

مدل سازی میدان گرانی زمین بر اساس تقریب تُنک ضرایب هارمونیک های کروی با استفاده از الگوریتم پیگیری انطباقی قائم پایدار

سید عبدالرضا سعادت^{۱*}، عبدالرضا صفری^۲

^۱ دانشجوی دکتری ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران
rsaadat@ut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران
asafari@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت شهریور ۱۳۹۴، تاریخ تصویب آذر ۱۳۹۴)

چکیده

مدل سازی میدان گرانی زمین بر اساس بازسازی ضرایب هارمونیک های کروی تا درجه و مرتبه مشخص نیازمند داده هایی با تراکم و کیفیت مناسب مطابق معیار شانون - نایکوئیست در کل کره زمین بوده و این کار مستلزم صرف هزینه و زمان زیاد جهت جمع آوری و پردازش داده ها می باشد. بر اساس تئوری نمونه برداری فشرده (CS) می توان نرخ نمونه برداری را بطور قابل ملاحظه ای کاهش داده و یک سیگنال را بصورت تُنک با تعداد کمتری از داده ها تنها با استفاده از ضرایبی که سهم عمده ای در بازسازی آن دارند، تقریب زد. معمولاً در اینگونه مسائل برای مدل سازی میدان گرانی زمین با یک مساله بدوضع مواجه بوده و علاوه بر آن سطح تُنکی سیگنال نیز بطور دقیق مشخص نیست که این امر امکان استفاده از روش های متداول نمونه برداری فشرده را مشکل می سازد. در این مقاله روش جدیدی به نام الگوریتم پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP) جهت مدل سازی میدان گرانی زمین با تقریب تُنک ضرایب هارمونیک های کروی ارائه شده که علاوه بر قابلیت انطباق با مسائل بدوضع می تواند سطح تُنکی مساله را نیز بدرستی مشخص نماید. نتایج عددی حاصل از تعیین ضرایب هارمونیک های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶ نشان دهنده آن است که الگوریتم فوق قادر به بازسازی میدان گرانی زمین با دقت مدنظر با تعداد نمونه برداری ۵۰ درصد کمتر از نرخ نایکوئیست می باشد.

واژگان کلیدی: مدل سازی میدان گرانی، هارمونیک های کروی، مساله بدوضع، نمونه برداری فشرده و تقریب تُنک

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

یکی از مباحث مهم در ارتباط با تعیین ضرایب هارمونیک های کروی تا درجه و مرتبه مشخص به منظور مدل سازی میدان گرانی زمین جمع آوری داده هایی با تراکم و کیفیت مناسب می باشد. از آنجا که این ضرایب دارای ماهیت جهانی هستند، این نمونه برداری باید به صورت یکنواخت در کل کره زمین انجام شود. طبق قضیه شانون- نایکوئیست^۱ در صورتی می توان یک سیگنال را بطور کامل باز یابی نمود که فرکانس نمونه برداری حداقل دو برابر بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال باشد. به عبارت دیگر بر طبق این قضیه، بزرگترین فرکانسی که از یک سری داده می توان باز یابی نمود، برابر نصف فرکانس نمونه برداری است. بنابراین نمونه برداری بر اساس این قضیه مستلزم صرف هزینه زیاد جهت جمع آوری داده با تراکم و دقت بالا بوده و در بسیاری از مواقع نمونه برداری داده با نرخ نایکوئیست^۲ دشوار، پرهزینه و غیرممکن می باشد. تحقیقات بسیاری در زمینه نحوه نمونه برداری در آنالیز هارمونیک های کروی انجام شده است [۲، ۱]. بعنوان مثال استنیو [۲] نشان داد عدم تامین نرخ نایکوئیست در نمونه برداری باعث ایجاد خطای اعوجاج نوع دوم^۳ در مدل سازی میدان گرانی زمین خواهد شد. در این جا سوالی که مطرح می گردد این است که آیا می توان فرکانس مورد نظر در مدل سازی را با نرخی کمتر از نرخ نمونه برداری نایکوئیست باز سازی نمود؟ به عبارت دیگر آیا می توان یک سیگنال را بصورت فشرده با تعداد کمتری از نمونه ها باز یابی کرد؟ در سال های اخیر مفهوم نمونه برداری فشرده (CS)^۴ با توجه به اصلاح روش های معمول نمونه برداری در جمع آوری داده ها، مورد توجه بسیاری از علوم کاربردی قرار گرفته است. بعنوان مثال اخیراً استفاده از این ایده در پزشکی زمان اسکن و نمونه برداری تصاویر MRI^۵ را بطور قابل ملاحظه ای کاهش داده که این امر سبب افزایش ایمنی و سلامت بیماران شده است [۳]. با استفاده از ایده CS، تنها فرکانس هایی که سهم عمده ای در باز سازی میدان گرانی زمین دارند، انتخاب شده و به

طبع آن می توان تعداد مشاهدات و نمونه برداری را کاهش داد. در واقع بر اساس این تئوری یک سیگنال بصورت δ تک با انتخاب توابع پایه مناسب قابل باز سازی است. منظور از δ تک بودن یک سیگنال وجود برخی عناصر صفر و یا نزدیک به صفر در آن بوده به طوری که با حذف آنها ماهیت سیگنال اصلی تغییر قابل ملاحظه ای نداشته باشد. هر چه تعداد عناصر صفر (یا نزدیک به صفر) در یک سیگنال بیشتر باشد، میزان δ تنگی (یا تقریباً δ تنگی) آن نیز بیشتر خواهد بود. در این صورت نرم صفر بردار با تعریف مناسب برای نشان دادن سطح δ تنگی^۷ آن خواهد بود. مسائلی را که در آنها یک مقدار δ تک برای سیگنال مورد نظر تعیین می گردد، مساله تقریب δ تک^۸ گویند. به کارگیری سیگنال δ تک در محاسبات به دلیل صفر بودن بسیاری از عناصر، نیاز به حجم کمتری برای ذخیره سازی داده ها داشته، از طرفی زمان محاسبات نیز کاهش چشمگیری می یابد. مسائل تقریب δ تک بطور کلی دارای جواب یکتا نمی باشند ولی با اعمال یکسری شرایط مرزی مشخص می توان جواب بهینه ای برای مساله مورد نظر بدست آورد. روش های مختلفی برای حل یک مساله بصورت δ تک ارائه شده که مهمترین آنها استفاده از الگوریتم های تکراری نظیر روش ارائه شده توسط ملات و ژانگ [۴] بر مبنای پیگیری انطباقی (MP)^۹ می باشد. MP در واقع روشی بر اساس جایگزینی مساله دشوار با یک مساله بهینه در طی یک فرایند تکراری است [۵]. پس از آن پتی و همکاران [۶] با اصلاح روش فوق الگوریتم پیگیری انطباقی قائم (OMP)^{۱۰} را ارائه کردند که قابلیت به کارگیری توابع پایه غیر قائم را نیز دارا می باشد. ضمن آنکه با استفاده از این روش سرعت همگرایی محاسبات نیز نسبت به الگوریتم MP افزایش قابل ملاحظه ای می یابد. سپس تراپ و گیلبرت [۷] با بهبود روش OMP در آن تغییری ایجاد کردند که در هر تکرار امکان تعیین توابع پایه ای که بیشترین انطباق را با جواب مساله مورد نظر داشته باشد، فراهم گردد. از دیگر روش های تعیین جواب δ تک برای یک مساله می توان به روش پیگیری انطباقی

^۶ Sparse

^۷ Sparsity level

^۸ Sparse approximation problem

^۹ Matching Pursuit

^{۱۰} Orthogonal Matching Pursuit

^۱ Shannon/Nyquist

^۲ Nyquist rate

^۳ Aliasing of second type

^۴ Compressive Sampling

^۵ Magnetic Resonance Imaging

تُنک پایدار برای یک مساله بدوضع بر اساس الگوریتم SOMP توضیح داده می‌شود. سپس در بخش سوم چگونگی بازسازی تُنک ضرایب هارمونیک‌های کروی مدل‌های ژئوتانسلی در یک مساله خطی معکوس بیان می‌گردد. پس از آن در بخش چهارم نتایج و محاسبات عددی برای مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از الگوریتم مدنظر ارائه شده و در نهایت در بخش پایانی خلاصه نتایج تحقیق حاضر بیان می‌گردد.

۲- تقریب تُنک سیگنال با استفاده از روش پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP)

فرض کنید سیگنال $y \in \mathbb{R}^u$ را بتوان بر حسب ترکیب خطی از یک سری توابع پایه متعامد $\{p_i\}_{i=1}^u$ بصورت زیر بسط داد:

$$y = \sum_{i=1}^u x_i p_i \quad \text{or} \quad y = Px \quad (1)$$

در این رابطه $P = [p_1 | p_2 | \dots | p_u]$ ماتریس پایه $u \times u$ بوده که ستون‌های آن بردارهای پایه $\{p_i\}$ هستند. همچنین ضرایب بسط x_i با استفاده از رابطه ضرب داخلی $x_i = \langle y, p_i \rangle = p_i^T y$ تعیین می‌گردند. در واقع y نمایش سیگنال در فضای زمان یا مکان و x نمایش سیگنال در فضای توابع پایه P است. سیگنال y را تُنک از مرتبه m گویند، هرگاه بتوان آن را تنها بر اساس m بردار پایه $\{p_i\}$ بسط داد. عبارت دیگر m ضریب x_i در بسط رابطه (۱) غیر صفر بوده و $u-m$ ضریب دیگر صفر و یا بسیار نزدیک به صفر باشند. هر چه تعداد بیشتری از ضرایب، صفر (و یا نزدیک به صفر) باشند سطح تُنکی سیگنال هم بیشتر خواهد بود. در واقع یک سیگنال بصورت فشرده قابل نمونه‌برداری است، اگر بتوان آن را با تعداد اندکی از ضرایب غیرصفر بسط (نمایش) داد. مطالب ارائه شده اساس تئوری CS بوده که امکان نمونه‌برداری متناسب با m ضریب غیرصفر سیگنال اصلی را فراهم می‌سازد [۱۰، ۱۱]. از طرفی اگر یک سری اندازه‌گیری $b \in \mathbb{R}^n$ برای تعیین سیگنال y انجام گردد، به نحوی که داشته باشیم:

$$b = Qy \quad (2)$$

قائم منتظم (ROMP)^۱ ارائه شده توسط نیدل و ورشنین [۸] اشاره نمود. بر اساس این روش در هر تکرار به جای یک عنصر، m - عنصر غیرصفر که سهم بیشتری در بازسازی سیگنال موردنظر دارند، انتخاب می‌گردند. پس از آن نیدل و تراپ [۹] با ارتقاء الگوریتم ROMP روش پیگیری انطباقی نمونه‌برداری فشرده (CoSaMP)^۲ را ارائه کردند که قابلیت حل مسائل با نویز بالا را نیز دارا می‌باشد. در این الگوریتم محل دقیق عناصری که بیشترین انطباق را با جواب مساله دارند، همزمان با حذف عناصر غیر ضروری مشخص می‌گردد. فرض کنید هدف تعیین سیگنال $x \in \mathbb{R}^u$ در مساله خطی $Ax = b$ بوده که در آن $b \in \mathbb{R}^n$ بردار مشاهدات و $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ماتریس طراحی است. در تمام الگوریتم‌های تکراری ارائه شده سعی بر آن است که با یافتن زیرماتریس $B \subseteq A$ نُرم بردار خطا $e = x - \hat{x}$ مینیمم گردد که در اینجا $\hat{x}$ مقدار برآورد شده برای بردار مجهولات (سیگنال) با استفاده از یکی از الگوریتم‌های فوق است. همچنین این روش‌ها معمولاً برای مسائل خوش‌وضع ارائه شده و باید اطلاعات اولیه در مورد سطح تُنکی سیگنال اصلی وجود داشته باشد. ولی در بسیاری از مسائل کاربردی ژئودزی سطح تُنکی سیگنال و مقادیر اولیه آن بطور دقیق مشخص نیست. به ناچار در این گونه مسائل به جای مینیمم کردن نُرم بردار خطا باید در هر تکرار نُرم بردار باقیمانده $v = b - Ax$ مینیمم گردد. همچنین ممکن است با یک مساله بدوضع مواجه باشیم که در این صورت مینیمم کردن نُرم بردار باقیمانده‌ها لزوماً متناسب با مینیمم شدن نُرم بردار خطا نخواهد بود و حل این گونه مسائل نیازمند تعیین یک جواب بهینه پایدار با استفاده از روش‌های پایدارسازی مناسب است. لذا موارد و مشکلات اشاره شده ما را بر آن داشت تا الگوریتمی تحت عنوان پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP)^۳ جهت حل مسائل کاربردی ژئودزی معرفی نماییم که در آن سعی بر آن است با بررسی رفتار نُرم بردار باقیمانده‌ها و نُرم بردار مجهولات علاوه بر تعیین جواب پایدار در هر تکرار، سطح تُنکی سیگنال موردنظر نیز به درستی مشخص گردد. این مقاله مشتمل بر ۵ بخش اصلی است که پس از طرح مقدمه در بخش دوم روش تعیین جواب

^۱ Regularized Orthogonal Matching Pursuit

^۲ Compressive sampling Matching Pursuit

^۳ Stabilized Orthogonal Matching Pursuit

در این رابطه $Q \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ماتریس اندازه‌گیری است. هر عنصر بردار مشاهدات با ضرب داخلی از رابطه $b_j = \langle y, q_j \rangle$ تعیین می‌گردد که در آن $\{q_j\}_{j=1}^n$ سطرهای ماتریس اندازه‌گیری Q است. بنابراین با جایگزینی رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$b = Qy = QPx = Ax \quad (3)$$

در این رابطه $A = QP \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ماتریس طراحی نامیده می‌شود و باید به نحوی تشکیل گردد که علاوه بر حفظ اطلاعات اصلی در سیگنال قابل فشرده‌سازی و یا با سطح تُنکی m ، کمترین سازگاری^۱ بین عناصر دو ماتریس P و Q وجود داشته باشد. به عبارت دیگر با استفاده از ماتریس اندازه‌گیری مناسب توابعی با کمترین ارتباط و شباهت انتخاب می‌گردند. معمولاً در تئوری CS از ماتریس گوسی اتفاقی^۲ برای این منظور استفاده می‌شود. بنابراین اگر سطح تُنکی سیگنال x برابر m باشد، در این صورت حداقل به تعداد $n \geq m$ اندازه‌گیری (نمونه‌برداری) برای بازسازی m ضریب غیرصفر سیگنال اصلی نیازمندیم. البته کاندس و تالو [۱۲] نشان دادند شرط لازم و کافی برای استفاده از تئوری CS برقراری شرطی است که تحت عنوان ویژگی تشابه محدود (RIP)^۳ شناخته می‌شود. بر این اساس ماتریس طراحی A از شرط RIP با پارامتر (m, δ_m) برای $\delta_m \in (0, 1)$ تبعیت می‌کند، اگر داشته باشیم:

$$1 - \delta_m \leq \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq 1 + \delta_m \quad (4)$$

در این رابطه $\|x\|_0 \leq m$ است. در واقع این شرط نشان می‌دهد که حداقل m ستون ماتریس طراحی A تشکیل یک سیستم متعامد را می‌دهند. در واقع شرط RIP فرم خلاصه شده اصل عدم قطعیت یکنواخت^۴ در آنالیز هامونیک‌ها می‌باشد [۱۳، ۱۴]. یکی از روش‌های تعیین جواب تُنک برای یک مساله با سیگنال قابل فشرده‌سازی استفاده از الگوریتم‌های تکرارشونده است. معمولاً این الگوریتم‌ها بر اساس یافتن زیرماتریس مناسب $B \subseteq A$

بوده به نحوی که یک جواب تُنک $\hat{x}$ با حل مساله زیر تعیین گردد:

$$\hat{x} = \arg \min_x (\|b - Bx\|_2^2) \quad (5)$$

در این رابطه $\arg \min_x$ نشان‌دهنده آن است که جواب مساله با مینیمم کردن آرگومان x بدست می‌آید. اگر سطح تُنکی سیگنال $x \in \mathbb{R}^u$ برابر m باشد، آنگاه برای هر ترکیب $\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix}$ از عناصر غیرصفر آن یک جواب تُنک برای مساله بدست می‌آید که در آن باید نمونه‌برداری به نحوی انجام شود که ماهیت سیگنال اصلی با وجود حذف برخی از عناصر تغییر قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد [۱۰، ۱۱]. در روش‌های اشاره شده فوق معمولاً فرض بر این است که سطح تُنکی سیگنال (m) معلوم بوده و ماتریس طراحی نیز خوش‌وضع است. ولی در اکثر مسائل کاربردی ژئودزی سطح تُنکی بطور دقیق مشخص نیست از طرفی ممکن است با یک مساله بدوضع مواجه شویم که در این صورت استفاده از روش کمترین مربعات معمول (OLS)^۵ منتج به جواب‌های غیرصحیح خواهد شد. لذا در این تحقیق سعی بر آن شده است که با اصلاح روش‌های ROMP و CoSaMP روشی تحت عنوان الگوریتم پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP) ارائه شده تا علاوه بر تعیین سطح تُنکی سیگنال موردنظر، یک جواب پایدار نیز برای مساله با استفاده از روش‌های پایدارسازی مناسب تعیین گردد. در الگوریتم SOMP فرض می‌کنیم سیگنال x با ضرب ماتریس مبدل A^* (بعنوان مثال ماتریس شبه-وارون) در بردار مشاهدات b قابل بازسازی است ($\hat{x} = A^*b$). در این صورت با صفر قرار دادن مقدار اولیه مجهولات ($x_0 = 0$) در مساله خطی نسبت به پارامترهای مجهول می‌توان بردار $U = A^*v$ را بعنوان یک جواب تقریبی اولیه برای مساله در نظر گرفت. در نتیجه بزرگترین عناصر موجود در بردار U متناظر با عناصر غیرصفر سیگنال اصلی خواهد بود [۸]. سپس m ستون $[A_i]_{i=1}^u$ مربوط به ستون‌های ماتریس طراحی A متناظر با اندیس i ام از بزرگترین m عنصر اول بردار U در زیرماتریس B ذخیره شده و یک جواب تُنک برای مساله با استفاده از رابطه (۵) تعیین می‌گردد. معمولاً در مواقعی

^۱ Coherence
^۲ Random Gaussian matrix
^۳ Restricted Isometry Property
^۴ Uniform Uncertainty Principle

^۵ Ordinary Least Square

- ماتریس طراحی $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ، بردار مشاهدات $b \in \mathbb{R}^n$ و مقادیر اولیه بردار مجهولات x_0
- مشخص کردن مقادیر ماکزیمم تکرار $K_{\max}$ ، معیار همگرایی δ و فاکتور تطابق α

مراحل الگوریتم:

- ۱- تنظیم سطح تُنکی $m=1$ و بردار مجموعه اندیس‌ها $I_x = \emptyset$
- ۲- قرار دادن مقدار اولیه برای شمارنده $k=0$ و بردار مجهولات $x_m^{(k)} = x_0$
- ۳- محاسبه بردار باقیمانده‌ها $v_m^{(k)} = b - Ax_m^{(k)}$
- ۴- تعیین m عنصر بزرگ بردار $U = A^* v_m^{(k)}$ و ذخیره اندیس‌های متناظر با عناصر در بردار مجموعه اندیس‌های I
- ۵- مشخص کردن اندیس‌های $I_0 \subset I$ مربوط به عناصری که دارای تطابق بیشتری با هم مطابق شرط $|U_i| \leq \alpha |U_j|$ for $i, j \in I_0$ هستند.
- ۶- تغییر بردار مجموعه اندیس‌های $I_x = I_x \cup I_0$ و تعیین زیرماتریس $B_{I_x} \subseteq A$ به نحوی که ستون‌های آن متناظر با ستون‌های ماتریس طراحی A با شماره اندیس I_x باشد.
- ۷- محاسبه جواب پایدار با پارامتر پایداری λ

$$x_{I_x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(\|b - B_{I_x} x\|_2^2 + \lambda^2 \|x - x_m^{(k)}\|_2^2 \right)$$
- ۸- اصلاح عناصر بردار مجهولات با عناصر $x_m^{(k+1)} = x_{I_x}$ و محاسبه مجدد بردار باقیمانده‌ها $v_m^{(k+1)} = b - Ax_m^{(k+1)}$
- ۹- افزایش شمارنده $k = k+1$ و بازگشت به مرحله ۳ تا زمانی که $k \leq K_{\max}$ و شرط معیار همگرایی $\|v_m^{(k+1)}\|_2 < \delta$ و $\|I_x\|_0 < 2m$ برقرار باشد.
- ۱۰- ذخیره نُرم بردار باقیمانده $\|v_m^{(k+1)}\|_2 = V_m$ و نُرم بردار مجهولات $\|x_m^{(k+1)}\|_2 = X_m$ ، افزایش سطح تُنکی $m = m+1$ و بازگشت به مرحله ۲ تا زمانی که $m \leq u$

در این الگوریتم در هر مرحله یک جواب پایدار متناسب با سطح تُنکی مدنظر تعیین می‌گردد. همچنین با مشخص کردن فاکتور تطابق در مرحله ۵ عناصری که سازگاری بیشتری با هم دارند، برای محاسبه یک جواب

که با یک مساله بدوضع مواجه هستیم، استفاده از روش‌های معمول حل مساله منتج به نتایج صحیحی نخواهد شد. بنابراین برای حل اینگونه مسائل باید از روش‌های پایداری مناسب استفاده گردد. یکی از معروف‌ترین روش‌های پایداری برای حل یک مساله بدوضع استفاده از روش تیخونوف^۱ بوده که بطور مجزا توسط تیخونوف [۱۵] و فیلیپ [۱۶] ارائه شده است. این روش بر اساس مینیمم کردن نُرم بردار باقیمانده‌ها و یک ترم جبران‌کننده متناظر با نُرم بردار جواب با استفاده از رابطه زیر می‌باشد:

$$\hat{x}_{reg} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(\|b - Bx\|_2^2 + \lambda^2 \|x - x_0\|_2^2 \right) \quad (6)$$

در این رابطه x_0 مقدار اولیه تقریبی برای بردار جواب و λ پارامتر پایداری است که با استفاده از روش‌های مختلف نظیر معیار همگرایی منحنی L (L-curve) [۱۷] و یا روش اعتبارسنجی متقابل تعمیم‌یافته (GCV) [۱۸] قابل تعیین است. در واقع پارامتر پایداری تعادلی بین نُرم بردار باقیمانده و نُرم بردار جواب ایجاد می‌نماید. در الگوریتم SOMF بر اساس مینیمم کردن تابع GCV در رابطه زیر پارامتر پایداری بهینه در هر مرحله تعیین می‌شود:

$$GCV(\lambda) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{n \|b - Bx\|_2^2}{[\operatorname{trace}(I_n - BB^*)]^2} \right) \quad (7)$$

در این رابطه B^* زیرماتریس مبدل جهت محاسبه جواب برآوردشده مساله با ضرب آن در بردار مشاهدات است $(\hat{x}_{reg} = (B^T B + \lambda^2 I) B^T b = B^* b)$. در واقع با استفاده از این روش پایداری یک جواب پایدار با سطح تُنکی m برای مساله در مرحله m ام بدست می‌آید. سپس بردار باقیمانده‌ها براساس جواب تُنک حاصل اصلاح شده $(\hat{v}_{new} = b - A \hat{x}_{reg})$ و مراحل تا دستیابی به دقت مناسب و یا رسیدن به شرط توقف مدنظر تکرار می‌گردد. بر این اساس الگوریتم SOMF برای تعیین یک جواب تُنک برای مساله به قرار زیر است:

ورودی‌های الگوریتم:

^۱ Tikhonov regularization method
^۲ Generalized Cross Validation

و در معادله لاپلاس صدق می‌کند، بنابراین می‌توان آن را به سری هارمونیک‌های کره بسط داد [۱۹]:

$$W_g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{p=0}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^{p+1} \sum_{q=0}^p (\bar{C}_{pq} \cos q\lambda + \bar{S}_{pq} \sin q\lambda) \bar{P}_{pq}(\cos \theta) \quad (9)$$

در این رابطه G ثابت جاذبه، M جرم زمین، R شعاع کره برلیان، $\bar{C}_{pq}$ و $\bar{S}_{pq}$ ضرایب نرمالیزه شده هارمونیک‌های کره و وابسته به توزیع جرم زمین و $\bar{P}_{pq}(\cos \theta)$ تابع لژاندر نوع اول نرمالیزه از درجه p و مرتبه q است. همچنین آنومالی پتانسیل T در هر نقطه از سطح زمین را می‌توان با کم کردن پتانسیل جاذبی نرمال $U_g(r, \theta)$ حاصل از یک میدان رفرانس از پتانسیل جاذبی W_g محاسبه نمود:

$$T(r, \theta, \lambda) = W_g(r, \theta, \lambda) - U_g(r, \theta) \quad (10)$$

در واقع با معلوم بودن مقادیر ضرایب هارمونیک‌های کره می‌توان فرکانسی متناسب با درجه و مرتبه $N_{\max}$ برای تابع پتانسیل جاذبه و مشتقات مربوطه را در هر نقطه با استفاده از مساله مستقیم اشاره شده در روابط (۹) و (۱۰) بدست آورد. بزرگترین فرکانس سیگنال $f_{N_{\max}}$ استخراج شده مربوط به ماکزیمم درجه بسط $(N_{\max})$ دارای تناسب زیر با رزلوشن زمینی نمونه‌برداری (برحسب درجه یا کیلومتر) است:

$$L^\circ = \frac{360^\circ}{N_{\max}} \quad \text{or} \quad L_{Km} \approx \frac{40000 Km}{N_{\max}} \quad (11)$$

در این رابطه L طول زمینی نمونه‌برداری است. در حالت معکوس برای تعیین ضرایب بسط هارمونیک‌های کره با توجه به ماهیت جهانی آنها باید نمونه‌برداری با توزیع مناسب و بطور یکنواخت در کل کره زمین انجام شود. بر اساس قضیه شانون- نایکوئیست این نمونه‌برداری‌ها معمولاً با نرخ نایکوئیست صورت می‌گیرد. بر طبق این قضیه بزرگترین فرکانس بازبایی $f_{N_{\max}}^R$ که از یک سری داده می‌توان استخراج نمود، برابر نصف فرکانس نمونه‌برداری است $(f_{N_{\max}}^R \leq \frac{f_{N_{\max}}}{2} \rightarrow N_{\max}^R \leq \frac{N_{\max}}{2})$. بنابراین با توجه به نرخ نایکوئیست برای بازبایی فرکانس

یکنواخت برای مساله استفاده می‌شوند [۹]. در واقع این فاکتور میزان تطابق عناصر یک بردار به مقدار ماکزیمم را نشان داده و در مسائل مختلف با توجه به ماهیت مساله تعیین می‌گردد. بعنوان مثال اگر این فاکتور $\alpha = 2$ در نظر گرفته شود، بدین معنا است که تنها عناصر U_j که مقادیر آنها بیش از $1/2$ (۵۰ درصد) مقدار ماکزیمم عنصر بردار هستند، برای تعیین جواب بهینه انتخاب گردند ($|U_j| \geq |U_{\max}|/2$). خروجی این الگوریتم در واقع دو بردار $\mathbb{X}$ و $\mathbb{V}$ بوده که به ترتیب شامل نرم بردار باقیمانده و نرم بردار مجهولات با سطح تُنکی m می‌باشند. در نهایت سطح تُنکی بهینه^۱ می‌تواند با بررسی رفتار این بردارها برای مساله موردنظر تعیین گردد. بر این اساس معمولاً چند جمله اول دو بردار $\mathbb{X}$ و $\mathbb{V}$ با توجه به بدووضع بودن مساله دارای نوسانات زیادی بوده ولی پس از طی چندین تکرار این بردارها همگرا خواهند شد. بنابراین می‌توان نقطه همگرایی این دو بردار را با اعمال شرط زیر به عنوان محل سطح تُنکی بهینه m_{opt} در نظر گرفت:

$$m_{opt} = i \text{ if } \forall j > i \Rightarrow \|\mathbb{V}_i - \mathbb{V}_j\| < \varepsilon_1 \cap \|\mathbb{X}_i - \mathbb{X}_j\| < \varepsilon_2 \quad (8)$$

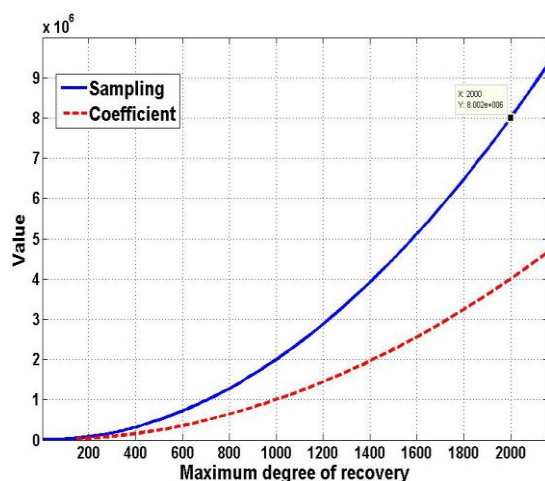
در این رابطه $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ معیار همگرایی بوده که توسط کاربر مشخص می‌گردند. معمولاً مسائل کاربردی با استفاده از الگوریتم فوق با چند تکرار ($K_{\max} \leq 5$) همگرا شده و می‌توان یک جواب پایدار تُنک برای مساله بدست آورد. ولی در مواقعی که سطح تُنکی سیگنال کم و یا بردار مشاهدات آمیخته با نویز زیادی باشد، الگوریتم SOM ممکن است به تعداد دفعات نامعلوم تکرار گردد که در این صورت وجود شرط ماکزیمم تکرار $K_{\max}$ از تکرار به تعداد زیاد الگوریتم فوق جلوگیری می‌نماید.

۳- مدل‌سازی میدان گرانی زمین با تقریب تُنک ضرایب هارمونیک‌های کره

منظور از مدل‌سازی میدان گرانی زمین در حقیقت بیان ریاضی این کمیت فیزیکی و یا تابع‌های مختلف مربوط به آن با استفاده از توابع پایه مستقل می‌باشد. تابع پتانسیل جاذبه W_g برای یک نقطه با مختصات کره (r, θ, λ) در خارج از سطح زمین یک تابع هارمونیک بوده

^۱ Optimal sparsity level

اساس وارون فراگیر ماتریس طراحی نظیر روش شبه-وارون مور-پنروس^۱ [۲۱، ۲۲، ۲۳] و یا روش‌های پایدارسازی مناسب اشاره شده قبل استفاده نمود. بنابراین برای بازیابی فرکانسی تا درجه و مرتبه $N_{\max}^R \geq 2$ در مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین با $u' = (N_{\max}^R + 1)^2 - 4$ ضریب مجهول، نیازمند نمونه‌برداری به تعداد $n = 2(N_{\max}^R)^2$ در کل کره‌زمین هستیم. در شکل (۱) ارتباط بین ماکزیمم درجه بازیابی در بسط سری هارمونیک‌های کروی با ضرایب مجهول و تعداد نمونه‌برداری در کل کره‌زمین نشان داده شده است. ملاحظه می‌گردد برای مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین بر اساس بازسازی ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه 2160 نیازمند نمونه‌برداری در کل کره‌زمین بر روی گرید $5' \times 5'$ و جمع‌آوری بالغ بر 9,331,200 داده برای تعیین 4,669,917 ضریب مجهول هستیم که انجام این محاسبات مستلزم صرف زمان زیاد و استفاده از رایانه‌ای با قدرت پردازش بالا است. لذا در این مقاله سعی بر آن شده است تا با به کارگیری تئوری CS و با استفاده از الگوریتم SOMP علاوه بر مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین با دقت موردنظر بر اساس تقریب تُنک ضرایب هارمونیک کروی، در حجم محاسبات و نحوه نمونه‌برداری داده‌ها نیز کاهش قابل ملاحظه‌ای ایجاد گردد.



شکل ۱- ارتباط بین ماکزیمم درجه بازسازی در بسط سری هارمونیک‌های کروی با تعداد ضرایب مجهول و نمونه‌برداری

$f_{N_{\max}^R}^R$ تعداد نمونه‌برداری بر روی گرید منظم در کل کره‌زمین (در راستای طول جغرافیایی $\lambda \in [-180^\circ, 180^\circ]$ و عرض جغرافیایی $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$) باید برابر $n = \left(\frac{360^\circ}{L}\right)^2 = 2(N_{\max}^R)^2$ باشد. از طرفی رابطه (۹) نسبت به ضرایب هارمونیک‌های کروی خطی بوده و به ازای ماکزیمم درجه بازیابی $N_{\max}^R$ دارای $u = (N_{\max}^R + 1)^2$ ضریب مجهول است. بنابراین رابطه (۱۰) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$b = b_0 + Ax \quad (12)$$

که در آن $b_{n \times 1} = [T(r_i, \theta_i, \lambda_i)]_{i=1}^n$ بردار مشاهدات شامل تابع‌های میدان‌گرانی زمین، $b_{0 \times 1} = \left[\frac{GM}{R} - U_g(r_i, \theta_i) \right]_{i=1}^n$ ترم صفر، $x_{u' \times 1} = [x_{pq}]$ بردار مجهولات شامل ضرایب هارمونیک‌های کروی به استثنای ضرایب صفر و یک ($\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}$) و $A_{n \times u'} = \frac{GM}{R} [A_{pq}(i)]_{i=1}^n$ ماتریس طراحی است. بطوریکه داریم:

$$x_{pq} = \begin{cases} \bar{C}_{pq} \\ \bar{S}_{pq} \end{cases} \text{ for } p = 2, 3, \dots, N_{\max}^R \quad (13)$$

and $0 \leq q \leq p$ where if $q = 0$ then $\bar{S}_{pq} = \emptyset$

$$A_{pq}(i) = \left(\frac{R}{r_i} \right)^{p+1} [\cos q \lambda_i \quad \sin q \lambda_i] \bar{P}_{pq}(\cos \theta_i) \quad (14)$$

for $p = 2, 3, \dots, N_{\max}^R$ and $0 \leq q \leq p$

در نهایت با حل مساله معکوس مقادیر ضرایب مجهول هارمونیک‌های کروی محاسبه می‌گردد:

$$\hat{x} = \arg \min_x \|b - b_0 - Ax\| \quad (15)$$

البته اگر در رابطه (۱۵) تعداد نمونه‌برداری کمتر از نرخ نایکوئیست باشد، با یک مساله بدوضع مواجه خواهیم شد [۲۰، ۲۱]. همانطور که قبلاً مطرح گردید با استفاده از روش‌های معمول محاسباتی نظیر OLS نتایج درستی برای مساله بدست نخواهد آمد. در این گونه موارد برای تعیین جواب بهینه برای مساله معکوس باید از الگوریتم‌هایی بر

^۱ Moore-Penrose pseudo inverse

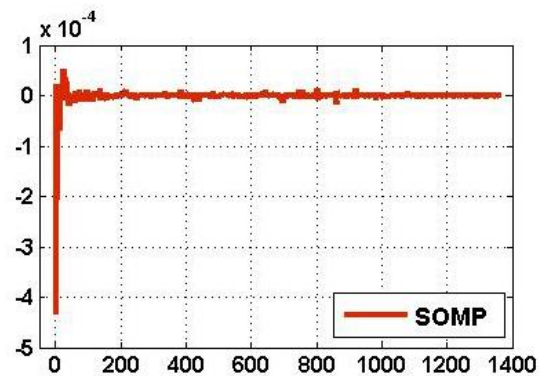
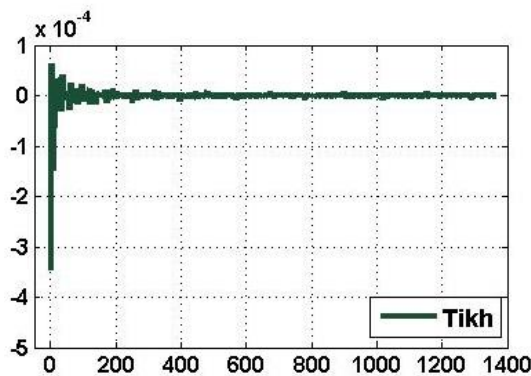
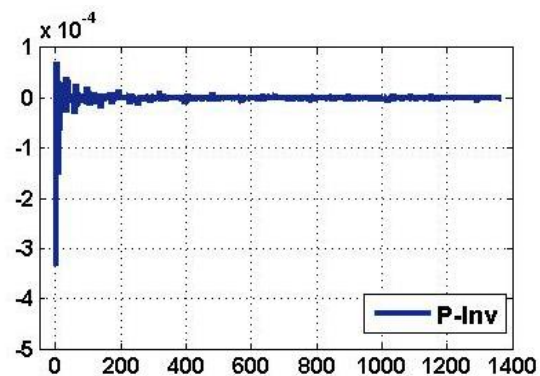
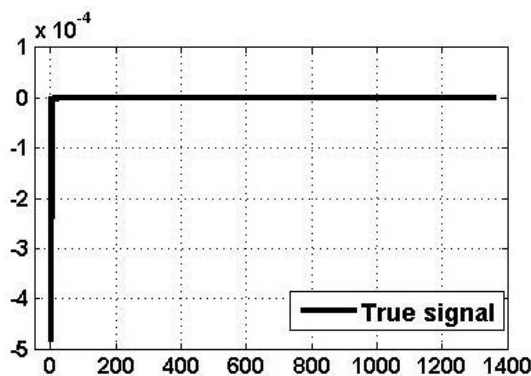
۴- محاسبات و نتایج عددی

در این بخش قابلیت و توانایی الگوریتم SOMP در تقریب تُنک ضرایب هارمونیک های کره ی مدل ژئوپتانسیلی جهانی (GGM^۱) جهت مدل سازی میدان گرانی زمین با تعداد نمونه برداری کمتر از روش های معمول مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور ابتدا مقدار آنومالی پتانسیل با استفاده از مدل ژئوپتانسیلی جهانی EIGEN6C4 تا درجه و مرتبه $N_{max}=36$ و حذف یک میدان رفرنس بر روی گرید منظم $5^\circ \times 5^\circ$ محاسبه شده است. در این محاسبات تعداد داده نمونه برداری شده کمتر از نرخ نایکوئیست و برابر $n=1,800$ نقطه برای کل کره زمین به منظور تعیین $u=1,365$ ضریب مجهول هارمونیک های کره ی در نظر گرفته شده است. همچنین

450 نقطه با پراکندگی یکنواخت در سرتاسر کره زمین به عنوان نقاط کنترل نتایج محاسبات در نظر گرفته شده و آنومالی پتانسیل تا درجه و مرتبه مشخص برای این نقاط محاسبه شده است. سپس با استفاده از چهار روش ۱- کمترین مربعات معمول (OLS)، ۲- شبه-وارون (P-Inv)، ۳- پایدارسازی تیخونوف (Tikh) و ۴- الگوریتم SOMP پیشنهادی ضرایب هارمونیک های کره ی بعنوان مجهولات در یک مساله معکوس محاسبه شده است. در این محاسبات به منظور کنترل صحت نتایج می توان با مقایسه ضرایب برآورد شده و مقادیر اولیه حاصل از مدل ژئوپتانسیلی بردار خطا ($e=x-\hat{x}$) را برای هر یک از روش های اشاره شده بدست آورد. در جدول (۱) مقادیر عددی مربوط به بردار خطا با استفاده از چهار روش فوق ارائه شده است.

جدول ۱- نتایج آماری مربوط به بردار خطا در بازسازی ضرایب هارمونیک های کره ی تا درجه و مرتبه ۳۶ با استفاده از روش های مختلف

Method	Min(e)	Mean(e)	Max(e)	SD(e)	RMS(e)	Sparsity
OLS	-5.7e+34	1.5e034	7.9e+35	9.7e+34	9.8e+34	1365
P-Inv	-1.5e-04	9.4e-09	1.5e-04	7.3e-06	7.3e-06	1365
Tikh	-1.4e-04	7.9e-09	1.5e-04	7.0e-06	7.0e-06	1365
SOMP	-5.1e-05	2.5e-09	7.0e-05	4.1e-06	4.1e-06	1125



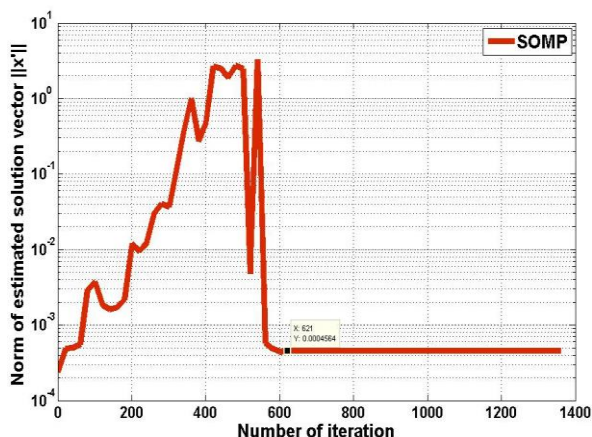
شکل ۲- ضرایب بازسازی شده با استفاده از روش های مختلف

^۱ Global Geopotential Model

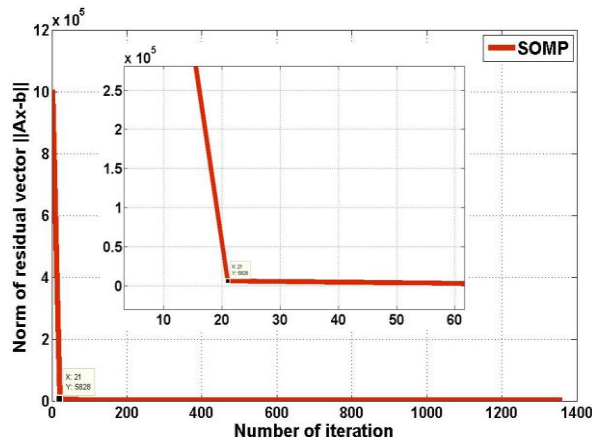
جدول ۲- نتایج آماری مربوط به بردار باقیمانده در بازسازی ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶ با استفاده از روش‌های مختلف بر روی

نقاط کنترل

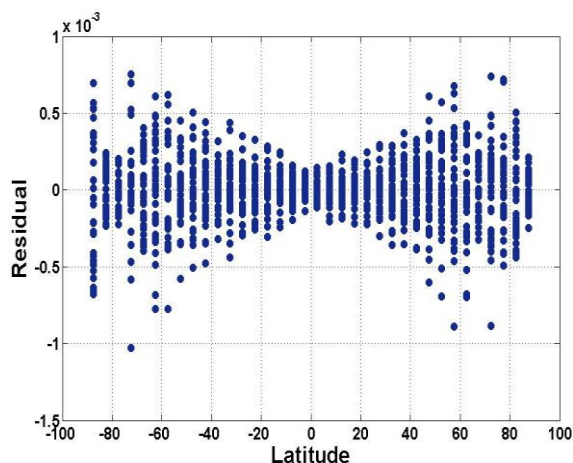
Method	Min(v)	Mean(v)	Max(v)	SD(v)	RMS(v)
OLS	-9.9e+043	3.0e+044	5.6e+045	1.1e+045	1.6e+045
P-Inv	-9.6e-001	6.7e-003	1.0e+000	3.2e-001	4.4e-001
Tikh	-4.5e-004	1.5e-011	4.7e-004	9.4e-005	1.3e-004
SOMP	-1.0e-003	1.1e-010	7.5e-004	2.1e-004	2.9e-004



شکل ۴- نرم بردار مجهولات در تکرارهای مختلف بر اساس الگوریتم SOMP - بردار مجهولات در تکرار ۶۲۱ همگرا شده است.



شکل ۳- نرم بردار باقیمانده در تکرارهای مختلف بر اساس الگوریتم SOMP - بردار باقیمانده در تکرار ۲۱ همگرا شده است



شکل ۵- پراکندگی مقادیر باقیمانده‌ها نسبت به عرض جغرافیایی (هر امتداد نشان دهنده یک مدار نمونه‌برداری است).

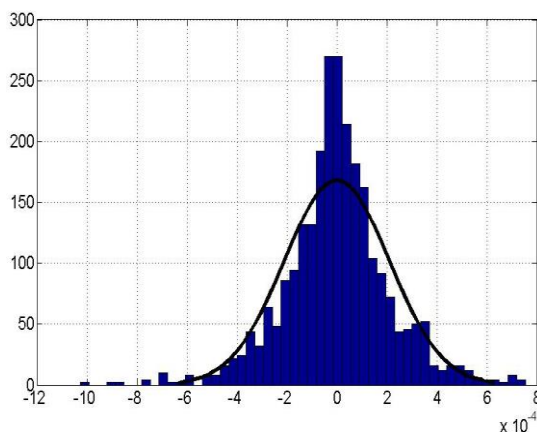
آنومالی پتانسیل را در نقاط کنترل محاسبه کرده و با مقادیر اولیه آن مقایسه نمود. در این صورت بجای بردار خطا، بردار باقیمانده ($\hat{v} = b - A\hat{x}$) در هر نقطه محاسبه می‌گردد. می‌دانیم که بعنوان مثال تعیین سطح مبنای ارتفاعی با دقت میلیمتر نیازمند مدلسازی تابع آنومالی پتانسیل بر روی سطح رفرانس (ژئوئید یا بیضوی) با دقت $10^{-3} m^2/s^2$ است که بر اساس نتایج محاسبات تنها با استفاده از روش‌های پایدارسازی مناسب می‌توان به دقت موردنظر دست یافت. جدول (۲) نتایج آماری محاسبات

با توجه به نتایج محاسبات همانطور که انتظار می‌رود ضرایب هارمونیک‌های کروی تعیین شده با استفاده از روش OLS بدلیل بدوضع بودن مساله کاملاً نادرست و غلط می‌باشند. ولی اختلاف ضرایب محاسبه شده با مقادیر اولیه بر اساس دو روش P-Inv و Tikh به ترتیب دارای ریشه مربعی متوسط (RMS) 7.3×10^{-6} و 7.0×10^{-6} است. ولی با اجرای الگوریتم SOMP طی یک فرایند تکراری با توجه به ماهیت تُنک بودن آن تنها ضرایبی که دارای بیشترین اثر متناسب با نمونه‌برداری انجام شده هستند، تعیین شده و RMS بردار خطا نیز برابر 4.1×10^{-6} محاسبه می‌گردد. در این محاسبات ماکزیمم تکرار $K_{max} = 5$ ، فاکتور تطابق $\alpha = 5$ و معیار همگرایی الگوریتم برابر $\delta = 10^{-12}$ درنظر گرفته شده است. همچنین شکل (۲) ضرایب بازسازی شده با استفاده از روش‌های مختلف را نشان می‌دهد. البته از آنجا که هدف اصلی این تحقیق مدلسازی میدان گرانی زمین و تعیین مشتقات تابع پتانسیل جاذبه با دقت موردنظر است، می‌توان با استفاده از ضرایب مجهول برآورد شده بر اساس روش‌های مختلف، مقدار تابع

^۱ Root Mean Square

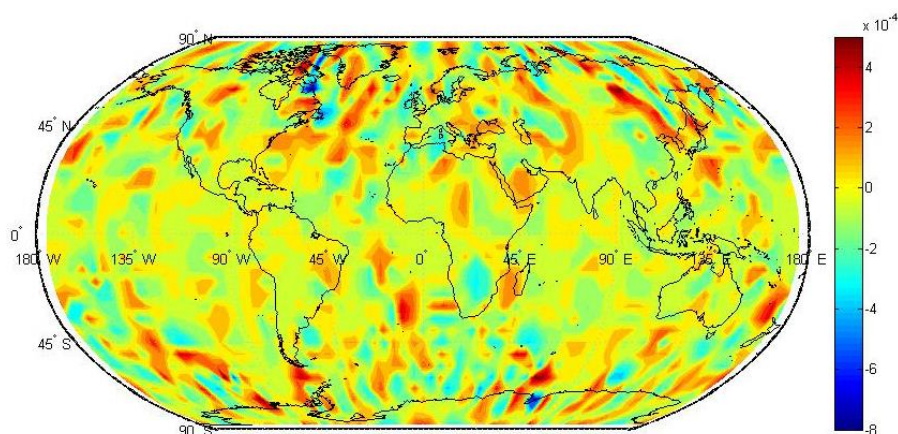
مربوط به بردار باقیمانده‌ها را با استفاده از روش‌های مختلف بر روی نقاط کنترل نشان می‌دهد. بر اساس نتایج بدست آمده با استفاده از روش‌های Tikh و SOMP دقت مدنظر برای محاسبه آنومالی پتانسیل تا درجه و مرتبه ۳۶ تامین شده است. همچنین در این محاسبات با اجرای الگوریتم SOMP و برقراری معیار همگرایی $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ، نرم بردار باقیمانده بعد از 21 تکرار همگرا شده ولی با توجه به بدوضع بودن مساله این نقطه همگرایی مطابق شکل ۴ معادل جواب بهینه در حل مساله CS نخواهد بود. بنابراین با در نظر گرفتن معیار همگرایی $\varepsilon_2 = 10^{-1}$ در شرط رابطه (۸) و بررسی رفتار نرم بردار مجهولات در تکرارهای مختلف، سطح تُنکی بهینه (m_{opt}) در تکرار 621 تعیین می‌گردد. در اشکال (۳) و (۴) به ترتیب نرم بردار باقیمانده و نرم بردار مجهولات در هر تکرار با استفاده از الگوریتم SOMP نشان داده شده است. در واقع با استفاده از الگوریتم SOMP با حذف $1365 - 1125 = 240$ ضریب معادل ۱۸٪ کل ضرایب مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین با از دست دادن حداقل اطلاعات قابل انجام بوده و نشان دهنده آن است که در این سطح تُنکی بهینه تنها با برآورد 1125 ضریب از ضرایب مجهول هارمونیک‌های کروی می‌توان به رنج دقت موردنظر در مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین دست یافت. البته بر اساس تئوری CS در الگوریتم SOMP به تعداد نمونه‌برداری متناسب با سطح تُنکی مساله که بسیار کمتر از نرخ نایکوئیست است، نیازمندیم. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده بر اساس الگوریتم پیشنهادی بیشترین مقدار خطای محاسبات در قطبین - جایی که تراکم داده‌ها و به تناسب آن شباهت عناصر ماتریس طراحی بیشتر است - می‌باشد. شکل (۵) پراکندگی مقدار باقیمانده نسبت به عرض جغرافیایی را نشان می‌دهد. جایی که در قطبین تراکم داده‌ها با توجه به نمونه‌برداری بر روی گرید جغرافیایی بیشتر است. همچنین در اشکال (۶) و (۷) به ترتیب توزیع مقدار باقیمانده‌ها در کل کره زمین و هیستوگرام خطا در مدل‌سازی میدان‌گرانی با استفاده از الگوریتم SOMP نشان داده شده است. البته همانطور که اشاره شد در تئوری CS انتخاب ماتریس طراحی مناسب با کمترین شباهت بین عناصر آن از اهمیت خاصی برخوردار بوده و معمولاً با یک سری نمونه‌برداری اختیاری $n \approx u$ (کمتر از نرخ نایکوئیست) عملیات بازسازی سیگنال انجام می‌شود. در این محاسبات نیز با توجه به پراکندگی مقادیر

خطای باقیمانده‌ها می‌توان در نحوه نمونه‌برداری نیز تجدید نظر نمود. بعنوان مثال بجای نمونه‌برداری بر روی گرید جغرافیایی با فواصل-زاویه‌ای مساوی در راستای طول و عرض جغرافیایی با نرخ نایکوئیست می‌توان جمع‌آوری داده را بر روی گرید ریوتر^۱ [۲۴] با فواصل-طول مساوی در امتداد طول جغرافیایی انجام داد. در شکل (۸) تعداد $n = 1,326$ نمونه‌برداری بر اساس تئوری CS بر روی گرید ریوتر به تعداد $n \approx u$ نسبت به نمونه‌برداری بر اساس نرخ نایکوئیست بر روی گرید جغرافیایی $5^\circ \times 5^\circ$ نشان داده شده است. با انجام محاسبات مربوطه ملاحظه می‌گردد صورت وابستگی مقادیر باقیمانده‌ها نسبت به عرض جغرافیایی از بین رفته است (شکل ۹). همچنین شکل (۱۰) پراکندگی توزیع مقادیر باقیمانده را در سطح کره زمین بر اساس تئوری CS و با انتخاب ماتریس طراحی مناسب نشان می‌دهد. در این محاسبات از تعداد کمتری نمونه‌برداری ($n \approx u$) برای مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین به منظور تقریب تُنک ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶ استفاده شده است. نتایج محاسبات نشان‌دهنده آن است که الگوریتم SOMP حتی با توجه به بدوضع مساله که در آن عدد شرط ماتریس ضرایب در حدود 4×10^{31} می‌باشد، قادر به بازسازی میدان‌گرانی زمین با دقت موردنظر با تعداد نمونه‌برداری کمتر نسبت به نرخ نایکوئیست است. جدول (۳) نتایج آماری مربوط به بازسازی میدان‌گرانی زمین بر اساس تئوری CS و انتخاب ماتریس طراحی مناسب را ارائه می‌دهد.

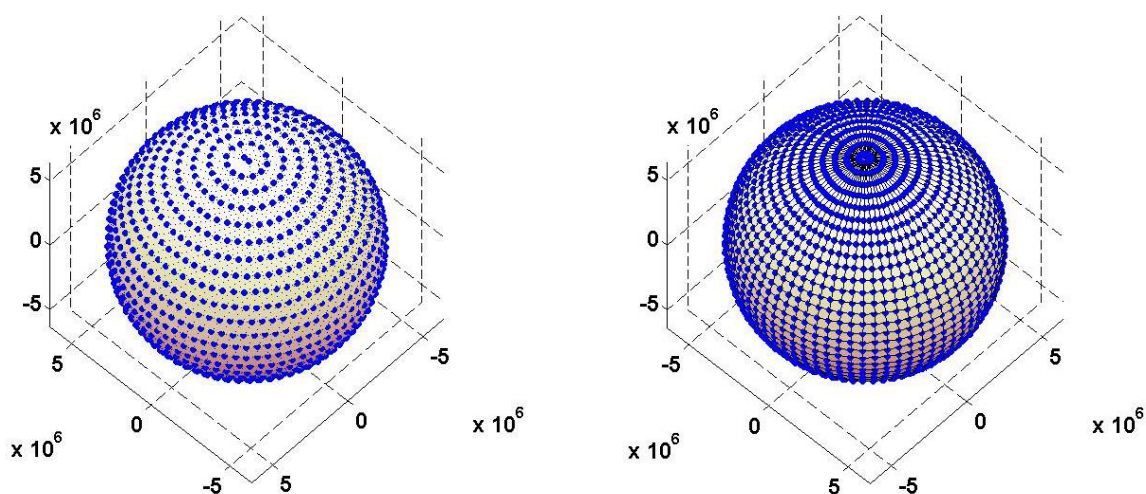


شکل ۷- هیستوگرام مقادیر باقیمانده‌ها

^۱ Reuter grid



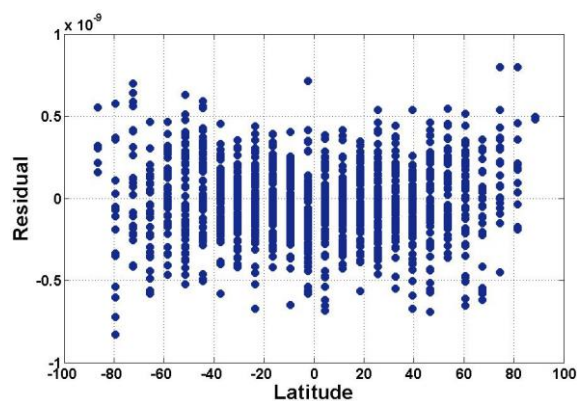
شکل ۶- نحوه پخش مقدار باقیمانده در مدل سازی میدان گرانی با استفاده از الگوریتم SOMP



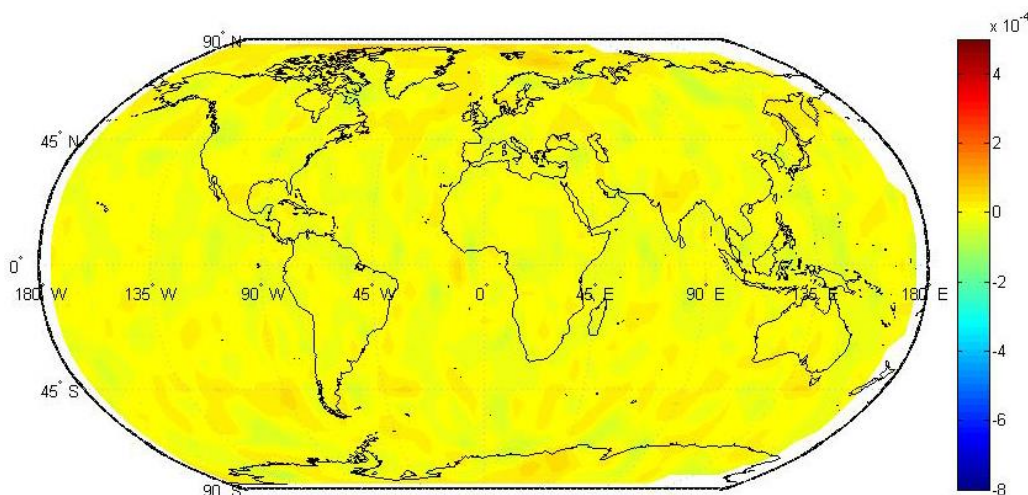
شکل ۸- تعداد ۲۵۹۲ داده نمونه برداری شده بر روی گرید جغرافیایی $5^\circ \times 5^\circ$ با توجه به نرخ ناکوئیسیت (شکل سمت راست) و تعداد ۱۳۲۶ داده نمونه برداری شده بر روی گرید ریوتر بر اساس تئوری CS (شکل سمت چپ) به منظور مدل سازی میدان گرانی زمین

جدول ۳- نتایج آماری محاسبات مربوط به بازسازی میدان گرانی زمین بر اساس تئوری CS با استفاده از الگوریتم SOMP

Parameter	Min	Mean	Max	SD	RMS
Error	-1.1e-4	2.3e-8	1.1e-4	6.3e-6	6.3e-6
Residual	-6.0e-5	-1.8e-6	1.4e-4	1.8e-5	1.7e-5



شکل ۹- پراکندگی مقادیر باقیمانده ها نسبت به عرض جغرافیایی با انتخاب ماتریس طراحی مناسب بر اساس تئوری CS (هر امتداد نشان دهنده یک مدار نمونه برداری است).



شکل ۱۰- پراکندگی یکنواخت مقدار باقیمانده در مدل سازی میدان گرانی بر اساس تئوری CS

۵- نتیجه گیری و پیشنهادات

در مدل سازی میدان گرانی زمین بر اساس تعیین ضرایب هارمونیک های کروی تا درجه و مرتبه مشخص کیفیت و تراکم داده ها از اهمیت بسیاری برخوردار است. معمولاً نمونه برداری های انجام شده با نرخ نایکوئیست مستلزم صرف هزینه زیاد جهت جمع آوری داده ها می باشند. با استفاده از تئوری CS یک سیگنال را می توان با تعداد نمونه برداری کمتر از نرخ نایکوئیست بصورت تُنک بر اساس عناصر غیرصفری که سهم عمده ای در بازیابی سیگنال موردنظر دارند، تقریب زد. در روش های متداول نمونه برداری فشرده فرض بر آن است که مساله خوش وضع بوده و اطلاعات اولیه در مورد سطح تُنکی سیگنال اصلی وجود دارد. بنابراین در یک الگوریتم تکرارشونده سعی می گردد جواب بهینه با مینیم کردن نُرم بردار خطا تعیین شود. ولی در این حالت با یک مساله بدوضع مواجه هستیم و معمولاً سطح تُنکی سیگنال نیز دقیقاً مشخص نیست. در این گونه مسائل مینیم کردن نُرم بردار باقیمانده متناسب با مینیم شدن نُرم بردار خطا و تعیین جواب بهینه نخواهد بود. با استفاده از الگوریتم SOMPA ارائه شده در این مقاله می توان یک سیگنال را بصورت تُنک با تعداد کمتری نمونه برداری با دقت موردنظر بازیابی

نمود. الگوریتم فوق به منظور تقریب تُنک ضرایب هارمونیک های کروی جهت مدل سازی میدان گرانی زمین استفاده شده است. بر این اساس طی یک فرآیند تکرارشونده سطح تُنکی سیگنال با بررسی رفتار نُرم بردار باقیمانده ها و نُرم بردار مجهولات در هر تکرار تعیین می گردد. با مقایسه نتایج بدست آمده با استفاده از الگوریتم فوق با روش های دیگر حل مساله معکوس نظیر روش های OLS، P-Inv و روش پایدارسازی Tikh می توان ادعا نمود که با تعداد نمونه برداری ۵۰ درصد کمتر از نرخ نایکوئیست دقت مدنظر در بازیابی میدان گرانی زمین قابل دستیابی است. همچنین با بررسی توزیع مقادیر بردار باقیمانده ها می توان تراکم و نحوه پراکندگی نقاط نمونه برداری را نیز اصلاح نمود.

سپاسگزاری

ضرایب هارمونیک های کروی میدان گرانی زمین برای انجام محاسبات مربوطه از سایت GFZ آلمان (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>) دریافت شده است. همچنین از مشاوره و راهنمایی های تمام اشخاص بخصوص خانم دکتر دینا نیدل که در تکمیل الگوریتم مدنظر ما را یاری رساندند، تقدیر و تشکر می گردد.

مراجع

- [1] Sneeuw N., (1994). Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. Geophys. J. Int.

- [2] Sneeuw N., (2000). Dynamical satellite geodesy on the torus: Block-diagonality from a semi-analytical approach. In M.G. Sideris, editor, Gravity, Geoid, and Geodynamics, IAG Symp osia. IAG.
- [3] Lustig M., Donoho D. L., Santos J. M. and Pauly J. M., (2008). Compressed sensing MRI, IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, 72.
- [4] Mallat S.G. and Zhang Z., (1993). Matching pursuits with time–frequency dictionaries IEEE Trans. Signal Process. 41 3397–415.
- [5] Donoho D. L and Huo X., (2001). Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. IEEE Trans. Inform. Th., 47:2845-2862.
- [6] Pati Y.C., Rezaiifar R. and Krishnaprasad P.S., (1993). Orthogonal matching pursuit, Recursive function approximation with application to wavelet decomposition, In Proc. 27th Annu. Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, vol. 1, pp. 40-44.
- [7] Tropp J. A., Gilbert A. C., (2007). Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit, IEEE Trans. Info. Theory. To appear.
- [8] Needell D., Vershynin R., (2008). Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. Found. Comput. Math., 9, 317–334.
- [9] Needell D. and Tropp J., (2009). CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 26, no. 3, pp. 301–321.
- [10] Candès E., Romberg J. and Tao T., (2006). Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489-509.
- [11] Donoho D., (2006). Compressed sensing, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306.
- [12] Candès E. J. and Tao T., (2004). Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 12, pp. 5406–5425.
- [13] Candès E. J. Romberg T., and Tao T., (2006). Robust uncertainty principle: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, IEEE Trans. Inform. Theory 52, 489-509..
- [14] Baraniuk R. G., Davenport M., DeVore R., and Wakin M. B., (2007). A simple proof of the restricted isometry principle for random matrices (aka the Johnson-Lindenstrauss lemma meets compressed sensing), Constructive Approximation.
- [15] Tikhonov A. N., (1963). Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, Soviet Math. Dokl., 4, 1035-1038.
- [16] Philips D., (1962). A technique for numerical solution of certain integral equations of the first kind, Journal of the Association for Computing machinery, 9:84-87.
- [17] Hansen P.C., (1992). Analysis of discrete ill-posed problem by means of the L-curve. SIAM review, 34(4): 561-580.
- [18] Hansen P.C., (1987). The truncated SVD as a method for regularization. BIT Computer Science and Numerical Mathematics, 27:534-553.
- [19] Heiskanen WA, Moritz H, (1967). Physical Geodesy. WH Freeman and Co., San Francisco.
- [20] Hadamard J., 1923. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, Haven.
- [21] Moore E. H., (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix. Bulletin of the American Mathematical Society 26 (9): 394–395. doi:10.1090/S0002-9904-1920-03322-7.
- [22] Bjerhammar A., (1951). Application of calculus of matrices to method of least squares; with special references to geodetic calculations, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 49.
- [23] Penrose R., (1955). A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51: 406–413. doi:10.1017/S0305004100030401.
- [24] Reuter R., (1982). Über Inegralformeln der Einheitssphäre und harmonische Splinefunktionen, Veröffentlichungen des Geodatischen Instituts, RWTH Aachen, 33.