای این روش یک تابع هارمونیک، با مقادیر مرزی تعریف‌شده بر روی کلاه کروی، قابل‌نمایش به صورت بسط سری هارمونیک‌های کروی از درجه حقیقی و مرتبه صحیح می‌باشد. به عبارت دیگر بر خلاف بسط سری هارمونیک‌های کروی، با مقادیر مرزی کره، که در آن هارمونیک‌های کروی تنها از درجه و مرتبه صحیح ظاهر می‌شوند، در اینجا درجه هارمونیک‌های کروی هر عددی می‌تواند باشد و لذا نمایش ریاضی آن‌ها بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر وابسته نخواهد بود.

این ایده نخستین بار جهت مدل‌سازی محلی میدان مغناطیس در محدوده‌ای از کشور کانادا به کار گرفته شد و علاوه بر آن برخی از مشکلات محاسباتی موجود در آن نیز مرتفع گردید [۴]. دی سنتیس در سال ۱۹۹۱ به بیان ارتباط بین مدل‌های جهانی بر حسب بسط به سری هارمونیک‌های کروی و مدل‌های محلی بر حسب هارمونیک‌های کلاه کروی پرداخت. او با استفاده از مدل‌های جهانی، داده‌های مغناطیس را بر روی شبکه‌ای منظم از نقاط ایجاد نموده و سپس به کمک این اطلاعات، ضرایب مدل محلی را بر حسب هارمونیک‌های کلاه کروی محاسبه نمود [۵]. دی سنتیز در ادامه، مدلی اصلاح‌شده از روش SCHA ایجاد نموده که در آن با اعمال برخی تکنیک‌های محاسباتی، موجب استفاده از تابع لژاندر با درجه صحیح به‌جای تابع لژاندر با درجه حقیقی گردید که این رهیافت به‌نوبه خود موجب افزایش دقت و سهولت در محاسبات گردید. این روش تحت عنوان هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده^۱ (ASHA) شناخته می‌شود [۱]. علاوه بر این، دی سنتیس، تغییرات دیگری را نیز بر مدل SCHA اعمال نمود و بدین صورت موفق شد طول موج‌های کوتاه‌تری را در میدان مغناطیس برای داده‌های نامنظم و پراکنده نسبت به روش معمولی SCHA بازیابی نماید [۶].

^۱ Adjusted Spherical Cap Harmonic Analysis

در روش SCHA، تابع هارمونیک V که از حل معادله لاپلاس حاصل می‌گردد، باید در شرایط مرزی بر روی محدوده‌ی کلاه کروی صدق کند. این محدوده در شکل (۱) نمایش داده شده است. مطابق شکل محور z سیستم مختصات زمین مرجع از مرکز کلاهک کروی می‌گذرد و لذا محدوده‌ی کلاهک کروی در سیستم مختصات کروی ناحیه $\theta, \lambda \in [0, \theta_0] \times [0, 2\pi]$ خواهد بود.



شکل ۱- محدوده عرقچین و سیستم مختصات عرقچینی با استفاده از موقعیت قطب کلاه کروی زاویه θ_0 بروی محدوده منطقه مورد مطالعه [۹]

در حالتی که داده‌های مشاهداتی در محدوده‌ای به شکل کلاه کروی قرار داشته باشند، علاوه بر شرایط مرزی معمول به منظور حل معادله‌ی لاپلاس [۳] دو شرط مرزی دیگر نیز به ازای $\theta = \theta_0$ باید مدنظر قرار گیرد (در این حالت محدوده‌ی کلاهک کروی نیز مرز مسئله را شامل شده و باید شرایط مرزی برای آن منظور گردد)، این شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌گردند [۳]:

$$V(r, \theta_0, \lambda) = f(r, \lambda) \quad (2)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = g(r, \lambda) \quad (3)$$

توابع f و g در شرایط مرزی و رگولاریتی مربوط به V صدق می‌کنند [۳]. می‌توان نشان داده که برای برقراری شرایط فوق باید مقدار n در رابطه ۱ به گونه‌ای تعیین شود که به ازای تمامی m ها دو شرط زیر برقرار گردد:

$$\frac{\partial V(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

از مشکلات مدل ارائه شده توسط هینز، مطلوب نبودن دقت حاصل شده در مدل‌سازی مناطق با ابعاد کوچک و مدل‌سازی نامناسب تغییرات شعاعی میدان مغناطیس می‌باشد. دبالت و همکارانش در سال ۲۰۰۴ و ۲۰۰۶ طی دو مقاله به ارائه مدل اصلاح شده R-SCHA در میدان مغناطیس پرداختند و نواقص مدل هینز را برطرف نمودند [۷، ۲].

از روش‌های دیگر آنالیز هارمونیک در مدل‌سازی محلی میدان ثقل، استفاده از هارمونیک‌های مستطیلی می‌باشد [۱، ۸] برخلاف روش SCHA این روش صرفاً برای مناطق با ابعاد بسیار کوچک مناسب است و برای مناطق بزرگ با افزایش تغییرات شعاعی موجب افزایش نمایی خطا در مدل‌سازی می‌گردد. بنابراین این روش برای مدل‌سازی میدان در مناطق بزرگی که کرویت زمین محسوس است، قابل استفاده نمی‌باشد. همچنین این روش برای میدان با تغییرات اسکالر بزرگ، به خوبی نمی‌تواند عمل کند، اما روش SCHA علاوه بر اینکه برای مدل‌سازی میدان‌های با تغییرات زیاد مناسب است، همخوانی بالایی با مشاهدات ثقل محلی دارد. همچنین در روش مدل‌سازی محلی SCHA بجای اینکه داده‌های مشاهداتی به عنوان مقدار مرزی، بروی گرید منظم تهیه یا درونیابی گردند از مشاهدات مستقیم و پراکنده جهت تشکیل معادلات مشاهدات و مدل‌سازی استفاده می‌گردد.

۲- مدل‌سازی میدان ثقل به روش SCHA

همانطور که می‌دانیم جواب معادله لاپلاس برای میدان پتانسیل جاذبی در سیستم مختصات کروی با در نظر گرفتن شرایط مرزی و همواری (شرط تشعشع، یعنی صفر شدن جواب در بی‌نهایت) [۳] بر حسب بسط به سری هارمونیک‌های کروی از درجه و مرتبه صحیح به صورت زیر بیان می‌گردد:

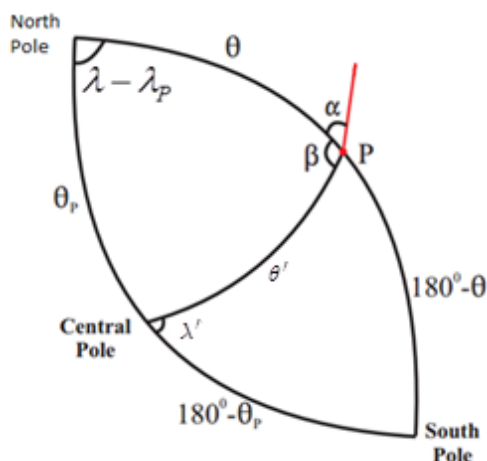
$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cdot [g_n^m \cos(m\lambda) + h_n^m \sin(m\lambda)] P_n^m(\cos \theta) \quad (1)$$

که در آن r ، θ و λ مختصات کروی نقطه مورد نظر، R شعاع متوسط کره زمین، و $P_n^m(\cdot)$ معرف توابع لژاندر از درجه n و مرتبه m است. h_n^m و g_n^m نیز ضرایب بسط می‌باشند.

۱ Revised Spherical Cap Harmonic Analysis

درجه‌ی حقیقی هارمونیک کلاه کروی $n_k(m)$ باید از حل معادلات ۱۰ و ۱۱ حاصل گردد.

مدل ارائه‌شده توسط هینز (۱۹۸۵) که روابط آن در بالا ارائه گردید با فرض قرارگیری محدوده کلاهیک کروی منطبق بر قطب به دست آمده است. مطابق شکل (۱)، جهت استفاده از این روش برای مناطق دیگر که منطبق بر ناحیه قطبی نمی‌باشند، باید از دوران صحیح سیستم مختصات استفاده نمود. اگر مرکز کلاه کروی منطبق بر قطب شمال نباشد، آنگاه سیستم مختصاتی تحت عنوان SCH برای منطقه مورد مطالعه ایجاد می‌گردد. این سیستم مختصات با استفاده از موقعیت مرکز کلاه کروی و زاویه θ_0 تعریف می‌گردد (شکل ۱). در این سیستم مختصات، نصف‌النهار مبدأ همان نصف‌النهار گذرنده از قطب شمال واقعی، قطب جدید و قطب جنوب می‌باشد، α آزیموت فاصله کروی از مرکز قطب تا نقطه مورد نظر، θ فاصله کروی از مرکز قطب تا نقطه P ، و در نهایت، r فاصله شعاعی از مرکز زمین تا نقطه مورد نظر است (شکل ۲).



شکل ۲- ارتباط بین سیستم مختصات جغرافیایی و سیستم مختصات [9] spherical cap

جهت دوران قطب و تبدیل از سیستم مختصات کروی به سیستم مختصات SCH از روابط زیر استفاده می‌شود [۱۰]:

$$\cos(\theta') = \cos(\theta_p) \cos(\theta) + \sin(\theta_p) \sin(\theta) \cos(\lambda - \lambda_p) \quad (12)$$

$$\tan(\lambda') = \frac{\sin(\theta) \sin(\lambda - \lambda_p)}{\sin(\lambda_0) \cos(\theta) - \cos(\theta_p) \sin(\theta) \cos(\lambda - \lambda_0)} \quad (13)$$

در روابط فوق (θ, λ) عرض و طول جغرافیایی داده‌ها در سیستم مختصات کروی و (θ_p, λ_p) مختصات عرض و طول

$$V(r, \theta_0, \lambda) = 0 \quad (4)$$

از آنجاکه تابع V و مشتق آن به طور هم‌زمان نمی‌تواند در $\theta = \theta_0$ صفر گردد، لذا برقراری شرط ۴ منجر به برقراری شرط مرزی ۲ و برقراری شرط ۵ منجر به برقراری شرط مرزی ۳ می‌گردد (برای آنکه شرایط مرزی (۲) و (۳)، برقرار باشند، باید درجه تابع لژاندر مربوط در معادله (۱)، از حل معادلات (۴) و (۵) تعیین گردد [۳]). شرایط ۴ و ۵ به ازای مقادیر حقیقی n برقرار می‌گردند که این مقادیر وابسته به m نیز می‌باشند و لذا آن‌ها را با $n_k(m)$ نمایش می‌دهیم. k یک عدد صحیح است که ریشه‌های مختلف n را به ازای هر m مرتب می‌کند. به علاوه می‌توان نشان داد

$$V_{n_k(m)}^m(r, \theta_0, \lambda) = 0, \quad k - m = \text{odd} \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_{n_k(m)}^m(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = 0, \quad k - m = \text{even} \quad (7)$$

بر این اساس، جواب معادله لاپلاس برای مقادیر مرزی روی کلاهیک کروی به صورت زیر بیان می‌گردد [۳]:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} R \left(\frac{R}{r} \right)^{n_k(m)+1} \cdot \left[g_k^m \cos(m\lambda) + h_k^m \sin(m\lambda) \right] \cdot P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \quad (8)$$

در رابطه فوق

$$P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \cos m\lambda \quad (9)$$

$$P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \sin m\lambda$$

هارمونیک‌های کلاه کروی نام دارند. این توابع، دو دسته توابع پایه متعامد به ازای $k - m = \text{even}$ و $k - m = \text{odd}$ بر روی سطح کلاه کروی تشکیل می‌دهند [۱]. شرط لازم و کافی برای برقراری روابط ۶ و ۷ آن است که

$$\frac{\partial P_{n_k(m)}^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta} = 0, \quad k - m = \text{even} \quad (10)$$

$$P_{n_k(m)}^m(\cos \theta_0) = 0, \quad k - m = \text{odd} \quad (11)$$

تابع لژاندری که در شروط فوق صدق می‌کند تابع لژاندر با درجه حقیقی و مرتبه صحیح می‌باشد که در آن

داده‌های برداری (مؤلفه‌ی شتاب ثقل در امتداد شعاعی) شتاب ثقل روی سطح کلاه کروی به عنوان مقادیر مرزی در نظر گرفته می‌شوند. معادلات مشاهدات برای مدل SCHA در جهت مؤلفه شعاعی سیستم مختصات کلاه کروی به صورت زیر تشکیل می‌گردد.

$$g_r = -\frac{\partial V(r, \theta, \lambda)}{\partial r} = \sum_{m=0}^{K_{\max}} \sum_{k=0}^m (n_k(m) + 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \{g_k^m \cos(m\lambda) + h_k^m \sin(m\lambda)\} \quad (17)$$

که g_r ، مؤلفه‌ی شتاب ثقل در راستای شعاعی و $K_{\max}$ ماکزیمم درجه در بسط به هارمونیک‌های کلاه کروی است. رابطه‌ی فوق را می‌توان بر اساس یک مدل پارامتریک خطی به صورت زیر بیان نمود

$$l + v = AX \quad (18)$$

که در آن l مشاهدات شتاب ثقل، X بردار مجهولات (ضرایب بسط فوق) و A ماتریس ضرایب است.

تعیین ضرایب هارمونیک کروی اغلب یک مسئله بد وضع بوده و جهت بررسی بد وضعی معادلات نرمال آن می‌توان از معیارهای آماری همچون مقدار عدد شرط، آنالیز حساسیت و شرط پیکارد استفاده نمود. که در صورت رد تست های آماری ذکر شده دستگاه معادلات ناپایدار می باشد. پایدارسازی روشی است که برای حل این چنین ناپایداری‌ها در سیستم معادلات استفاده می‌گردد. یکی از روش‌های متداول پایدارسازی، روش فیلیپس-تیخونوف می‌باشد. این روش امکان برقراری تعادل بین بایاس مسئله و واریانس جواب را فراهم می‌کند [۱۲]. در این روش تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\Phi(x) = \|AX - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2 \quad (19)$$

بر این اساس، X را چنان تعیین می‌کنیم که تابع هدف فوق را مینیمم کند. در رابطه‌ی فوق α پارامتر پایدارسازی می‌باشد و $\|x\|_2^2$ نرم جواب مسئله می‌باشد، جهت تعیین پارامتر پایدارسازی از روش منحنی ال استفاده می‌شود. با رسم لگاریتمی مقادیر $\|x\|_2^2$ در مقابل مقادیر $\|AX - b\|_2^2$ نمودار حاصل دارای گوشه به شکل L می‌شود و گوشه منحنی L بیانگر این ویژگی است که هم نرم باقیمانده‌ها و نرم جواب به‌طور بهینه‌ای مینیمم

جغرافیایی مرکز کلاه کروی (قطب جدید) می‌باشند. بعلاوه (θ', λ') مختصات نقاط نسبت به سیستم SCH است.

۱-۲- روش هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده (ASHA)

همانطور که در بخش قبل نشان دادیم، در محدوده‌ی کلاه کروی، یک تابع هارمونیک بر اساس بسط به سری هارمونیک‌های کلاه کروی بیان می‌گردد که در این بسط توابع لژاندر از مرتبه غیر صحیح $n_k(m)$ حضور دارند. در حالت کلی تعیین مقدار $n_k(m)$ از طریق معادلات ۱۰ و ۱۱ بسیار زمان‌بر بوده و علاوه بر آن توابع لژاندر مربوطه به صورت تقریبی و از الگوریتم‌های بازگشتی محاسبه می‌گردند [۱۱]. برای غلبه بر این مشکل دی سنتیس (۱۹۹۲) اصلاحاتی بر روی ایده هینز انجام داد و روشی بنام ASHA ارائه نمود [۱]. او با استفاده از تبدیل

$$\theta' = S\theta, \lambda' = \lambda, r' = r \quad (14)$$

که در آن، $S = \pi/2\theta_0$ ، ناحیه کلاهک کروی را بر یک نیم‌کره تصویر نموده و لذا بجای استفاده از توابع لژاندر با درجه حقیقی و مرتبه صحیح، از توابع لژاندر با درجه صحیح و مرتبه صحیح استفاده می‌گردد. (θ', λ', r') مختصات کروی تبدیل یافته نقاط تحت تبدیل ۱۴ است. لذا برای تابع هارمونیک V در محدوده‌ی کلاهک کروی و تحت تبدیل ۱۴ خواهیم داشت:

$$V(r', \theta', \lambda') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} R\left(\frac{R}{r'}\right)^{n_k+1} C_k'^m \cos(m\lambda') + S_k'^m \sin(m\lambda') \cdot \bar{P}_k^m(\cos \theta') \quad (15)$$

در این حالت

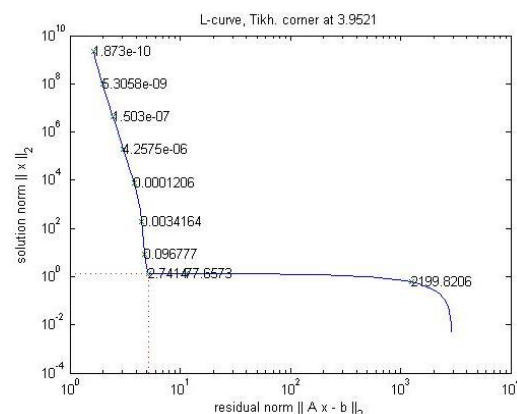
$$n(k) = \sqrt{s^2 k(k+1) + 0.25} - 0.5 \quad (16)$$

همانطور که از رابطه‌ی ۱۶ مشخص است جهت تعیین درجه حقیقی n_k دیگر استفاده از معادلات ۱۰ و ۱۱ نیازی نمی‌باشد و همچنین n_k دیگر تابعی از m و θ_0 نیست.

۲-۲- تخمین ضرایب مدل

جهت تخمین ضرایب مدل‌های فوق (g_k^m, h_k^m) از مسئله‌ی مقدار مرزی دیریخله استفاده می‌شود که در آن

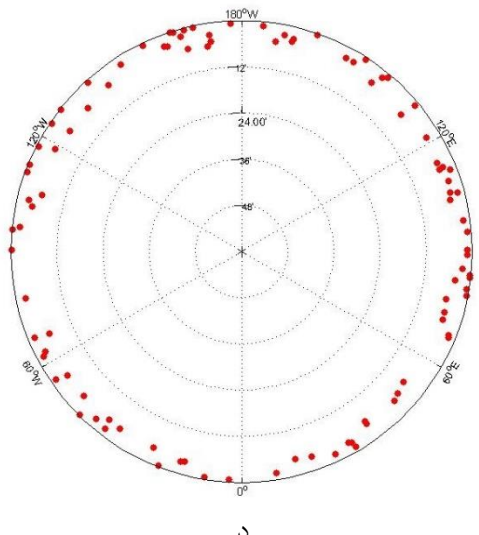
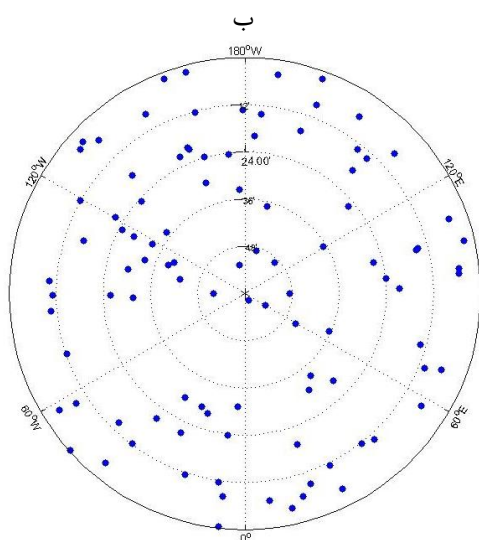
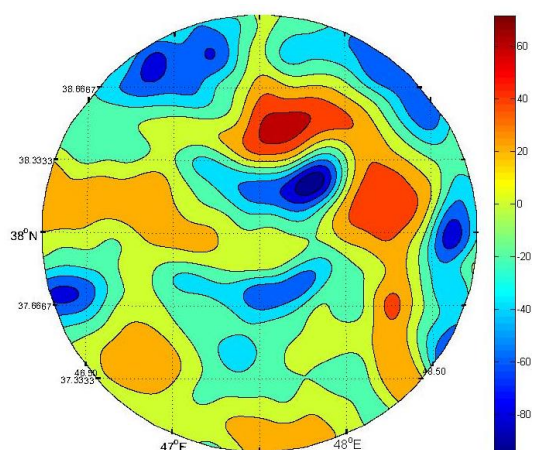
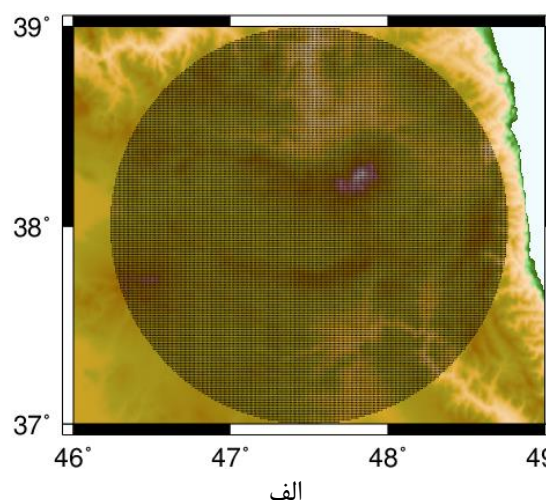
می‌گردد، و با استفاده از آن می‌توان پارامتر پایداری سازی بهینه را تعیین نمود (شکل ۳).



شکل ۳- نمودار منحنی L برای تعیین پارامتر پایداری سازی α در روش پایداری سازی تیخونوف. همانطور که در شکل مشخص است مقدار ۳,۹۵۱ به عنوان مقدار ضریب α در گوشه منحنی L حاصل شده است

۳- نتایج عددی

در این مطالعه، داده‌های ثقل سنجی هوایی برداری (مولفه‌ی شعاعی شتاب ثقل) به صورت شبیه‌سازی شده در منطقه‌ی کوهستانی شمال غرب کشور با محدوده‌ی عرض جغرافیایی $34 < \phi < 42$ و طول جغرافیایی $44 < \lambda < 51$ در ارتفاع ۷۰۰۰ متری از بیضوی رفرانس WGS84 بر روی شبکه‌ای با فاصله منظم ۰.۰۵ درجه ایجاد می‌شوند. داده‌های شبیه‌سازی شده ثقل در سیستم مختصات کلاه کروی با زاویه‌ی (θ_0) به اندازه‌های $1^\circ, 1.3^\circ, 1.5^\circ$ ایجاد می‌شوند (به شکل ۴-الف رجوع شود).



شکل ۴- (الف) گرید داده‌های ثقل سنجی هوایی شبیه‌سازی شده (ب) مولفه‌ی شعاعی شتاب جاذبی محاسبه‌شده از مدل EIGEN06C از درجه ۳۰۰ تا ۲۱۹۰ در محدوده جغرافیایی ۳۴ تا ۴۲ درجه عرض جغرافیایی و ۴۴ تا ۵۱ طول جغرافیایی (ج) نقاط کنترل ای که بطور تصادفی در سطح کلاهک کروی توزیع شده اند (د) نقاط کنترل ای که صرفاً در ۰.۱ درجه انتهایی لبه‌ی کلاهک کروی قرار دارند

این داده‌ها با استفاده از مدل EIGEN06C و بسط به سری هارمونیک کروی بین درجات ۳۰۰ تا ۲۱۹۰ محاسبه می‌شوند [۱۳]. جهت تطابق بیشتر با مشاهدات ثقل هوایی واقعی، نویز و خطاهای اتفاقی به اندازه دو دهم میلی گال به داده‌های مورد نظر اعمال شده است. جهت تبدیل داده‌های شبیه‌سازی شده به سیستم مختصات کلاه کروی، ابتدا قطب سیستم مختصات تعیین می‌گردد که این کار با میانگین‌گیری از عرض و طول جغرافیایی محدوده‌ی مطالعاتی مورد نظر انجام می‌شود. محل قطب سیستم مختصات کلاه کروی در منطقه‌ی مورد مطالعه ۳۸ درجه عرض جغرافیایی و ۴۷٫۵ درجه طول جغرافیایی می‌باشد. با استفاده از روابط ۱۲ و ۱۳ داده‌های شبیه‌سازی شده از سیستم مختصات کروی به سیستم مختصات کلاه کروی با قطب جدید تبدیل می‌گردد. نصف‌النهار مرجع در سیستم مختصات جدید، نصف‌النهار گذرنده از قطب شمال واقعی، نقطه‌ی قطب جدید با طول جغرافیایی ۴۷٫۵ درجه و قطب جنوب می‌باشد. داده‌ها و اطلاعاتی که خارج از کلاه کروی مورد نظر قرار می‌گیرند با استفاده از الگوریتم "در برداری چندضلعی" حذف می‌شوند [۱۴]. جهت بررسی صحت و دقت مدل‌های فوق نقاط کنترل به دو صورت پراکنده، و نقاط کنترل لبه‌ای در سیستم مختصات کلاه کروی در نظر گرفته شده است (شکل ۵- ج و د).

۳-۱- مدل‌سازی منطقه‌ای

در این تحقیق برای داده‌های شبیه‌سازی شده‌ی شتاب ثقل برداری هوایی بروی گرید منظم که شامل ۹۹۶۳ داده‌ی ثقلی است، مدل‌سازی محلی با استفاده از مؤلفه‌ی شعاعی شتاب ثقل در سیستم مختصات SCH برای کلاهک با زاویه‌های مرکزی $1.5^\circ, 1.3^\circ, 1^\circ$ و قطب با موقعیت ۳۸ درجه عرض جغرافیایی و ۴۷٫۵ درجه طول جغرافیایی صورت می‌گیرد. با توجه به مزایایی که در روش ASHA نسبت به روش SCH وجود دارد، در اینجا از روش ASHA جهت مدل‌سازی محلی میدان ثقل استفاده می‌شود.

با در نظر گرفتن ماکزیمم درجه در بسط به هارمونیک‌های کلاه کروی K_{max} ، معادلات مشاهدات مسئله شامل $(K_{MAX} + 1)^2$ مجهول (ضرایب هارمونیک کروی) خواهد بود. انتخاب صحیح K_{max} در مدل‌سازی محلی میدان ثقل موجب بهترین برازش مدل بروی داده‌های مشاهداتی می‌گردد و از طرفی با توجه به وابستگی تعداد مجهول به این کمیت، انتخاب

بهینه برای این پارامتر موجب صرف جویی در وقت و حجم محاسبات می‌شود. بدین منظور نخست مدل‌سازی میدان ثقل با مقادیر مختلف K_{max} صورت می‌گیرد و با توجه به دقت مدل مقدار بهینه انتخاب می‌شود (شکل ۵). بعد از درجه‌ی ۴۰، بهبود محسوسی در دقت مدل‌سازی صورت نگرفته است بلکه با ازای $K_{max} > 50$ ، با کاهش دقت در مدل‌سازی مواجه شده‌ایم. به علاوه RMSE^۲ بین مدل و نقاط کنترل در درجه‌ی ۵۰ دارای کمترین مقدار می‌باشد (جدول ۱). لذا درجه‌ی بهینه برای این کلاهک کروی (زاویه‌ی یک درجه) در منطقه‌ی شمال غربی کشور که قطب آن در موقعیت ۳۸ درجه عرض جغرافیایی و ۴۷٫۵ درجه طول جغرافیایی است برابر با ۵۰ می‌باشد. بهترین دقت حاصله از این مدل‌سازی یک دهم میلی‌گال بوده است که دقت قابل قبولی است.

از مشکلات موجود در روش هارمونیک کلاه کروی، وابستگی دقت مدل‌سازی به ابعاد منطقه مورد مطالعه است برای نشان دادن این مطلب، مدل‌سازی به روش ASHA در اندازه‌های کلاهک مختلف با زاویه‌های مرکزی (θ_0) 1° ، 1.3° و 1.5° انجام شد که نتایج آن در جدول (۱) ارائه گردیده است. در روش کلاهک کروی تصحیح شده، در مبحث تبدیلات توابع لژاندر از تقریب $\sin \theta \approx \theta$ استفاده شده است. این تقریب دقت نتایج را به ابعاد کلاهک وابسته می‌کند، به طوری که برای یک دقت قابل قبول باید $\theta_0 < 20^\circ$ باشد [۱]، در نتیجه با کاهش سایز کلاهک دقت مدل مورد استفاده افزایش می‌یابد. برای مثال در اندازه‌ی کلاهک یک درجه، بهترین تطابق مدل و نقاط کنترل در درجه‌ی ۵۰ و RMSE آن برابر با 0.0056 میلی‌گال می‌باشد. ولی برای اندازه کلاهک ۱٫۳ درجه و ۱٫۵ درجه این مقدار در بهترین حالت (مقدار K_{max} بهینه) به ترتیب به 0.0060 و 0.0059 میلی‌گال حاصل می‌شود. در لبه‌ی کلاهک کروی خطای مدل‌سازی با افزایش اندازه کلاهک افزایش می‌یابد. همانطور که در جدول (۱) مشخص است، خطای لبه‌ای با افزایش درجه هارمونیک کاهش می‌یابد ولی افزایش بی‌رویه K_{max} جهت برازش بهتر در نقاط لبه‌ای، باعث کاهش دقت در نقاط میانی و همچنین افزایش حجم و زمان محاسبات می‌گردد.

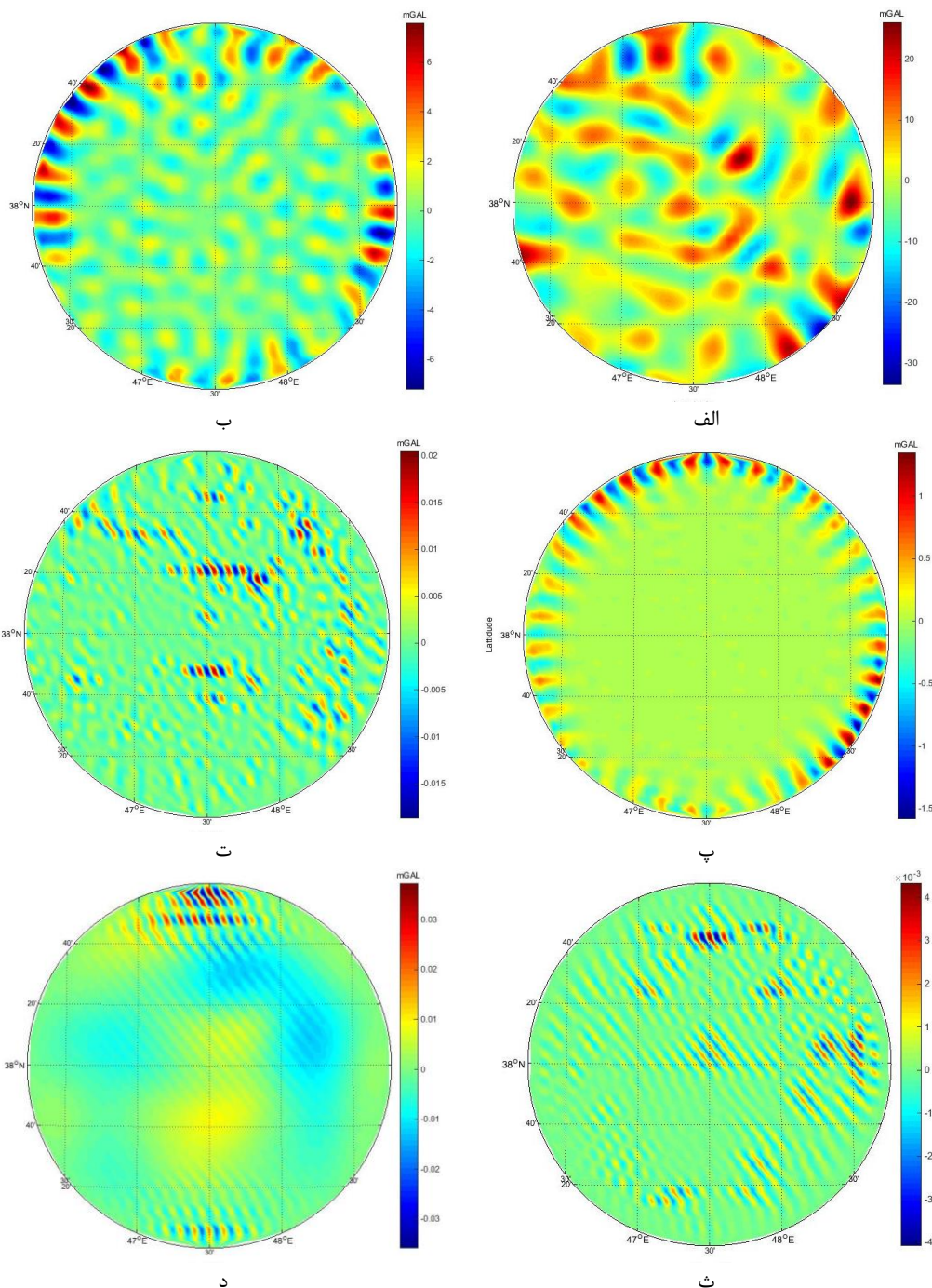
لذا بهترین و ساده‌ترین روش، انتخاب زاویه θ_0 بزرگتر و حذف باند لبه‌ای در اطراف کلاهک کروی می‌باشد که در این صورت دیگر خطای لبه‌ای اتفاق نمی‌افتد.

^۲ Root Mean Square Error

^۱ In Polygon theory

خطای لبه ای در مدلسازی محلی از دیگر مشکلات مطرح در این روش است [۷]. این خطا رابطه ی مستقیمی با نحوه ی توزیع داده دارد و در مناطقی که در تمام جهت آن داده های مشاهداتی وجود دارد مدل مورد استفاده مقید می گردد و بخوبی می تواند عمل مدلسازی را انجام دهد اما برای مناطقی که در اطراف یا بخشی از محدوده اطراف آن اطلاعات و مشاهدات وجود ندارد مدل دارای آزادی بیشتری می شود و بخوبی نمی تواند بر مشاهدات

در آن منطقه برازش را انجام دهد. جهت مقابله با این پدیده با توجه به اینکه امکان برونپایی نمی باشد لذا باندی که متاثر از نبود داده های مشاهداتی می باشد را می توان حذف نمود. برای مثال در روش هارمونیک کلاه در لبه های کلاهک با خطای لبه ای مواجه می باشیم، لذا راهکار مقابله با آن در نظر گرفتن محدوده ی مدلسازی بزرگتر از محدوده ی مطالعاتی و بریدن باند اطراف کلاهک که متاثر از خطای لبه ای است، می باشد.



شکل ۵- مقایسه ی درجات و مراتب مختلف مدل ASCH با زاویه ی کلاهک یک درجه با (الف) بیشترین درجه و مرتبه (K_{MAX}) برابر با ۱۰ (ب)

$$K_{MAX} = 20^{\circ} \text{ (پ)} \quad K_{MAX} = 30^{\circ} \text{ (ت)} \quad K_{MAX} = 40^{\circ} \text{ (ث)} \quad K_{MAX} = 50^{\circ} \text{ (د)} \quad K_{MAX} = 60^{\circ}$$

جدول ۱- نتایج حاصل شده از مدلسازی محلی به روش ASHA برای اندازه کلاهای مختلف (mGal)

اندازه درجه	1°		1.3°		1.5°	
	نقاط کنترل	نقاط کنترل لبه ای	نقاط کنترل	نقاط کنترل لبه ای	نقاط کنترل	نقاط کنترل لبه ای
10	۶,۷۸۳۷	۸,۷۲۲۰	۱۰,۱۳۵۰	۱۱,۷۴۷۳	۱۴,۳۴۰۰	۱۴,۱۶۱۸
20	۱,۹۰۵۵	۲,۵۱۶۳	۲,۵۳۳۸	۳,۱۵۹۴	۳,۸۱۰۱	۳,۹۸۴۱
30	۰,۲۵۷۸	۰,۴۶۲۴	۰,۴۲۸۰	۱,۰۳۵۴	۱,۰۹۱۹	۱,۴۷۰۸
40	۰,۰۰۷۰	۰,۰۱۲۰	۰,۰۲۰۰	۰,۰۷۸۲	۰,۰۵۱۵	۰,۱۶۲۱
50	۰,۰۰۵۵	۰,۰۰۳۲	۰,۰۰۵۹	۰,۰۰۵۸	۰,۰۰۵۹	۰,۰۰۵۵
60	۰,۰۰۵۶	۰,۰۰۳۰	۰,۰۰۶۰	۰,۰۰۵۷	۰,۰۰۵۹	۰,۰۰۵۵

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق مدل سازی منطقه ای داده های شبیه سازی شده ی ثقل سنجی هوایی، با استفاده از روش ASHA صورت گرفت. با توجه به بد وضعی دستگاه معادلات تشکیل شده، از روش پایداری سازی فیلیپس- تیخونوف و تعیین پارامتر پایداری سازی به روش منحنی ال، برای محاسبه ی ضرایب هارمونیک کروی اصلاح شده استفاده شد. روش هارمونیک کلاه کروی اصلاح شده دارای مزیت های فراوانی نسبت به روش SCHA است، از جمله استفاده از تابع لژاندر با درجه و مرتبه ی صحیح به جای تابع لژاندر با درجه ی حقیقی است که موجب سهولت، سرعت در محاسبات و جلوگیری از تقریب در تابع لژاندر با درجه ی حقیقی می گردد. همچنین در این روش نیازی نیست که از شروط مرزی جهت تعیین درجه ی حقیقی هارمونیک کلاه کروی استفاده شود و این مسئله سبب کاهش چشم گیری در حجم محاسبات می گردد. این روش نه تنها به خوبی می تواند مدل سازی محلی میدان ثقل را انجام دهد بلکه توانایی مدل سازی و

پیش بینی قسمت طول موج بلند و متوسط میدان ثقل را نیز دارا هست. نتایج حاصل شده از مدل سازی باقیمانده شتاب ثقل در راستای مؤلفه ی شعاعی به عنوان مشاهدات شبیه سازی شده ی ثقل هوایی در یک گرید منظم با ارتفاع پرواز ۷۰۰۰ متری از سطح بیضوی رفرنس در سیستم مختصات کلاهک کروی نشان می دهد که این مدل توانایی مدل سازی باقیمانده ی شتاب ثقل با دقت شش هزارم میلی گال را دارد. با توجه به اینکه این دقت به پارامترهای K_{MAJ} و اندازه کلاهک کروی وابسته است، در این تحقیق نشان داده شد که در روش ASHA با کاهش اندازه کلاهک کروی، دقت مدل سازی در محدوده ی کلاهک کروی برخلاف روش SCHA بهبود می یابد، همچنین در این مدل در لبه های کلاهک، با کاهش اندازه کلاهک کروی و افزایش درجه ی هارمونیک روی لبه ی کلاهک کروی دقت مدل سازی روبه بهبود است و جهت تعیین آن می بایست تعادلی بین دقت حاصل شده از نقاط کنترل در سطح کلاهک، و دقت حاصل شده از نقاط کنترل در لبه ی کلاهک، برقرار گردد.

مراجع

- [1] A. De Santis, "Conventional spherical harmonic analysis for regional modelling of the geomagnetic field," Geophysical research letters, vol. 19, pp. 1065-1067, 1992.
- [2] E. Thébaud, J. Schott, and M. Manda, "Revised spherical cap harmonic analysis) R-SCHA): Validation and properties," Journal of Geophysical Research: Solid Earth, vol. 111, 2006.
- [3] G. Haines, "Spherical cap harmonic analysis," Journal of Geophysical Research: Solid Earth, vol. 90, pp. 2583-2591, 1985.
- [4] G. Haines and L. Newitt, "Canadian geomagnetic reference field 1985," Journal of geomagnetism and geoelectricity, vol. 38, pp. 895-921, 1986.
- [5] A. De Santis, J. Torta, and C. Falcone, "A simple approach to the transformation of spherical harmonic models under coordinate system rotation," Geophysical Journal International, vol. 126, pp. 263-270, 1996.
- [6] A. De Santis, "Translated origin spherical cap harmonic analysis," Geophysical Journal International, vol. 106, pp. 253-263, 1991.

- [7] E. Thébault, J. Schott, M. Manda, and J. Hoffbeck, "A new proposal for spherical cap harmonic modelling," *Geophysical Journal International*, vol. 159, pp. 83-103, 2004.
- [8] L. Aldredge, "Rectangular harmonic analysis applied to the geomagnetic field," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 86, pp. 3021-3026, 1981.
- [9] J. Liu, R. Chen, Z. Wang, and H. Zhang, "Spherical cap harmonic model for mapping and predicting regional TEC," *GPS solutions*, vol. 15, pp. 109-119, 2011.
- [10] M. R. G. Razin and B. Voosoghi, "Regional ionosphere modeling using spherical cap harmonics and empirical orthogonal functions over Iran," *Acta Geodaetica et Geophysica*, pp. 1-15, 2016.
- [11] G. Younis, *Regional Gravity Field Modeling with Adjusted Spherical Cap Harmonics in an Integrated Approach: TU Darmstadt*. ۲۰۱۳ ,
- [12] A. A. R. S. A. A. Jomegi, "Comparison of regularization methods for Able-Poisson integral equation in downward continuation of gravity field modeling," *Journal of Geomatics Science and Technology*, vol. 3, pp. 15-30, 2013.
- [13] B. Alberts and C. I. B. Alberts, "Regional gravity field modeling using airborne gravimetry dataRegional gravity field modeling using airborne gravimetry data".
- [14] K. Hormann and A. Agathos, "The point in polygon problem for arbitrary polygons," *Computational Geometry*, vol. 20, pp. 131-144, 2001.