

مدلسازی توأم میدان ثقل و توزیع دانسیته جرمی بر روی سطح زمین با استفاده از تلفیق دو نوع مسائل معکوس گراویمتری ژئودزی و ژئوفیزیک: مطالعه موردی منطقه فارس ساحلی

یحیی الله توکلی^{۱*}، عبدالرضا صفری^۲، علیرضا آزموده اردلان^۳، عباس بحرودی^۴

^۱ دانشجوی دکتری ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی -

دانشگاه تهران
ytavakoli@ut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
asafari@ut.ac.ir

^۳ استاد دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
ardalan@ut.ac.ir

^۴ استادیار دانشکده مهندسی معدن - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
bahroudi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت مرداد ۱۳۹۴، تاریخ تصویب تیر ۱۳۹۵)

چکیده

هدف اصلی این تحقیق آن می‌باشد که با تلفیق مسائل معکوس گراویمتری ژئودزی و ژئوفیزیک امکان مدلسازی همزمان "میدان ثقل" و "توزیع دانسیته جرمی" بر روی سطح زمین را فراهم آورد. در فیزیکال ژئودزی هدف از طرح مسئله معکوس گراویمتری، مدلسازی دقیق تابع پتانسیل ثقل و مشتقات آن می‌باشد و در آن طرف در مباحث ژئوفیزیک اکتشافی، عموماً مسئله معکوس گراویمتری با هدف تعیین توزیع دانسیته جرمی زمین طرح می‌گردد؛ در این تحقیق می‌بینیم که از دو منظر ریاضی و فیزیک، وصول به این دو هدف می‌تواند در حل یک مسئله معکوس گراویمتری تلفیقی، خلاصه و محقق گردد. بدین منظور، تئوری، مفاهیم و تشابه این دو نوع مسئله معکوس گراویمتری مورد بررسی قرار گرفته و ارتباط بین پارامترهای مجهول این دو نوع مسئله معکوس گراویمتری مشخص خواهد گردید. سپس روشی برای مدلسازی تابع پتانسیل میدان جاذبه بر روی سطح زمین، بر مبنای توابع پایه شعاعی غیرهارمونیک و پایدارسازی تیخونوف تعمیم یافته پیشنهاد می‌گردد و با استفاده از روش پیشنهادی و تلفیق معادله دیفرانسیلی پواسن و معادله انتگرالی نیوتن امکان استخراج تابع دانسیته از مشاهدات ثقلی زمینی فراهم می‌آید. در انتها نیز در یک مطالعه موردی، روش پیشنهادشده با استفاده از ۶۳۵۰ ایستگاه ثقلی در منطقه فارس ساحلی مورد آزمایش عددی قرار گرفته می‌شود. نتایج عددی حکایت از آن دارد که روش پیشنهادشده امکان مدلسازی توأم میدان جاذبه و توزیع دانسیته جرمی در منطقه مورد مطالعه را به ترتیب با دقت‌های ۰.۵۴ میلی‌گال و ۰.۲۵ گرم بر سانتیمتر مکعب فراهم نموده است.

واژگان کلیدی: ثقل، دانسیته، مدلسازی، گرانی، چگالی، وارونسازی، مسئله معکوس

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

بیش از یک سده است که مشاهده ثقل (گرانی) به عنوان یک مشاهده ارزشمند در کشف و تحلیل ساختمانهای روسطحی و زیرسطحی زمین کاربرد فراوان دارد. همانگونه که از تئوری جاذبه نیوتنی مشخص است، ماهیت فیزیکی جاذبه (گرانش) و ثقل (گرانی) با مفهوم جرم و دانسیته جرمی (چگالی جرمی) ارتباط نظری بسیار نزدیکی دارد به نحوی که در تئوری جاذبه نیوتنی، تنها منبع (source) میدان جاذبه، جرم و چگالی جرمی معرفی می‌گردد. این ارتباط نظری بین دو مفهوم گرانش و جرم، در اوایل قرن بیستم، بسیاری از دانشمندان علوم زمین را بر آن داشت که از مشاهدات جاذبی در کشف پدیده‌های زیرسطحی بهره جویند. به طور دقیق می‌توان گفت که روشهای اکتشافی مدرن ثقلی از دهه سوم قرن بیستم آغاز گردید و تا به امروز به عنوان بخشی از برنامه‌های اکتشافی علی‌الخصوص اکتشاف منابع هیدروکربونی ادامه دارد. اولین اکتشاف ثقلی نفت و گاز در دهه سوم قرن بیستم بر روی گنبد ناش (Nash Dome) در سواحل تگزاس آمریکا با استفاده از مشاهدات تورشن بالانس (Torsion Balance) صورت پذیرفت [۱]. سپس در بین سالهای ۱۹۳۰ الی ۱۹۳۵ روش ثقلی به عنوان روش اصلی اکتشاف نفت تبدیل گردید به نحوی که تعداد گروه‌های ثقل‌سنجی متجاوز از تعداد گروه‌های لرزه‌نگاری می‌بود [۲]. در سال ۱۹۳۹، اجرای یک شبکه پیمایش ثقل در سراسر ایالات متحده آمریکا با بازه‌های ۱۰ مایلی جهت تعیین ساختمانهای زمین‌شناسی در مقیاس منطقه‌ای آغاز گردید و در سال ۱۹۴۰ با گسترش شبکه، لزوم اتصال آن به مشاهدات مبنایی شتاب ثقل مطلق در شهر پوستاند آلمان، احساس گردید [۳]. لذا در سال ۱۹۴۸ برنامه‌ای توسط ارتش ایالات متحده آمریکا جهت آزمایش صحت شبکه ایستگاه‌های درجه اول بین‌المللی آغاز شد و در این بین نیز ایجاد یک شبکه کنترلی درجه ۲ در فرودگاههای کشورهای جهان به اجرا درآمد [۴] که نتیجه آن، شبکه استاندارد شده‌ی جاذبه بین‌المللی (IGSN) می‌باشد که تا اکنون تمامی اندازه‌گیریهای مدرن جهانی بدان اتصال یافته است [۵].

تا به امروز به موازات پیشرفت در تکنیکهای متنوع ثقل‌سنجی و برداشت اطلاعات ثقلی، روشهای متنوعی نیز

جهت تعیین و تحلیل اطلاعات زیرسطحی و رو سطحی زمین از مشاهدات ثقل ارائه گردیده‌اند که در این بین غالباً دو روش عمده جهت استخراج اطلاعات زمین‌شناسی از مشاهدات ثقلی و تحلیل آنها پیشنهاد می‌گردد. اولین روش که به نام مدلسازی مستقیم (Forward modeling) مشهور است بر پایه استفاده مستقیم از انتگرال نیوتن بوده و به کاربر این امکان را می‌دهد که بتواند به صورت شماتیک و با "آزمون و خطا"، مدلسازی توزیع دانسیته جرمی زیر سطح زمین را به نحوی بیابد که با مشاهدات ثقلی زمینی روسطحی همخوانی داشته باشد. از مزایای اصلی روش مستقیم این است که می‌توان از آن عموماً در مناطقی که انتظار می‌رود توزیع دانسیته جرمی دارای پیچیدگی بسیار باشد، جهت تفسیر داده‌های ثقلی استفاده نمود؛ همچنین این روش دارای معایب خاصی نیز است که می‌توان به مواردی همچون: عدم کنترل ریاضی بر یکتایی مسئله، ماهیت آزمون و خطا داشتن، خسته‌کننده و وقت‌گیر بودن روش برای مفسر داده‌ها، اشاره نمود [۱۰]. در این زمینه فعالیتهای بسیاری تاکنون انجام پذیرفته که به مواردی همچون: (ژدانوف، ۲۰۰۲)، (اوزسن، ۲۰۰۴)، (کاراتوری-توننتینی و همکاران، ۲۰۰۹) و (گوردون و همکاران، ۲۰۱۳) می‌توان اشاره داشت [۶-۱۰].

روش دوم جهت استخراج دانسیته جرمی از مشاهدات ثقلی، روشی موسوم به مدلسازی معکوس (inverse modeling) است. روشهای مدلسازی معکوس بر پایه‌ی حل دسته‌ای از مسائل ریاضی موسوم به مسائل معکوس (inverse problems) می‌باشد که در یک طرف مسئله مشاهدات ثقلی حضور دارد و در طرف دیگر در زیر عمگرهای ریاضی، خواه خطی و یا غیرخطی، تابع توزیع دانسیته زمین به عنوان مجهول قرار می‌گیرد. اینگونه مسائل معکوس که در آنها مشاهدات مسئله، مشاهدات ثقلی می‌باشند، مسائل معکوس گراویمتری یا مسائل معکوس ثقلی (گرانی) نامیده می‌شوند و به مراحل حل اینگونه مسائل نیز اصطلاحاً "وارون‌سازی داده‌های گرانی" (gravity inversion or gravimetry inversion) اطلاق می‌گردد. اینگونه مسائل می‌تواند مستقیماً جهت تعیین توزیع دانسیته جرمی زمین و یا شکل توده‌های جرمی استفاده گردد. در این زمینه نیز، تحقیقات بسیاری صورت پذیرفته که به عنوان نمونه می‌توان به کارهای انجام پذیرفته ذیل نیز اشاره نمود: (لست و کوبیک، ۱۹۸۳)،

(گولین و منی‌چتی، ۱۹۸۴)، (باربوسا و سیلوا، ۱۹۹۴)، (لی و اولنبرگ، ۱۹۹۸)، (پورتیگاین و ژدانوف، ۱۹۹۹)، (برت و همکاران، ۲۰۰۲)، (سیلوا و باربوسا، ۲۰۰۶)، (فارکوهارسن، ۲۰۰۸)، (سیلوادیاس و همکاران، ۲۰۰۹)، (فرگوسو و گالاردو، ۲۰۰۹) و (سیلوادیاس و همکاران، ۲۰۱۱) [۱۱-۲۲].

غالباً در روشهای معکوس گراویمتری، فضای سه‌بعدی توپوگرافی منطقه مورد مطالعه به المانهای حجمی (منشورهایی) تقسیم شده و سپس با حل معادلات نیوتنی حاکم بر آنها و در نظر گرفتن سایر اطلاعات موجود، توزیع دانسیته جرمی در تمامی این المانها مستقیماً تعیین می‌گردد [۱۰]. به عنوان مثال در سیستم مختصات دکارتی، این المانهای حجمی غالباً به شکل مکعب‌مستطیل‌هایی با ابعاد مشخص انتخاب می‌گردند؛ به نحوی که این منشورها تمامی فضای سه‌بعدی منطقه را پوشش داده و فرض بر این باشد که دانسیته جرمی درون هر مکعب‌مستطیل ثابت می‌باشد. در این حالت، امکان گسسته‌سازی معادله انتگرالی نیوتن برای منطقه مورد مطالعه، با استفاده از منشورها یا به عبارتی مکعب‌مستطیل‌های حاصله فراهم آمده [۴۷] و با حل معادلات گسسته‌شده امکان تعیین دانسیته جرمی در تمامی منشورها نیز فراهم می‌آید.

همچنین در برخی دیگر از روشهای معکوس گراویمتری، به جای تعیین مستقیم توزیع دانسیته، با فرض دانستن اختلاف دانسیته بین سازندهای زمینی، شکل هندسی ساختارهای زیرسطحی زمین، مجهول در نظر گرفته شده و با حل مسئله معکوس مربوطه تعیین می‌گردد. در این روشها نیز عموماً عمق و یا مختصات شکل هندسی دربرگیرنده‌ی ساختمانهای زیرسطحی، هدف مسئله معکوس می‌باشد که در این زمینه نیز می‌توان به کارهای انجام پذیرفته توسط (سیلوا و همکاران، ۲۰۰۰)، (مورائس و هانسن، ۲۰۰۱)، (سیلوا و باربوسا، ۲۰۰۴)، (وایلدمن و گزناس، ۲۰۰۹)، (لوو، ۲۰۱۰) و (اولیوریا و همکاران، ۲۰۱۱) اشاره نمود [۲۳-۲۸].

در مباحث علوم زمین، داده‌های ثقل زمینی کاربردهای فراوان دیگری نیز دارد که یکی مهمترین این کاربردها استفاده از آنها در مباحث فیزیکال ژئودزی است، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۲۹]. مهمترین مورد استفاده از مشاهدات ثقلی در مبحث فیزیکال ژئودزی، استفاده از آنها

در امر مدلسازی میدان ثقل برای اهدافی مانند تعیین سطوح مبنای ارتفاعی (همچون: ژئوئید و شبه-ژئوئید) می‌باشد. در مباحث مدلسازی دقیق میدان ثقل نیز، جهت تعیین مجهولات با یک سری مسائل معکوس درگیر می‌باشیم، به عنوان نمونه رجوع شود به [۳۰، ۳۱]. از نقطه نظر ریاضی، مسائل معکوس گراویمتری به وجود آمده در فرآیند مدلسازی میدان ثقل، تشابه بسیار زیادی با مسائل معکوس گراویمتری اکتشافی داشته و تفاوتی در روشهای حل آنها وجود نخواهد داشت. حتی در این مقاله هیچ تفاوتی بین اهداف این دو نوع مسائل معکوس در نظر گرفته نشده و تنها تفاوت در نوع نگاه در این مسائل دانسته می‌شود. در این تحقیق اعتقاد بر این است که هر یک از این دو نوع مسائل معکوس، می‌تواند اهداف نوع دیگر را نیز به نحوی تامین نماید. آنچه که در این مقاله خواهیم دید تلفیقی از دو نوع نگاه، به ظاهر متفاوت و در واقع بسیار مشابه، برای تحلیل مسائل معکوس گراویمتری مربوطه می‌باشد؛ یک نگاه، "نگاه ژئوفیزیکی" به مسائل معکوس گراویمتری بوده و هدف آن کشف آنومالی‌های دانسیته (بی‌هنجاری چگالی جرمی) روسطحی و زیرسطحی زمین است و دیگر نگاه نیز "نگاه ژئودتیکی" (نگاه ژئودزی) به مسائل معکوس گراویمتری بوده که هدف آن نیز تعیین پارامترهای مجهول ریاضی در مراحل مدلسازی میدان ثقل برای اهداف فیزیکال ژئودزی است.

در این مقاله در ابتدا، بخش ۲ به معرفی مسائل معکوس گراویمتری پرداخته و سپس در بخش ۳، تئوری جهت تلفیق مسائل معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی و ژئودتیکی ارائه می‌شود. همچنین، در بخش ۴ موضوع با یک "مطالعه موردی" در منطقه فارس ساحلی ادامه پیدا می‌کند و نهایتاً در بخش آخر با "بحث و نتیجه" پایان می‌یابد.

۲- مسائل معکوس گراویمتری

یک مسئله معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی، از منظر ریاضی، عموماً به شکل معادله‌ی زیر دیده می‌شود [۷]:

$$\delta g = A(\delta \rho) \quad (1)$$

که در رابطه فوق تابع $\delta \rho$ به عنوان مجهول مسئله موسوم به آنومالی دانسیته جرمی (بی‌هنجاری چگالی

جرمی) است و برابر با اختلاف بین دانسیته جرمی مجهول ρ و مقدار اولیه معلوم از آن ρ_0 می‌باشد، A نیز یک عملگر (operator) ریاضی حاصل از قانون جاذبه نیوتن بوده و δg نیز مشاهده ثقلی می‌باشد که به آن تصحیحات لازم اعمال گردیده است [۷]. در رابطه فوق عملگر ریاضی A می‌تواند با توجه به شرایط مسئله، به شکلهای خطی یا غیرخطی و گسسته و یا پیوسته مطرح گردد.

این تعریف تشابه بسیاری با تعاریف مسائل معکوس در مبحث مدلسازی میدان ثقل در فیزیکال ژئودزی دارد. در مبحث مدلسازی میدان ثقل در فیزیکال ژئودزی نیز با مسائل معکوسی متنوعی همچون: مسئله انتقال به سمت پائین (downward continuation) درگیر می‌باشیم که در آنها نیز مشاهدات ثقلی در طرف چپ مسئله معکوس قرار گرفته و هدف استخراج پارامترهای مجهول مربوطه از آنها می‌باشد. در امر مدلسازی میدان ثقل عموماً از مشاهداتی مانند: انواع مشاهدات ثقلی (زمینی، هوایی و ماهواره‌ای)، مشاهدات ترازبایی، مشاهدات نجومی (مولفه‌های انحراف قائم)، مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای و مشاهدات جزرمددی استفاده می‌گردد. مجهولات مسئله نیز عموماً شامل ضرایب یک بسط جبری ریاضی است که با استفاده از آنها امکان مدلسازی تابع پتانسیل میدان ثقل و مشتقات بالای آن (مانند: بردار جاذبه و تانسور گرادیان جاذبه) فراهم می‌آید. این بسط ریاضی که غالباً خطی است، می‌تواند از گسسته‌سازی معادلات انتگرالی حاصل از مسائل مقدارمرزی ژئودتیکی (GBVP) و یا سری‌های ریاضی حاصل از انواع توابع پایه (همچون: توابع پایه هارمونیک کروی، توابع پایه شعاعی، توابع اسلپین، توابع پایه ویولیت) حاصل گردیده باشد، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۳۰-۳۱]. در این مقاله فرض گردیده است که مشاهدات در امر مدلسازی میدان ثقل، از نوع مشاهدات ثقلی زمینی بوده و مسئله معکوس مربوطه نیز به صورت یک مدل ریاضی خطی به شکل ذیل قابل تعریف است:

$$\delta g = B(\alpha) \quad (2)$$

که در رابطه فوق B نیز یک عملگر ریاضی است و بردار α شامل ضرایب مجهول مسئله معکوس مربوطه در امر مدلسازی میدان ثقل بوده که با تعیین آنها، امکان مدلسازی تابع پتانسیل ثقل و مشتقات آن و متعاقباً

ارتفاع ژئوئید و مولفه‌های ارتفاع قائم نیز فراهم می‌گردد، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۳۰-۳۱].

حال پرسشی که ممکن است در ذهن خطور کند این است که "آیا بین پارامترهای مجهول در مدلسازی میدان ثقل در مبحث فیزیکال ژئودزی (مانند ضرایب مدلسازی α) و پارامترهای مجهول در مسئله معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی (مانند آنومالی دانسیته جرمی $\delta\rho$) ارتباط ریاضی و فیزیکی وجود خواهد داشت و یا خیر؟" اجازه دهید این پرسش که هدف اصلی این تحقیق می‌باشد را در در ابتدای این بحث تنها با یک کلمه‌ی "بلی" پاسخ داده و جواب کامل آنرا در ادامه بحث‌های این تحقیق بیابیم.

عموماً مسائل معکوس به دو دسته مسائل خوش‌وضع (Well-Posed) و بدوضع (Ill-Posed) تقسیم می‌گردند [۳۲]. مسئله‌ای که در آن اطمینان از سه مورد ذیل:

۱. وجود جواب (Existence)

۲. یکتایی جواب (Uniqueness)

۳. پایداری جواب (Stability)

حاصل آید، خوش‌وضع و در غیر این صورت بدوضع خوانده می‌شود؛ اما آنچه غالباً از مسائل بدوضع در علوم کاربردی و مهندسی شناخته شده است مسائل بدوضع‌ای است که دچار ناپایداری (instability) گردیده و حل آنها نیز نیازمند روشهای پایدارسازی (regularization methods) می‌باشد. اگرچه اکثر مسائل معکوس مشروحه در علوم کاربردی از نوع مسائل بدوضع ناپایدار است و شناخته‌شده‌ترین روشها جهت حل آنها روشهای پایدارسازی می‌باشد، اما لازم است که بدانیم هیچ مسئله معکوسی بدون بررسی دو شرط اول هادامارد یعنی بدون بررسی (۱) "شرط وجود جواب" و (۲) "شرط یکتایی آن" قابل حل نخواهد بود.

در خصوص یکتایی مسائل معکوس گراویمتری مطالعات بسیاری صورت پذیرفته است که اولین آنها متعلق به "سر جرج گابریل استوکس" ریاضیدان و فیزیکدان مشهور ایرلندی-بریتانیایی در سال ۱۸۶۶ میلادی می‌باشد [۳۳]؛ پس از استوکس مطالعات بسیاری در این خصوص انجام پذیرفت که می‌توان به مواردی در سالهای اخیر همچون: (زیداروف، ۱۹۸۰)، (استرومیر و بالنی، ۱۹۸۴) و (میشل و فوکاس، ۲۰۰۸) اشاره نمود [۳۴-۳۶]. با توجه به این مطالعات در حالت کلی می‌توان گفت که مسائل معکوس گراویمتری از مشکل عدم یکتایی جواب رنج برده و معمولاً

جهت اطمینان از یکتایی جواب در اینگونه مسائل، لازم است شرایط و یا فرضیاتی اضافی به مسئله القاء گردد [۳۶]. در خصوص شرط اول هادامارد یعنی "شرط وجود جواب" نیز لازم است که اطمینان از صحت معادلات مسئله معکوس حاصل آید، زیرا که بایست این اطمینان بدست آید که مشاهدات (بدون در نظر گرفتن خطاهای آنها) در معادلات مسئله معکوس صدق نموده و دستگاه معادلات مربوطه دارای جواب است.

پس جهت بررسی صحت معادلات معکوس گراویمتری لازم است که بررسی نماییم که در فرآیند حصول آنها چه فرضیاتی در نظر گرفته شده است. در بدست آوردن یک مسئله معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی که معادلات آن بر پایه معادله انتگرالی نیوتن می باشد فرض اصلی بر این است که

- پس از اعمال تمامی تصحیحات جاذبی (gravity reduction) به مشاهدات ثقلی، این مشاهدات از اثرات جاذبی ناخواسته (همچون: اثر عرض جغرافیایی، اثر صفحه بوگه، اثر توپوگرافی باقی مانده) ایزوله شده و مقادیر آنها، تنها متأثر از اثرات جاذبه‌ی آنامولی دانسیته باقی مانده در فضای توپوگرافی منطقه‌ی مورد مطالعه می باشد، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۴۳].
- در این صورت معادله انتگرالی نیوتن بین "مشاهدات ثقلی تصحیح شده" و "آنومالی‌های دانسیته در منطقه مورد مطالعه" برقرار خواهد بود. همانطور که می دانیم پس از اعمال تصحیحات جاذبی به مشاهدات هنوز این امکان وجود خواهد داشت که اثر جاذبه اجرام خارج از منطقه مورد مطالعه در مشاهدات حضور داشته و این موضوع مطمئناً صحت مدل ریاضی در مسئله معکوس گراویمتری از این دست را کاهش خواهد داد.

از طرف دیگر در مسائل معکوس مربوط به مدلسازی میدان ثقل در فیزیکال ژئودزی نیز فرضی عکس فرض فوق جهت حصول معادلات مورد نیاز در نظر گرفته می شود. در مبحث مدلسازی میدان ثقل نیز عموماً فرض می گردد که

- پس از اعمال تمامی تصحیحات (از جمله تصحیحات توپوگرافی) به مشاهدات ثقلی، کاملاً اثرات جاذبه توده‌های جرمی درون توپوگرافی حذف و آنها به کمیت‌های هارمونیک (Harmonic) تبدیل می گردند (فرض هارمونیک سازی). پس مقادیر آنها تنها متأثر از طول موجهای کوتاه (فرکانسهای بالای) هارمونیک میدان ثقل می باشد.

در مبحث مدلسازی میدان ثقل در فیزیکال ژئودزی، از فرض فوق جهت پیاده سازی مدل‌های ریاضی مورد نیاز استفاده می گردد. به عنوان مثال: هارمونیک سازی مشاهدات ثقل، می تواند امکان پیاده سازی آنها در "مسائل مقدار مرزی" در مبحث فیزیکال ژئودزی و امکان استفاده از انواع توابع پایه هارمونیک در امر مدلسازی آنها را فراهم آورد، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۲۹، ۳۷].

با مقایسه دو فرض فوق در می یابیم که این دو فرض به نوبه‌ای در تعارض و تضاد با یکدیگر قرار دارند. زیرا که در اولین فرض یعنی در روند انجام تصحیحات جاذبی برای اهداف اکتشافی فرض بر حفظ اثر جاذبه آنومالی‌های جرمی درون توپوگرافی است و از آن سو در روند انجام تصحیحات جاذبی برای اهداف فیزیکال ژئودزی همچون: مدلسازی میدان ثقل، فرض بر حذف کامل اثرات جاذبه اجرام درون توپوگرافی برای هارمونیک سازی مشاهدات است.

در واقع آنچه که در بخش بعد به عنوان تلفیق دو مسئله معکوس مطرح می گردد، ایده‌ای است برای حصول به دو هدف اصلی: (۱) اجتناب از قطعی در نظر گرفتن هر یک فرضیات فوق در هر یک از دو مبحث و یافتن یک حالت مشترک جهت افزایش صحت مسئله، و (۲) ارتباط دادن مفاهیم این دو نوع مسئله معکوس با هم و از نقطه نظر فیزیکی معنا دادن به پارامترهای مجهول ریاضی در مبحث مدلسازی میدان ثقل. بدین منظور در ابتدا معادلات دو مسئله معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی و ژئودزی به صورت جداگانه تشکیل داده شده و سپس با ارتباط دادن مجهولات آنها به یکدیگر معادلات آنها تلفیق داده می شود.

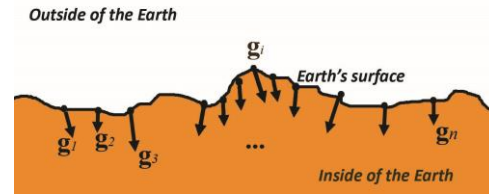
۳- تلفیق تئوری دو مسئله معکوس

مشاهدات ثقلی زمینی $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ را در نظر بگیرید (شکل ۱). در فنون موجود ثقل سنجی زمینی (land-based gravimetry)، مشاهدات ثقلی غالباً اندازه (norm) بردار شتاب ثقل زمین می باشد؛ در این تحقیق نیز فرض گردیده که مشاهدات ثقلی مفروض، اندازه شتاب ثقل زمین در n ایستگاه ثقل سنجی باشد. لذا هدف آن است که بر مبنای این مشاهدات ثقلی زمینی، به طور همزمان مدلسازی محلی داده‌های ثقلی و مدلسازی محلی توزیع دانسیته جرمی لایه‌های زمین شناسی سطح الارضی انجام پذیرد.

حال یک میدان پتانسیل ثقلی مرجع (یا میدان پتانسیل ثقل رفرنس) (Reference gravity field) مانند $W_{\text{Ref}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ را برای میدان ثقل زمین در نظر بگیرید که تا حد امکان تمامی مشخصه‌های میدان ثقل را در بر داشته باشد. از نقطه نظر ریاضی، میدانهای ثقل مرجع، یک مقدار اولیه و یک تقریب مناسب برای میدان ثقل واقعی زمین محسوب می‌گردند، از این رو است که این میدانهای پتانسیلی غالباً در امر مدلسازی میدان ثقل واقعی کاربرد فراوان دارند. به عنوان نمونه می‌توان به کاربرد فراوان میدان پتانسیل مرجع در تکنیکهای حذف-محاسبه-بازگشت (Remove-Compute-Restore) در بحث تعیین ژئوئید اشاره نمود؛ به عنوان نمونه مراجعه شود به [۴۰-۴۲].

در نظر داشته باشیم که یک میدان ثقل مرجع می‌تواند از یک میدان ثقل نرمال یا میدان پتانسیل ثقل جهانی مانند EGM2008 به علاوه‌ی اثرات جاذبی توپوگرافی حاصل آید [۴۳] که غالباً با توجه به مجهول بودن توزیع دانسیته در درون توده‌های جرمی توپوگرافی، اثرات جاذبه‌ی آنومالی دانسیته محلی در آنها لحاظ نمی‌گردد [۴۴]. از این رو، با فرضیاتی می‌توان آنها را از دیدگاهی دیگر در برگیرنده‌ی همه‌ی تصحیحات جاذبه مورد نیاز دانست، به نحوی که با کسر میدان مرجع از مشاهدات واقعی ثقلی، تمامی تصحیحات جهانی و محلی (همچون: تصحیح عرض جغرافیایی (Latitude correction)، تصحیح هوای آزاد (Free-Air correction)، تصحیحات توپوگرافی (Topographic corrections)) به مشاهدات اعمال گردیده و مشاهدات به کمیت‌های تفاضلی تبدیل می‌گردند که تنها به اثرات آنومالی‌های دانسیته محلی وابسته می‌باشند [۴۳].

پس، حال یک میدان ثقل مرجع حاصل از تابع پتانسیلی $W_{\text{Ref}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید به نحوی که تمامی مشخصه‌های میدان ثقل واقعی به استثنای اثرات جاذبی آنومالی‌های دانسیته درون توپوگرافی را شامل شده باشد. در تولید این میدان مرجع تمامی اثرات جاذبی اجرام زمین و شکل هندسی زمین و سرعت دورانی زمین در نظر گرفته شده و تنها دانسیته جرمی پوسته زمین در آن مقدار ثابت ρ_0 لحاظ گردیده باشد. از دیدگاهی دیگر فرض نمایید که میدان ثقل مرجع در بر گیرنده تمامی تصحیحات جاذبی مورد نیاز مشاهدات زمینی باشد. با این فرضیات، در نزدیکی سطح زمین برای میدان ثقل مرجع خواهیم داشت:



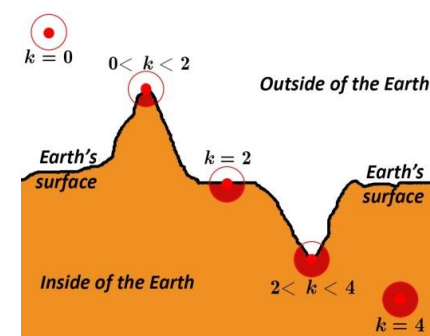
شکل ۱- n مشاهده ثقلی زمینی فرض شده در مسئله

بدین منظور، معادلات ذیل را برای میدان ثقل زمین در نظر بگیرید [۲۹، ۳۸، ۳۹].

$$\begin{cases} W = W(\mathbf{r}) \\ \mathbf{g} = \nabla W \\ \Delta^2 W = -k\pi G \rho + 2\omega^2 \end{cases} \quad (3)$$

که در معادلات فوق $W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پتانسیل ثقل (یا پتانسیل گرانی)، $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ بردار مکان، $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z}]^T$ عملگر، $\mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ بردار شتاب ثقل (یا بردار شتاب گرانی)، $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ عملگر لاپلاسین (Laplacian operator)، $k = k(\mathbf{r}) \in [0, 4]$ ضریب توپوگرافی، G ثابت جهانی جاذبه‌ی نیوتن (یا ثابت جهانی گرانش)، $\rho = \rho(\mathbf{r})$ تابع توزیع دانسیته جرمی (یا چگالی جرمی) و ω اندازه سرعت دورانی زمین می‌باشد.

معادله دیفراسیلی $\Delta^2 W = k\pi G \rho + 2\omega^2$ در رابطه (۳)، یک معادله دیفرانسیلی پواسن برای تابع پتانسیل ثقل محسوب می‌گردد که در این معادله، ضریب توپوگرافی k با توجه به شرایط توپوگرافی اطراف نقطه، عددی بین ۰ تا ۴ بوده و در درون زمین $k = 4$ و در خارج زمین $k = 0$ می‌باشد. در شکل ۲ شمایی از وضعیت ضریب توپوگرافی در درون، بر روی سطح و در خارج زمین نشان داده شده است (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۲، ص ۵۱۲ و ۴۶۲) [۳۸].



شکل ۲- شمایی از وضعیت ضریب توپوگرافی بر روی سطح و در درون و خارج زمین (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۲، ص ۵۱۲ و ۴۶۲)

پتانسیل تفاضلی به جای برقراری در معادله دیفرانسیلی پواسن (رابطه (۶))، در معادله دیفرانسیلی لاپلاس یعنی $\Delta^2 \delta W = 0$ صدق می‌نماید.

برقراری مشاهدات تفاضلی در معادله دیفرانسیلی لاپلاس مزایا و معایب خاص خود را دارد. از دیدگاه فیزیکی ژئودزی برقراری کمیت‌های تفاضلی جاذبی در معادله لاپلاس، برقراری آنها در معادلات مقدار مرزی ژئودتیکی (Geodetic Boundary Value Problems (GBVP)) را به دنبال دارد که این موضوع امکان مدلسازی مجهولات مسئله بر حسب تابع‌های هارمونیک به عنوان تابع‌های پایه (Basis functionals) را فراهم می‌آورد؛ به عنوان نمونه مراجعه شود به [۲۹ و ۳۷]. همچنین با توجه به اینکه امروزه استفاده از توابع پایه شعاعی (Radial Basis Function (RBF)) علی‌الخصوص توابع پایه شعاعی کروی (Spherical RBF) حاصل از کرنل‌های بازآفرین هارمونیک (Harmonic Reproducing Kernels) در بحث مدلسازی میدان ثقل، به طور وسیع عمومیت یافته است، می‌توان از این توابع پایه نیز جهت مدلسازی مشاهدات تفاضلی هارمونیک‌شده بهره جست؛ به عنوان نمونه مراجعه شود به [۳۰، ۴۵، ۴۶].

از آن رو که در این تحقیق فرض می‌گردد مشاهدات تفاضلی کماکان در معادله دیفرانسیلی پواسن یعنی رابطه (۶) صدق می‌نماید، امکان فرض هارمونیک بودن مشاهدات تفاضلی و استفاده از توابع پایه هارمونیک در امر مدلسازی‌های این تحقیق، منتفی خواهد بود. از این رو در اینجا جهت مدلسازی میدان ثقل از تابع‌های پایه غیرهارمونیک (anharmonic) که از کرنل‌های بازآفرین غیرهارمونیک تولید گردیده‌اند، استفاده می‌گردد. همانگونه که در ادامه خواهیم دید در این تحقیق بر خلاف مطالعات پیشین انجام پذیرفته در امر مدلسازی میدان ثقل، فرض غیرهارمونیک بودن مشاهدات تفاضلی (anharmonicity) یک مزیت برای روش مدلسازی همزمان آنومالی دانسیته و میدان ثقل، محسوب می‌گردد؛ زیرا که این فرض، امکان استفاده مستقیم از معادله پواسن در رابطه (۶) را جهت تعیین توزیع آنومالی دانسیته در حین مدلسازی میدان ثقل فراهم می‌آورد. پس، حال فرض نمایید که از نقطه نظر ریاضی، امکان بسط تابع پتانسیل تفاضلی غیرهارمونیک δW بر حسب m تابع پایه $\{\phi_j(\mathbf{r})\}_{j=1,2,\dots,m}$ به صورت ذیل وجود داشته باشد:

$$\begin{cases} W_{\text{Ref}} = W_{\text{Ref}}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{g}_{\text{Ref}} = \nabla W_{\text{Ref}} \\ \Delta^2 W_{\text{Ref}} = -k\pi G \rho_0 + 2\omega^2 \end{cases} \quad (۴)$$

که در رابطه فوق $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{g}_{\text{Ref}} = \nabla W_{\text{Ref}}$ بردار شتاب ثقل مرجع می‌باشد.

با کسر میدان ثقل مرجع از میدان ثقل واقعی، کمیت‌های تفاضلی δW و $\delta \mathbf{g}$ ، به ترتیب موسوم به پتانسیل تفاضلی و بردار شتاب جاذبه تفاضلی به صورت ذیل حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} \delta W = W - W_{\text{Ref}} \\ \delta \mathbf{g} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_{\text{Ref}} \\ \delta \mathbf{g} = \nabla \delta W \end{cases} \quad (۵)$$

که با توجه به روابط (۳) و (۴)، معادله دیفرانسیلی پواسن ذیل برای تابع پتانسیل تفاضلی δW بر قرار خواهد بود:

$$\Delta^2 \delta W = -k\pi G \delta \rho \quad (۶)$$

که در رابطه فوق نیز $\delta \rho = \rho - \rho_0$ موسوم به "آنومالی دانسیته" یا "بی‌هنجاری چگالی جرمی" (Mass-density anomaly) می‌باشد که همانگونه در بخش‌های قبل ذکر گردید مهمترین هدف مبحث ثقل‌سنجی اکتشافی و مسئله معکوس گراویمتری در ژئوفیزیک، تعیین این تابع در فضای توپوگرافی زمین می‌باشد. بار دیگر یادآور می‌شویم که در این تحقیق هدف آن است که در میان مراحل مدلسازی میدان ثقل زمین (به عبارتی مدلسازی تابع‌های پتانسیل ثقل و شتاب جاذبه و مشتقات آن) نگاهی نیز به مدلسازی آنومالی دانسیته $\delta \rho$ در نزدیکی سطح زمین نیز داشته باشیم. این موضوع غالباً در مبحث فیزیکی ژئودزی و مدلسازی‌های محلی میدان ثقل، به دلیل فقدان اطلاعات، نادیده گرفته می‌شود، به نحوی که پس از حذف میدان مرجع که شامل اثرات توپوگرافی نیز می‌باشد، فرض می‌گردد که مشاهدات حاصل از تفاضل دو میدان واقعی و مرجع، "هارمونیک" یا "هماهنگ" (Harmonic) گردیده‌اند. به عبارتی دیگر، عموماً در بحث مدلسازی محلی میدان ثقل، به دلیل مجهول بودن توزیع دانسیته در فضای توپوگرافی و نبود اطلاعات کافی و مناسب از آن، آنومالی دانسیته نادیده گرفته شده و فرض می‌گردد که تابع

روابط فوق نشان می‌دهد که با معلوم بودن ضرایب بسط $\{\alpha_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ مدلسازی تابعک پتانسیل تفاضلی و مشتقات آن امکان پذیر است. در نظر داشته باشیم که جهت تعیین ضرایب بسط فوق، مشاهدات ثقلی زمینی غالباً از نوع اندازه بردار شتاب ثقل (یعنی $g = \|\mathbf{g}\|$) می‌باشد. لذا لازم است که رابطه برداری شتاب تفاضلی در رابطه (۹) به شکل عددی (اسکالر) ذیل تبدیل گردد:

$$\delta g(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle \mathbf{e}_{\mathbf{g}_{\text{Ref}}}, \nabla \phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle \quad (10)$$

که در معادله‌ی مشاهده فوق، $\langle \cdot, \cdot \rangle$ عملگر ضرب داخلی بوده و به ازای هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ داریم: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$. همچنین $\mathbf{e}_{\mathbf{g}_{\text{Ref}}} = \mathbf{g}_{\text{Ref}} / g_{\text{Ref}}$ بردار یکه در جهت بردار شتاب ثقل مرجع می‌باشد و شتاب جاذبه تفاضلی δg نیز از تفاضل اندازه شتاب ثقل واقعی $g = \|\mathbf{g}\|$ و اندازه شتاب ثقل مرجع $g_{\text{Ref}} = \|\mathbf{g}_{\text{Ref}}\|$ حاصل می‌شود. برای بدست آوردن رابطه فوق، به تقریب فرض گردیده است که "بردار یکه در جهت بردار شتاب ثقل واقعی ($\mathbf{e}_{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/g$)" با "بردار یکه در جهت بردار شتاب ثقل مرجع ($\mathbf{e}_{\mathbf{g}_{\text{Ref}}} = \mathbf{g}_{\text{Ref}}/g_{\text{Ref}}$)" هم‌جهت می‌باشند. به طور خلاصه می‌توان گفت که در رابطه فوق تقریب $\delta g = g - g_{\text{Ref}} \doteq \langle \mathbf{e}_{\mathbf{g}_{\text{Ref}}}, \delta \mathbf{g} \rangle$ لحاظ گردیده است.

همچنین با توجه به رابطه (۹) و معادله دیفرانسیلی پواسن در رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta^2 \delta W(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \Delta^2 \phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = -k(\mathbf{r}) \pi G \delta \rho(\mathbf{r}) \\ \delta \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{-k(\mathbf{r}) \pi G} \sum_{j=1}^m \alpha_j \Delta^2 \phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \end{cases} \quad (11)$$

از طرفی دیگر، دوباره این فرض را به یاد آوریم که با کسر میدان ثقل مرجع (در بر گیرنده‌ی تمامی تصحیحات جاذبه مورد نیاز) از مشاهدات واقعی، اثرات جاذبی تمامی اجرام زمین، به استثنای اثرات جاذبی آنومالی‌های دانسیته در محل، از مشاهدات کاملاً حذف گردیده‌اند. در این صورت، معادله انتگرالی نیوتن نیز در فضای توپوگرافی محل مورد مطالعه، بین تابعک آنومالی دانسیته $\delta \rho$ و کمیت‌های تفاضلی δW و $\delta \mathbf{g}$ به صورت ذیل حاکم خواهد بود:

$$\delta W(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j(\mathbf{r}) \quad (7)$$

که در بسط فوق ضرایب $\{\alpha_j \in \mathbb{R}\}_{j=1,2,\dots,m}$ مجهولات مسئله می‌باشند. در این حالت اگر توابع پایه از نوع توابع پایه شعاعی بوده و با استفاده از کرنل ϕ_ε تولید گردیده باشند، خواهیم داشت:

$$\phi_j(\mathbf{r}) = \phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad j=1,2,\dots,m \quad (8)$$

که در رابطه فوق هر یک از نقاط معلوم $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ اصطلاحاً "مرکز یا قطب یا نقطه نودال تابع پایه شعاعی" و پارامتر $\varepsilon \geq 0$ اصطلاحاً "پهنای باند کرنل" خوانده می‌شود. با توجه به آنچه که در فوق ذکر گردید، در رابطه (۸)، کرنل ϕ_ε بایست به نحوی اختیار گردد که امکان مدلسازی یک تابعک غیرهارمونیک فراهم گردد. از این رو است که در این مقاله جهت مدلسازی میدان ثقل، کرنل‌های کلاسیک غیرهارمونیک همچون: "گاوسی"، "مالتی-کوادراتیک" و "مالتی-کوادراتیک معکوس" به کرنل‌های هارمونیک مرسوم در امر مدلسازی میدان ثقل ترجیح داده شده‌اند. در جدول ۱ روابط ریاضی کرنل‌های کلاسیک غیر هارمونیک به کاربرده شده در این تحقیق گنجانده شده‌اند.

جدول ۱- کرنل‌های کلاسیک غیرهارمونیک به کاررفته در این تحقیق

رابطه‌ی ریاضی	کرنل
$\phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = e^{-\frac{\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_j\ ^2}{2\varepsilon^2}}$	گاوسی (Gaussian)
$\phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \sqrt{\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_j\ ^2 + \varepsilon^2}$	مالتی-کوادراتیک (Multiquadratic)
$\phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \left(\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_j\ ^2 + \varepsilon^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$	مالتی-کوادراتیک معکوس (Inverse Multiquadratic)

پس با توجه به روابط (۷) و (۸)، رابطه (۵) به صورت ذیل تبدیل می‌گردد:

$$\begin{cases} \delta W(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \\ \delta \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla \delta W(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \nabla \phi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \end{cases} \quad (9)$$

$$\delta g = A_{\nabla\phi}(\alpha) \quad (16)$$

در معادله خطی فوق، عملگر $A_{\nabla\phi}$ نیز با توجه به رابطه (۱۰) به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$A_{\nabla\phi}(\alpha) = \mathbf{e}_{\text{gRef}}^T [\nabla\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \quad \nabla\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \quad \dots \quad \nabla\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)]\alpha \quad (17)$$

به همین نحو برای تابع توزیع دانسیته $\delta\rho$ در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\delta\rho = \frac{1}{-k\pi G} A_{\Delta^2\phi}(\alpha) \quad (18)$$

که در رابطه فوق نیز، عملگر $A_{\Delta^2\phi}$ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$A_{\Delta^2\phi}(\alpha) = [\Delta^2\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \quad \Delta^2\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \quad \dots \quad \Delta^2\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)]\alpha \quad (19)$$

همانگونه که در فوق می‌بینیم، رابطه (۱۸) همان معادله‌ای است که مجهولات در مدلسازی میدان ثقل (یعنی α) را به مجهولات اصلی در مسئله معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی (یعنی آنامولی دانسیته $\delta\rho$) ارتباط می‌دهد. از طرف دیگر، به همین نحو برای معادله انتگرالی نیوتن در رابطه (۱۳) نیز خواهیم داشت:

$$\delta g = A_{\text{Newton}}(\delta\rho) \quad (20)$$

در معادله خطی فوق، عملگر انتگرالی خطی A_{Newton} تعریف شده در سمت راست معادله انتگرالی (۱۳) می‌باشد. حال با تلفیق معادلات (۱۸) و (۲۰) داریم:

$$\begin{aligned} \delta g &= A_{\text{Newton}}\left(\frac{1}{-k\pi G} A_{\Delta^2\phi}(\alpha)\right) \\ &= \underbrace{A_{\text{Newton}}\left(\frac{1}{-k\pi G} A_{\Delta^2\phi}\right)}_{A_{\text{Newton}}^\alpha}(\alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

یعنی به طور خلاصه خواهیم داشت:

$$\delta g = A_{\text{Newton}}^\alpha(\alpha) \quad (22)$$

همان طور که از روابط فوق استنتاج می‌شود، حل تمامی معادلات فوق‌الذکر منوط به تعیین ضرایب بسط

$$\begin{cases} \delta W(\mathbf{r}) = G \iiint_V \frac{\delta\rho(\mathbf{r}') dv'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \\ \delta g(\mathbf{r}) = G \iiint_V \frac{\delta\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) dv'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3} \end{cases} \quad (12)$$

که در رابطه فوق، $V \subset \mathbb{R}^3$ فضای توپوگرافی منطقه مورد مطالعه و dv' المان حجم در موقعیت $\mathbf{r}'$ می‌باشد. همانند رابطه (۱۰)، برای شتاب جاذبه تفاضلی $\delta g = g - g_{\text{Ref}} \doteq \langle \mathbf{e}_{\text{gRef}}, \delta \mathbf{g} \rangle$ خواهیم داشت:

$$\delta g(\mathbf{r}) = G \iiint_V \frac{\delta\rho(\mathbf{r}') \langle \mathbf{e}_{\text{gRef}}, (\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \rangle dv'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3} \quad (13)$$

در بسیاری از مسائل معکوس گراویمتری ژئوفیزیکی، معادله‌ی انتگرالی نیوتنی فوق، مرسوم‌ترین مدل ریاضی جهت استخراج آنومالی دانسیته از مشاهدات ثقلی است، که در یک سوی این معادله، مقادیر مشاهداتی شتاب جاذبه تفاضلی (نوعی از آنومالی جاذبه یا بی‌هنجاری گرانی) حضور دارد و در طرف دیگر مقادیر مجهول آنامولی دانسیته در زیر عمگر انتگرالی نیوتن قرار می‌گیرند.

۳-۱- ساده‌سازی معادلات و تلفیق آنها

در این گام به دنبال آن می‌باشیم که با استفاده از عملگرهای خطی موجود در معادلات فوق‌الذکر، آنها را ساده‌سازی نموده و به راحتی امکان تلفیق آنها را فراهم آوریم. از این رو در ابتدا معادله خطی مربوط به تابع δW در رابطه (۹) را در نظر بگیرید که با استفاده از عمگر A_ϕ به شکل ذیل ساده‌سازی گردیده است:

$$\delta W = A_\phi(\alpha) \quad (14)$$

در معادله خطی فوق، بردار $\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_m]^T \in \mathbb{R}^m$ شامل تمامی ضرایب بسط در رابطه (۹) است و عملگر A_ϕ نیز با توجه به رابطه (۹) به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$A_\phi(\alpha) = [\phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \quad \phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \quad \dots \quad \phi_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)]\alpha \quad (15)$$

همچنین معادله مشاهده در رابطه (۱۰) را می‌توان با استفاده از عملگر $A_{\nabla\phi}$ به معادله خطی ذیل تبدیل نمود:

یعنی $\mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]^T \in \mathbb{R}^m$ می‌باشد که در این بین هر دو نوع معادله مشاهده یعنی روابط (۱۶) و (۲۲) جهت تعیین این ضرایب قابل استفاده است. همانگونه که از مراحل فوق مشخص است، معادله (۱۶) تنها از بسط ریاضی تابع پتانسیل δW بر حسب تابعهای پایه حاصل شده، در عین حال که در بدست آوردن مدل (۲۲)، معادله انتگرالی نیوتن و معادله دیفرانسیلی پواسن نیز نقش داشته است. لذا می‌توان گفت که معادله (۱۶) صرفاً یک معادله ریاضی بوده که هدف آن، تنها یافتن یک مدل ریاضی دقیق برای تابع پتانسیل می‌باشد و این هدفی است که غالباً در مبحث فیزیکال ژئودزی به دنبال آن می‌باشیم. از طرف دیگر معادله (۲۲) یک معادله‌ای است که با توجه به نقش معادله‌ی انتگرالی نیوتن و معادله‌ی دیفرانسیلی پواسن در آن، به دنبال یافتن مجهولات خود به نحوی است که با واقعیت فیزیک مسئله نیز همخوانی داشته باشد.

به صورت خلاصه می‌توان گفت که از هر دو نقطه نظر ریاضی و فیزیک (یا به عبارتی از هر دو نقطه نظر ژئودزی و ژئوفیزیک) یک مدلسازی صحیح میدان ثقل، منوط به حل همزمان و صحیح دو معادله‌ی (۱۶) و (۲۲) در یک معادله کلی به صورت ذیل می‌باشد:

$$\begin{cases} \delta g = A_{\nabla\phi}(\mathbf{a}) \leftarrow \text{Mathematical Model} \\ \delta g = A_{Newton}^{\alpha}(\mathbf{a}) \leftarrow \text{Physical Model} \end{cases} \quad (23)$$

در ادامه راهکارهایی جهت حل و پایدارسازی دستگاه معادلات فوق ارائه می‌گردد.

۳-۲- گسسته‌سازی معادلات

با توجه به ماهیت گسسته‌ی مشاهدات در مسائل واقعی، اولین گام در حل معادلات (۲۳) گسسته‌سازی آن است که گسسته‌سازی به منزله‌ی تبدیل تمامی معادلات خطی فوق به معادلات ماتریسی می‌باشد. دستگاه معادلات (۲۳) پس از گسسته‌سازی به دستگاه معادلات ماتریسی ذیل تبدیل می‌گردد:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{\delta g} = \mathbf{A}_{\nabla\phi} \mathbf{a} \leftarrow \text{Mathematical Model} \\ \mathbf{b}_{\delta g} = \mathbf{A}_{Newton}^{\alpha} \mathbf{a} \leftarrow \text{Physical Model} \end{cases} \quad (24)$$

که در دستگاه معادلات فوق، درایه‌های بردار $\mathbf{b}_{\delta g} = [\delta g_1 \ \delta g_2 \ \dots \ \delta g_n]^T \in \mathbb{R}^n$ به بردار مشاهدات، مقادیر شتاب جاذبه تفاضلی δg در n ایستگاه ثقلی می‌باشند. مقدار شتاب جاذبه تفاضلی در هر ایستگاه ثقلی (با شماره‌های $i = 1, 2, \dots, n$) از تفاضل مقدار مشاهداتی ثقل در آن ایستگاه (یعنی g_i) با مقدار محاسباتی اندازه شتاب ثقل مرجع در آن ایستگاه (یعنی g_{Ref}^i) حاصل می‌آید. همچنین درایه‌های ماتریس $\mathbf{A}_{\nabla\phi} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ نیز با استفاده از عملگر $A_{\nabla\phi}$ ، تعریف شده در معادله (۱۷)، به صورت ذیل بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{\nabla\phi}]_{ij} &= \mathbf{e}_{g_{Ref}^i}^T \nabla \phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}^i - \mathbf{r}_j) \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (25)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{r}^i$ و $\mathbf{e}_{g_{Ref}^i}$ به ترتیب بردار موقعیت و بردار یکه در راستای بردار ثقل مرجع در ایستگاه ثقلی i ام، می‌باشند.

همچنین در دستگاه ماتریسی (۲۴)، ماتریس $\mathbf{A}_{Newton}^{\alpha}$ نیز با استفاده از روابط (۲۱)، (۲۰) و (۱۹)، و گسسته‌سازی معادله‌ی انتگرالی نیوتن در رابطه (۱۳) حاصل می‌گردد. جهت گسسته‌سازی معادله‌ی انتگرالی نیوتن می‌توان از مدل رقومی سطح زمین (Digital Elevation Model (DEM) در منطقه مورد مطالعه و جوابهای تحلیلی عملگر انتگرالی نیوتن، بدست آمده برای منشورها، بهره جست، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۴۷، ۴۸]. لازم به ذکر است که استفاده از روش منسوری فوق‌الذکر برای گسسته‌سازی انتگرال نیوتن دارای تقریب صفحه‌ای بوده و در مناطق با وسعت زیاد می‌تواند با استفاده از یک تصحیح ارتفاعی به ارتفاع منشورها اثر انحنای زمین در آن در نظر گرفته شود، به عنوان نمونه مراجعه شود به [۴۳، ۵۸].

۳-۳- حل و پایدارسازی همزمان دو مسئله

با توجه به ناپایداری موجود در مسائل معکوس گراویمتری، حل مسئله معکوس مشروحه در دستگاه معادلات ماتریسی (۲۴) مستلزم استفاده از روشهای پایدارسازی می‌باشد. در تحلیل و پایدارسازی دستگاه معادلات (۲۴)، باید بین معادله مشاهده‌ی اول (یعنی مدل ریاضی $\mathbf{b}_{\delta g} = \mathbf{A}_{\nabla\phi} \mathbf{a}$) و معادله مشاهده دوم (یعنی مدل

با فرض معلوم بودن پارامتر پایداری λ ، جواب دستگاه معادلات مفروض حاصل از روش تیخونوف تعمیم یافته به صورت ذیل حاصل می‌آید [۴۹]:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}_{\nabla\phi}^T \mathbf{A}_{\nabla\phi} + \lambda^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}_{\nabla\phi}^T \mathbf{b}_{\delta g} \quad (30)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که مقدار بهینه جواب پایداری تیخونوف تعمیم‌یافته تابعی از پارامتر پایداری است. لذا تعیین مقدار بهینه این پارامتر نیز در این روش اهمیت به سزایی دارد. جهت تعیین مقدار بهینه پارامتر پایداری، روشهای موسوم به روشهای تعیین پارامتر پایداری (Parameter-Choice Method) ارائه گردیده‌اند [۴۹]. در روشهای تعیین پارامتر پایداری، عموماً جواب پایداری برای مقادیر مختلفی از پارامتر مکرراً محاسبه شده و سپس با توجه به معیارهای خاصی که برای جوابهای بدست آمده وجود دارد، پارامتر بهینه اختیار می‌شود. از این رو است که جهت ساده‌سازی رابطه (۳۰) و افزایش سرعت در تکرار محاسبات در روش پایداری تیخونوف تعمیم‌یافته از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم‌یافته (Generalized Singular value decomposition (GSVD)) استفاده می‌گردد [۴۹]. پیشنهاد می‌شود که جهت سهولت در امر محاسبات به جای ماتریس $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ که در آن $n \geq m$ می‌باشد، از ماتریس بالامثلثی $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ که از تجزیه QR (QR decomposition) ماتریس $\mathbf{L}$ بدست می‌آید، استفاده گردد. تجزیه QR ماتریس $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ را به حاصل ضرب یک ماتریس متعامد (Orthogonal) مانند $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و یک ماتریس بالامثلثی مانند $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ، به صورت ذیل تبدیل می‌نماید:

$$\mathbf{L} = \mathbf{QR} \quad (31)$$

با توجه به خصوصیت تعامد بین ستونهای ماتریس $\mathbf{Q}$ (یعنی $\mathbf{I} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$) می‌بینیم که جایگزینی ماتریس بالامثلثی $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ با ماتریس $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ تاثیری در مقدار نیم‌نرم $\|\mathbf{La}\|$ نخواهد داشت زیرا که

$$\begin{aligned} \|\mathbf{La}\|^2 &= (\mathbf{La})^T \mathbf{La} \\ &= (\mathbf{QRa})^T \mathbf{QRa} \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{a} \\ &\quad (\mathbf{Ra})^T \mathbf{I} \\ &= (\mathbf{Ra})^T \mathbf{Ra} \\ &= \|\mathbf{Ra}\|^2 \end{aligned} \quad (32)$$

فیزیکی $\mathbf{b}_{\delta g} = \mathbf{A}_{Newton}^{\alpha} \mathbf{a}$ موازنه‌ای فراهم آورد. بدین منظور، در این تحقیق جهت حل و پایداری دستگاه مذکور، روش پایداری تیخونوف تعمیم‌یافته به نحو زیر پیشنهاد گردیده است.

۳-۳-۱- روش پایداری تیخونوف تعمیم یافته (Generalized Tikhonov Regularization method)

همانگونه که در رابطه (۲۴) دیده می‌شود در دو مدل ریاضی و فیزیکی این دستگاه معادلات، طرف چپ دو معادله با هم برابر می‌باشند. لذا می‌توان معادله دوم این دستگاه معادلات را با معادله قید (Constraint) ذیل جایگزین نمود:

$$\mathbf{A}_{\nabla\phi} \mathbf{a} = \mathbf{A}_{Newton}^{\alpha} \mathbf{a} \quad (26)$$

و یا

$$(\mathbf{A}_{\nabla\phi} - \mathbf{A}_{Newton}^{\alpha}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (27)$$

پس در این حالت با جایگزینی معادله قید فوق با معادله دوم دستگاه معادلات (۲۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{\delta g} = \mathbf{A}_{\nabla\phi} \mathbf{a} \\ \mathbf{La} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (28)$$

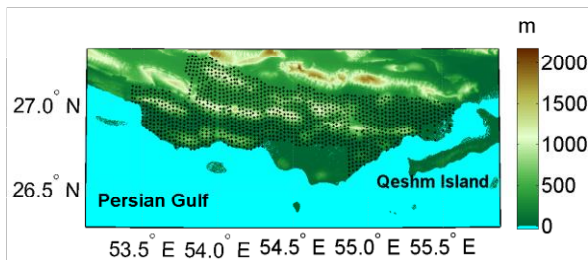
که در این دستگاه $\mathbf{L} = \mathbf{A}_{\nabla\phi} - \mathbf{A}_{Newton}^{\alpha} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ می‌باشد.

پیشنهاد می‌گردد به دلیل وجود خطای مدل در هر یک از معادلات (۲۴) که ناشی از تقریبات، فرضیات و گسسته‌سازی معادلات می‌باشد، معادله قید در دستگاه فوق، یک معادله قید وزندار (Weighted Constraint) در نظر گرفته شود. در این حالت می‌توان جهت حل دستگاه معادلات فوق از بهینه‌سازی ذیل که حالت خاصی از روش تیخونوف تعمیم‌یافته است، استفاده نمود:

$$\|\mathbf{A}_{\nabla\phi} \mathbf{a} - \mathbf{b}_{\delta g}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{La}\|^2 \rightarrow 0 \quad (29)$$

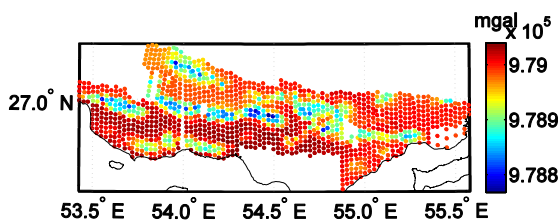
در بهینه‌سازی فوق پارامتر $\lambda \in \mathbb{R}^+ + \{0\}$ ، پارامتر پایداری (Regularization parameter) خوانده شده و $\|\mathbf{La}\|$ نیز یک نیم-نرم (semi-norm) یا اصطلاحاً "شبه-نرم" برای بردار مجهولات $\mathbf{a}$ محسوب می‌گردد.

۹۰ متر) می‌باشد. در این شکل موقعیت ایستگاههای ثقلی در سیستم مختصات ژئودتیک جهانی WGS-84 نمایش داده شده‌اند.



شکل ۳- توزیع ایستگاههای ثقلی در منطقه فارس ساحلی؛ نقاط سیاه رنگ نمایانگر ایستگاههای ثقلی است.

جهت برداشت اطلاعات ثقلی در این مطالعه موردی، از روشهای ثقل‌سنجی زمینی به صورت نسبی استفاده شده و موقعیت آنها نیز در سیستم ژئودتیک جهانی WGS-84 با استفاده از روشهای تعیین موقعیت ماهواره‌ای به شیوه ایستایی-تفاضلی (static DGPS) تعیین گردیده‌اند. شایان ذکر است که با توجه به تأثیر عوامل متعدد بر روی فاکتور دقت در مشاهدات ثقلی (همچون: دقت دستگاهی، دقت مدل جهت حذف اثر جزر و مدی، دقت مدل جهت حذف اثر دریافت دستگاهی، تأثیر خطای موقعیت بر روی مشاهدات ثقلی و تأثیر دقت ایستگاههای مرجع و ...)، دقت نهایی این مشاهدات ثقلی، توسط عوامل برداشت کننده‌ی آن به صورت صریح مشخص نگردیده اما طبق گزارشهای مربوطه مشخص است که در برداشت این مشاهدات از دستگاههای گراویمتر (ثقل سنج یا گرانی‌سنج) از نوع لاکوست-رومبرگ (LaCoste-Romberg gravimeter) با دقت دستگاهی ۴۰ میکروگال استفاده شده است، مراجعه شود به [۵۲]. در شکل ۴ توزیع مکانی مشاهدات ثقلی در محدوده منطقه مورد مطالعه نمایش داده شده‌اند.



شکل ۴- توزیع مشاهدات ثقلی در منطقه مورد مطالعه

در این مطالعه موردی در ابتدای امر، تئوریهای مشروحه در بخشهای قبل این مقاله، بر روی مشاهدات ثقلی این پروژه اعمال گردیده است و سپس جهت بررسی صحت ایده‌های این تحقیق مدلسازی میدان ثقل با برخی از نقاط کنترل

همانگونه که ذکر گردید جایگزینی ماتریس $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ با ماتریس $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ سبب سادگی محاسبات گردیده و بدان جهت است که در روش پایداریسازی تیخونوف تعمیم‌یافته (با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم‌یافته (GSVD)) عموماً ماتریس نیم-نرم L به نحوی باید اختیار گردد که تعداد سطرهای آن از تعداد ستونهای آن (یعنی تعداد مجهولات) کوچکتر یا مساوی باشد، مراجعه شود به [۴۹، ۵۰]. همچنین در این تحقیق، در کنار روش پایداریسازی تیخونوف تعمیم‌یافته روش منحنی-ال (L-Curve) به عنوان مشهورترین روش تعیین پارامتر پایداریسازی (Parameter-Choice Method) جهت تعیین پارامتر پایداریسازی λ پیشنهاد می‌گردد [۴۹، ۵۱].

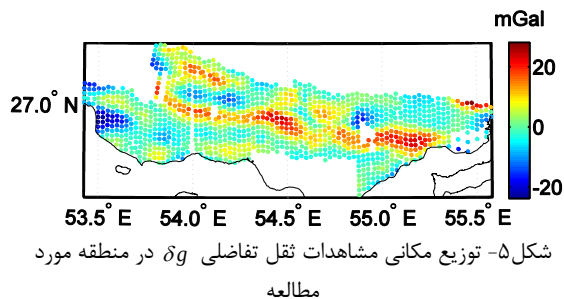
در بخش بعد در مطالعه موردی انجام پذیرفته، صحت تمامی تئوری‌های مطرح شده در فوق به صورت عددی مورد آزمایش قرار می‌گیرد.

۴- مطالعه موردی

به منظور بررسی و آزمایش عددی تئوریهای مطرح شده در بخش پیشین، در این تحقیق یک مطالعه موردی در منطقه فارس ساحلی صورت پذیرفت که در آن از مشاهدات ثقلی ۶۳۵۰ ایستگاه ثقل سنجی در این منطقه استفاده گردیده است. منطقه مورد مطالعه که بخشی از سواحل شمالی خلیج فارس را شامل می‌گردد، با مساحت تقریبی ۱۰۰۰۰ کیلومترمربع در محدوده بین استانهای هرمزگان، بوشهر و فارس قرار گرفته است. ۶۳۵۰ مشاهده استفاده شده در این مطالعه موردی در سالهای ۱۳۸۲ و ۱۳۸۳ ه.ش. توسط شرکت ملی نفت ایران برای بررسی برخی اهداف اکتشافی در منطقه فارس ساحلی برداشت گردیده‌اند که فاصله تقریبی ایستگاهها در راستای جنوب به شمال به تقریب بین ۰.۵ الی ۱ کیلومتر و در راستای غرب به شرق نیز ۲ الی ۵ کیلومتر بوده است. شکل ۳ توزیع ایستگاههای ثقل‌سنجی در منطقه فارس ساحلی را بر روی یک مدل رقومی سطح زمین (DEM) نمایش می‌دهد (جهت نمایش واضح‌تر ایستگاهها تنها ۲۰٪ آنها در این شکل نمایش داده شده‌اند). مدل رقومی نمایش داده شده در شکل ۳، یک مدل رقومی حاصل از پروژه Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) بوده که تفکیک‌پذیری آن ۳ ثانیه در ۳ ثانیه (حدوداً ۹۰ متر در

جهانی توپوگرافی DTM2006.0 (تا درجه و مرتبه ۲۱۶۰) می‌باشد [۴۳].

شکل ۵ توزیع مکانی شتاب ثقل تفاضلی δg بدست آمده در منطقه مورد مطالعه را نمایش می‌دهد.



با کسر میدان ثقل مرجع هر ایستگاه از مشاهده ثقلی، مشاهدات ثقلی تفاضلی در تمامی ایستگاه‌ها تعیین گردید و امکان تشکیل معادله (۲۸) فراهم آمد. همچنین، جهت تشکیل معادلات، نیاز است که توپوگرافی منطقه مورد مطالعه به منشورها یا به عبارتی المانهای مکعب‌مستطیلی شکل تقسیم گردد. از این المانها جهت گسسته‌سازی معادلات انتگرالی نیوتنی و همچنین از موقعیت مرکز آنها بر روی سطح زمین به عنوان موقعیت نقاط گره‌ای در معادلات مربوط به توابع شعاعی استفاده گردیده است. با توجه به ابعاد منطقه مورد مطالعه و فاصله ایستگاهها، ابعاد المانها به نحوی اختیار گردید که اولاً جهت افزایش درجه آزادی مسئله تعداد المانها (به عبارتی تعداد مجهولات) از تعداد مشاهدات کمتر بوده و ثانیاً هر المان در بر گیرنده حداقل یک ایستگاه ثقلی باشد، از این رو در این تحقیق محدوده منطقه به ۲۳۶۷ المان ۲ کیلومتر در ۲ کیلومتر تقسیم گردید. همچنین در این تحقیق جهت تعریف میدان ثقل مرجع از تکنیک-RTM استفاده شده و فرض می‌گردد که در این تکنیک اثر جاذبه توپوگرافی تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰ در مدل جهانی EGM2008 دیده شده است [۴۳، ۴۴، ۶۰]. لذا ارتفاع هر یک از المانهای مشروحه فوق برابر با اختلاف بین ارتفاع آن منشور با ارتفاع هموار شده‌ی آن (حاصل از DTM2006.0) در نظر گرفته شده است [۴۳، ۴۴، ۶۰]. همچنین در این تحقیق ضریب توپوگرافی k تعریف شده در معادله دیفرانسیلی پواسن در رابطه (۳) به تقریب برابر با مقدار متوسط آن بر روی سطح زمین یعنی برابر با ۲ در نظر گرفته شده است.

پس از تشکیل معادلات برای تمامی ایستگاههای ثقلی، دستگاه معادلات مربوطه با استفاده از روش پایداری

بررسی شده و صحت مدل‌سازی توزیع دانسیته نیز با استفاده از داده‌های زمین‌شناسی مورد آزمایش قرار گرفته است.

۴-۱- پیاده سازی روش

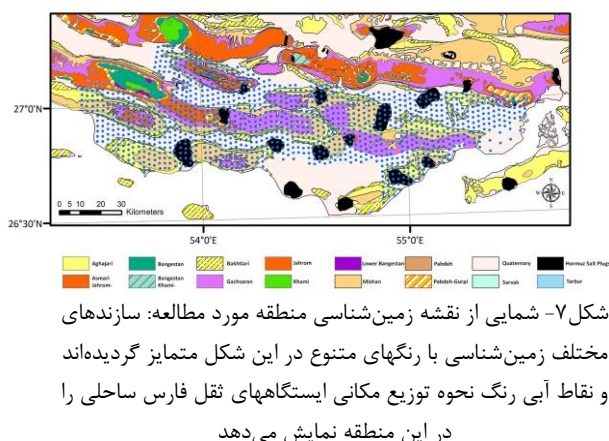
در ابتدای محاسبات، حدود ۵٪ از ایستگاههای ثقلی (۳۰۸ ایستگاه)، جهت کنترل روش پیشنهادی مدل‌سازی میدان ثقل، به صورت تصادفی، انتخاب و از چرخه محاسبات حذف گردیدند. از این ایستگاههای کنترل در هیچ یک از مراحل مشروحه‌ی این تحقیق استفاده نگردیده تا کنترل روش مدل‌سازی ثقل با مشاهداتی مستقل از جوابهای نهایی آن انجام پذیرد و در انتها از این مشاهدات جهت تعیین صحت و دقت مدل‌سازی محلی ثقل استفاده گردیده است. همچنین جهت کنترل مدل‌سازی توزیع دانسیته نیز از دانسیته استخراج شده از نقشه زمین‌شناسی منطقه و اطلاعات نمونه برداری سنگهای سازندهای زمینی روسطحي استفاده شده است.

جهت پیاده سازی معادلات مطرح شده‌ی این تحقیق، ابتدا در تمامی ایستگاههای ثقلی، میدان ثقل مرجع با استفاده از تکنیک-RTM (Residual Terrain Model) technique-RTM)) محاسبه گردید. در تکنیک-RTM به کاررفته در این تحقیق از مدل جهانی EGM-2008 (تهیه شده توسط پاولیس و همکاران (۲۰۱۲ و ۲۰۱۳) [۵۳، ۵۴]) به همراه مدل رقومی ۳ ثانیه SRTM (تهیه شده توسط رویتر (۲۰۰۷) [۵۵]) و مدل جهانی توپوگرافی زمین DTM2006.0 [۵۳، ۵۴]) استفاده گردیده است. همچنین در این میدان مرجع، جهت تعیین اثرات جاذبی توپوگرافی، مقدار اولیه دانسیته جرمی توپوگرافی $\rho_0 = 2300 \text{ kg/m}^3$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از تکنیک-RTM میدان ثقل مرجع g_{Ref} در هر نقطه دلخواه به صورت ذیل محاسبه می‌گردد [۴۳]:

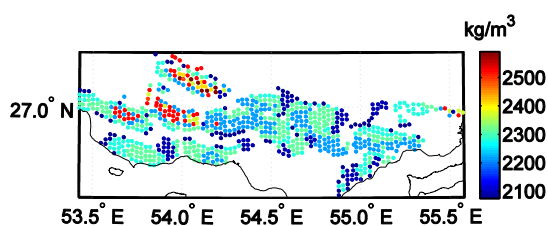
$$g_{\text{Ref}} = g_c + g^{\text{EGM2008}} + g_0^{\text{RTM}} \quad (33)$$

که در رابطه فوق g_c شتاب گرین از مرکز، g^{EGM2008} شتاب جاذبه حاصل از ضرایب هارمونیک EGM2008 (تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰) و g_0^{RTM} اثر جاذبه‌ی "مدل باقی‌ماده سطح زمین (Residual Terrain Model) (RTM))" حاصل از از تفاضل مدل رقومی SRTM با مدل

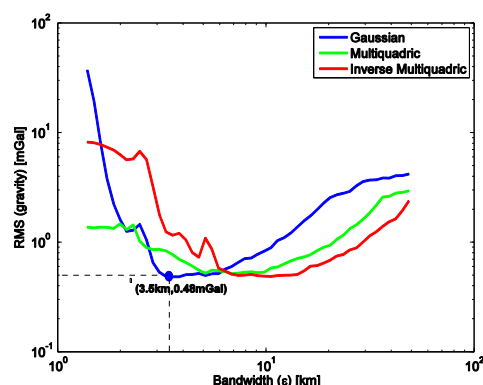
روی چه سازند زمینی قرار گرفته و سپس با توجه به نمونه‌برداریهای مستقیم از دانسیته جرمی سنگهای سازندها، این امکان فراهم آمد که بتوان به موقعیت هر ایستگاه یک مقدار دانسیته جرمی نسبت داد. در شکل ۸ گرافی از مقادیر نمونه‌برداری شده‌ی دانسیته، مربوط به سنگهای سازندهای دارای رخنمون بر روی سطح زمین در منطقه مورد مطالعه، نمایش داده شده است. در این شکل می‌بینیم که مقادیر نمونه‌برداری شده مربوط به سازندهای حوضه زاگرس از قبیل آغاچاری (Aj)، بنگستان (Bgn)، بختیاری (Bk)، چهرم (Ja)، پایده (Pd)، نمک هرمز (Sp)، آسماری-چهرم (As-Ja)، گچساران (Gs)، خامی (Kgp)، میشان (Mn)، پایده-گورپی (Pd-Gu) و تارپور (Tb) می‌باشد، جهت اطلاع بیشتر مراجعه شود به [۶۲]. در جدول ۱ نیز از نقطه نظر سنگ‌شناسی هر یک از این سازندها معرفی گردیده و مقدار متوسط چگالی جرمی هر یک از سازندها که با استفاده از نمونه‌برداری فوق‌الذکر بدست آمده، گنجانده شده است.



در این مطالعه موردی، این امکان فراهم آمد که با استفاده از اطلاعات زمین‌شناسی و نمونه‌برداریهای سطحی فوق‌الذکر، بتوان در ۳۸۷۹ عدد از ایستگاههای ثقلی، پیش‌بینی از متوسط دانسیته اجرام اطراف هر ایستگاه بدست آورد. شکل ۹ توزیع دانسیته جرمی در ۳۸۷۹ ایستگاه که از اطلاعات زمین‌شناسی فوق‌الذکر استخراج گردیده‌اند، را نمایش می‌دهد.



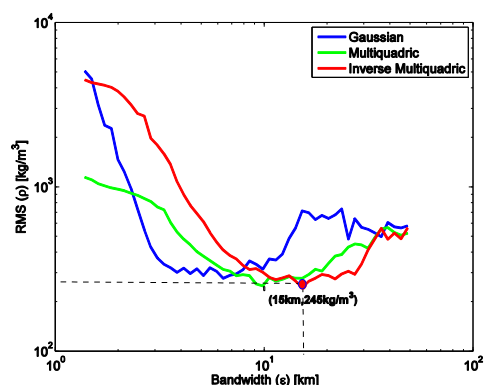
تیرخونوف تعمیم‌یافته مشروحه در بخش ۳-۳-۱ حل گردید. در این تحقیق جهت انجام مراحل پایدارسازی طراحی شده در بخش پیشین، از بسته نرم‌افزاری متلب (MATLAB) تهیه شده توسط هانسن (۱۹۹۴ و ۲۰۰۷) استفاده شده است [۵۰، ۶۱]. پس از حل و پایدارسازی دستگاه معادلات مربوطه ضرایب مدلسازی میدان ثقل α در منطقه مورد مطالعه تعیین گردید و سپس با استفاده از روابط (۱۶) و (۲۲) نیز امکان مدلسازی میدان ثقل و تابع توزیع دانسیته جرمی در منطقه مورد مطالعه فراهم آمد. در این مطالعه موردی همانطور که در بخش ۳ ذکر گردید، جهت مدلسازی میدان ثقل از سه نوع کرنل کلاسیک غیرهارمونیک (۱) گوسی، (۲) مالتی-کوادرانتیک و (۳) مالتی-کوادرانتیک معکوس، استفاده گردیده است. شکل ۶، RMS مربوط به خطای مدلسازی میدان ثقل بدست آمده از ایستگاههای کنترل را برای سه کرنل مذکور و برای مقادیر مختلف پهنای باند کرنل ε نمایش می‌دهد. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود کرنل گوسی به نسبت سایر کرنلها با پهنای باند برابر ۳٫۵ کیلومتر بهینه‌ترین مقدار RMS خطاها را برای مدلسازی میدان ثقل ارائه نموده است.



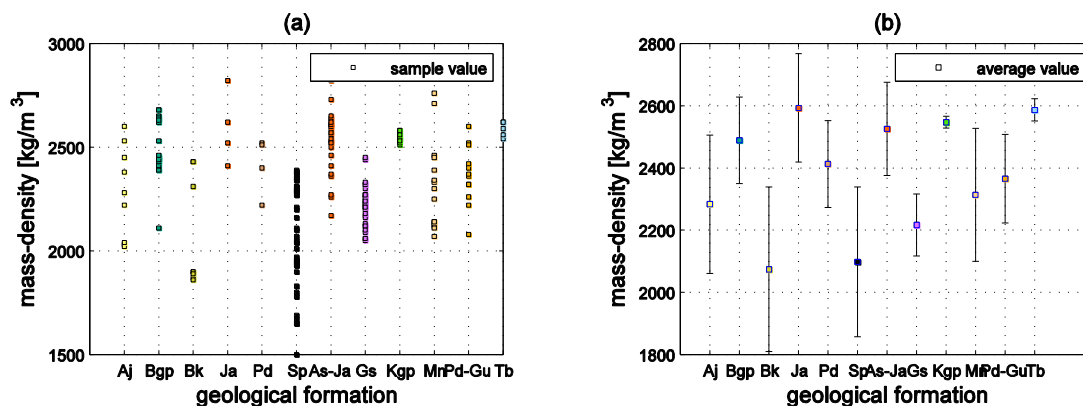
در این مطالعه موردی، جهت بررسی صحت مدلسازی توزیع دانسیته، از مقادیر دانسیته استخراج شده از نقشه زمین‌شناسی و نمونه برداریهای سطحی استفاده گردید. بدین منظور از نقشه زمین‌شناسی تهیه شده توسط مدیریت اکتشاف شرکت ملی نفت ایران و اطلاعات نمونه‌برداری سطحی از سنگهای رخنمون سازندهای زمینی در منطقه مورد مطالعه استفاده شده است. در شکل ۷ شمایی از نقشه زمین‌شناسی مورد استفاده در این مطالعه عددی نشان داده می‌شود. با توجه به معلوم بودن توزیع مکانی ایستگاهها بر روی نقشه زمین‌شناسی، مشخص گردید که هر ایستگاه بر

همانگونه که از اشکال ۶ و ۱۰ پیداست، RMS خطای ثقل و RMS خطای دانسیته نسبت به پهنای باند ε دارای رفتاری نسبتاً مشابه و وابسته می‌باشند. در اینجا، ضریب همبستگی بین RMS این دو نوع خطا برای کرنلهای گاوسی، مالتی-کوادراتیک و مالتی-کوادراتیک معکوس به ترتیب برابر با ۰,۸۸، ۰,۸۴ و ۰,۹۸ بدست آمده است. این مقادیر از ضریب همبستگی نشان از وابستگی این دو نوع خطا نسبت به یکدیگر دارد. از این رو در اینجا، جهت تعیین بهینه‌ترین کرنل و پهنای باند که بتواند توأمأ مدلسازی ثقل و دانسیته را به طور بهینه انجام دهد، از مینیمسازی حاصل ضرب RMS خطای ثقل و RMS خطای دانسیته استفاده نموده‌ایم. در شکل ۱۱، حاصل ضرب RMS خطاهای دو مدلسازی برای سه کرنل: "گاوسی"، "مالتی-کوادراتیک" و "مالتی-کوادراتیک معکوس" با مقادیر مختلف پهنای باند ε ، نمایش داده شده است. همانگونه که در این شکل می‌بینیم بهینه‌ترین مقدار ممکن برای مدلسازی توأم ثقل و دانسیته توسط کرنل مالتی-کوادراتیک با پهنای باند برابر ۹,۸ کیلومتر حاصل شده است.

با استفاده از اطلاعات بدست آمده فوق، امکان آزمایش صحت مدلسازی دانسیته، انجام پذیرفته در حین مدلسازی میدان ثقل، نیز فراهم گردید. با استفاده از مقادیر معلوم دانسیته، استخراج شده از نقشه زمین‌شناسی و مقادیر نمونه‌برداری شده، امکان برآوردی از خطای مدلسازی دانسیته در هر ایستگاه ثقلی فراهم گردید. در شکل ۱۰، RMS خطای مدلسازی دانسیته، بدست آمده برای سه کرنل: "گاوسی"، "مالتی-کوادراتیک" و "مالتی-کوادراتیک معکوس" با مقادیر مختلف پهنای باند ε ، نمایش داده شده است. همانگونه که در این شکل می‌بینیم بهینه‌ترین مقدار ممکن برای مدلسازی دانسیته توسط کرنل مالتی-کوادراتیک معکوس با پهنای باند برابر ۱۵ کیلومتر صورت پذیرفته است.



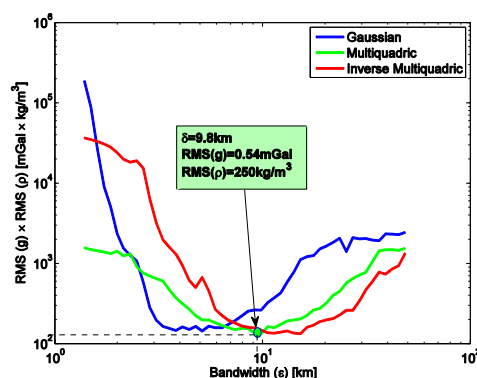
شکل ۱۰- نمودار RMS خطای مدلسازی دانسیته بر حسب پهنای باند کرنل



شکل ۸- (a) نمودار مقادیر نمونه برداری شده‌ی دانسیته جرمی برای سازندهای مختلف، (b) نمودار میانگین مقادیر نمونه‌برداری شده و شمایی از انحراف معیار آنها

جدول ۱- سنگ شناسی سازندهای زمینی دارای رخنمون در منطقه مورد مطالعه

نام سازند	تاربور	پایده-گوری	میشان	خامی	گچساران	اسماری-چهرم	نمک هرمز	پایده	چهرم	بختیاری	بنگستان	آغاجری
سنگ شناسی	limestone	marl	limestone marl	limestone	gips limestone marl	limestone	salt	limestone	dolomite	sandstone conglomerate	limestone	sandstone
متوسط چگالی (kg/m³)	2586	2365	2313	2547	2216	2525	2098	2413	2593	2074	2488	2283



شکل ۱۱- نمودار حاصل ضرب RMS خطای ثقل و RMS خطای ثقل و دانسیته، بر حسب پهنای باند کرنل ϵ

همانگونه که از نقطه نظر تئوری انتظار می‌رفت، نتایج عددی فوق نیز نشان داد که روش پیشنهادی این تحقیق مدلسازی توأم میدان ثقل و توزیع دانسیته بر روی سطح زمین را امکان‌پذیر می‌نماید. هرچند فرض موفقیت میدان رفرنس حاصل از مدل جهانی EGM2008 و تکنیک-RTM در امر مدلسازی میدان ثقل نیز هم از نظر تئوری و هم از نظر عملی نمی‌بایست مخدوش گردد. با این وجود، مزیت عمده روش پیشنهادی این می‌باشد که این روش، بدون داشتن هیچ قید و پیش‌فرضی، تعیین توزیع دانسیته سازندهای روسطحی زمین را ممکن نموده است؛ اگرچه باید در نظر داشت که روش پیشنهادی برای کالیبراسیون (بهینه‌یابی) پهنای باند کرنلهای بکار رفته در آن (مانند: کرنل مولتی-کوادریک) هنوز نیازمند داده‌های زمین‌شناسی می‌باشد.

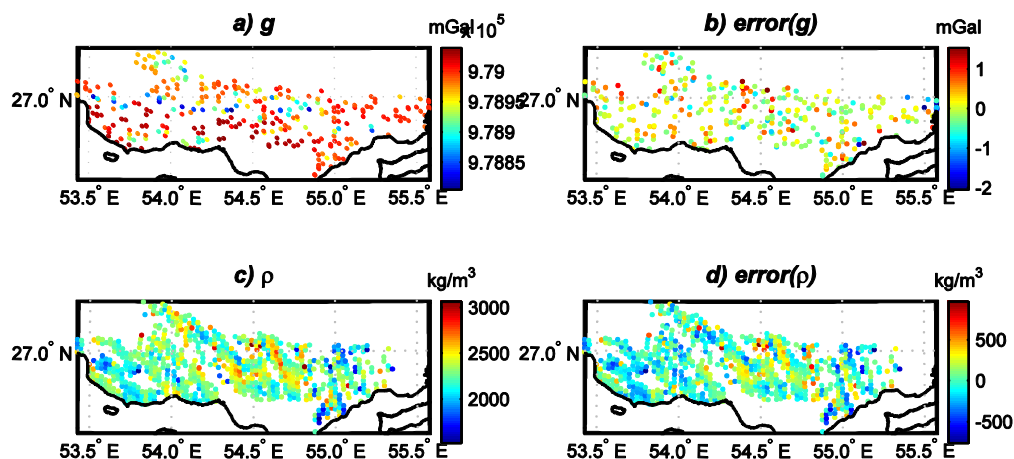
۵- بحث و نتیجه

در این مقاله سعی گردید که هم از دیدگاه نظری و هم با آزمایش‌های عددی مسئله تلفیق دو نوع مسئله معکوس گروایمتری مشروحه در فیزیکال ژئودزی و ژئوفیزیک مورد امکانسنجی قرار گیرد. بدین منظور در ابتدای این تحقیق، تئوریهای این دو مسئله‌ی معکوس مورد بررسی نظری قرار گرفت و با بررسی معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی مربوطه مشخص گردید که امکان تلفیق این دو نوع مسئله معکوس از دیدگاه نظری وجود دارد. در تحلیل‌های نظری بخش ۳ این تحقیق، مشاهده گردید که با ادغام معادلات انتگرالی نیوتن، که غالباً در مسائل معکوس گروایمتری اکتشافی کاربرد دارد، با معادله‌ی دیفرانسیلی پواسن و روابط مدلسازی میدان ثقل، امکان تلفیق دو نوع مسئله معکوس مذکور فراهم آمده و دو مسئله معکوس در قالب یک مسئله معکوس به روش مشهور پایدارسازی تیخونوف (تعمیم‌یافته) قابل حل می‌باشد. همچنین، نهایتاً در این تحقیق، ایده‌ی تلفیق دو مسئله، با استفاده از یک مطالعه موردی واقعی به صورت عددی مورد آزمایش قرار گرفت که آزمایشهای عددی صورت پذیرفته نیز امکان تلفیق دو نوع مسئله معکوس را تأیید می‌نمود. در آزمایشهای عددی صورت گرفته، روش پیشنهادی مشروحه در بخش ۳ بر روی ۶۳۵۰ ایستگاه ثقلی در منطقه فارس ساحلی پیاده‌سازی گردید. در این پیاده‌سازی، جهت کنترل مدلسازی میدان ثقل از ۵٪

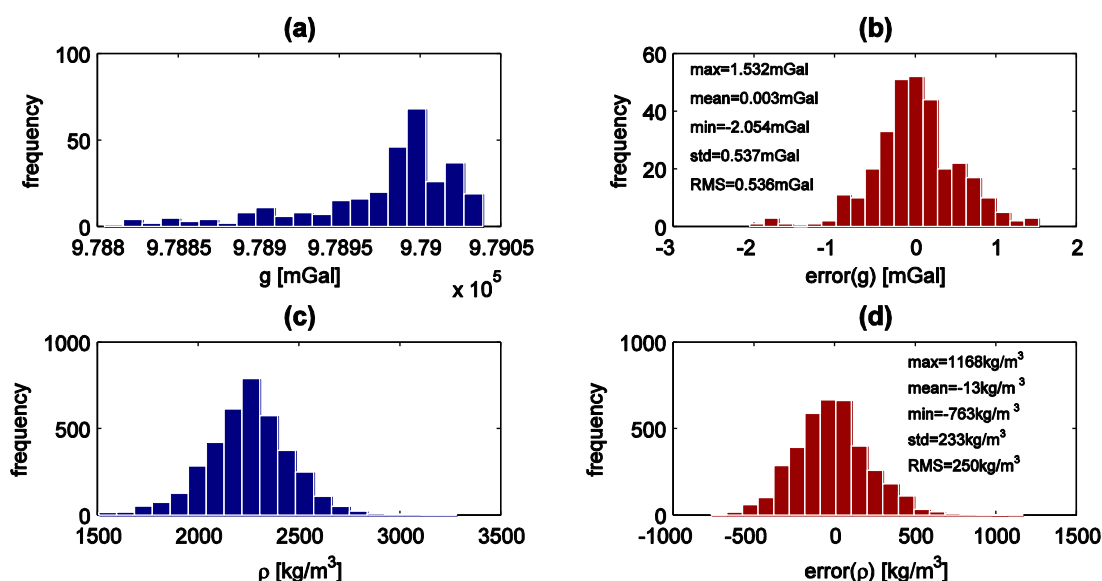
همانگونه که در فوق ذکر گردید، با توجه به توانایی کرنل مالتی-کوادراتیک در کمینه نمودن همزمان RMS خطای مدلسازی میدان ثقل و توزیع دانسیته (رجوع شود به شکل ۱۱)، نهایتاً این کرنل از بین سه کرنل مشروحه در این مطالعه عددی، به عنوان کرنل بهینه انتخاب گردید و با استفاده از آن و مقدار بهینه‌ی بدست آمده برای پهنای باند آن یعنی $\epsilon = 9.8 \text{ km}$ ، مدلسازی میدان ثقل و مدلسازی دانسیته جرمی مربوط به سازندهای زمینی رو سطحی، توأمأً توسط روش پیشنهادی این تحقیق انجام پذیرفت. شکل ۱۲ نیز توزیع مکانی ثقل و دانسیته، که به صورت همزمان توسط روش پیشنهادی این تحقیق مدلسازی شده‌اند، را به همراه توزیع خطاهای آنها در منطقه فارس ساحلی نمایش می‌دهد. در این شکل، مقادیر مدل‌شده‌ی میدان ثقل تنها در ایستگاههای کنترل نمایش داده شده است. همچنین در این شکل، جهت نمایش توزیع مکانی خطای دانسیته، توزیع دانسیته و خطای آن تنها در ایستگاههایی نمایش داده شده است که در آنها امکان استخراج مقدار اولیه دانسیته از نقشه زمین‌شناسی منطقه وجود داشته است. همچنین در شکل ۱۳ نیز هیستوگرامهای مربوط به مقادیر ثقل و دانسیته جرمی بدست آمده و خطاهای مربوطه‌ی آنها گنجانده شده است. همانگونه که از شکل ۱۳(b) و شکل ۱۳(d) پیداست مقادیر خطاهای مدل‌سازی ثقل و دانسیته حول مقدار صفر پراکنده شده‌اند که این پدیده به صورت عددی بر نأریب (unbiased) بودن برآوردهای صورت پذیرفته توسط روش پیشنهادی این تحقیق، دلالت دارد. یادآور می‌شویم که از نقطه نظر آماری، نأریبی یک برآورد (estimation) دلالت بر صحت (accuracy) آن برآورد دارد.

ایستگاههای کنترلی با مقادیر مدلسازی شدهی ثقل و مقایسههای دانسیتههای برآوردشده با مقادیر معلوم حاصل از اطلاعات زمینشناسی، همگی به صورت عددی مؤید روش پیشنهادی و مؤید امکان تلفیق دو نوع مسئله معکوس گراویمتری بوده است.

ایستگاهها به عنوان نقاط کنترلی استفاده شد. همچنین از نمونه برداریهای مستقیم دانسیته، مربوط به سنگهای سازندهای زمینی که در منطقه فارس ساحلی دارای رخمون می باشند، و از نقشه ی زمین شناسی منطقه جهت کنترل روش پیشنهادی در امر مدلسازی دانسیته بهره گرفته شد. مقایسه های عددی بین مقادیر معلوم ثقل در



شکل ۱۲ (a) توزیع مکانی مقادیر ثقل مدلسازی شده در ایستگاههای کنترل، (b) توزیع مکانی خطای مدلسازی میدان ثقل در ایستگاههای کنترل، (c) توزیع مکانی مقادیر برآورد شدهی دانسیته جرمی بر روی سطح زمین در منطقه مورد مطالعه، (d) توزیع مکانی خطای مدلسازی دانسیته جرمی در منطقه مورد مطالعه



شکل ۱۳ (a) هیستوگرام مقادیر ثقل مدلسازی شده در ایستگاههای کنترل، (b) هیستوگرام خطای مدلسازی میدان ثقل در ایستگاههای کنترل، (c) هیستوگرام مقادیر برآورد شدهی دانسیته جرمی در منطقه مورد مطالعه، (d) هیستوگرام خطای مدلسازی دانسیته جرمی در منطقه مورد مطالعه

مراجع

- [1] LaFehr T. (1980). "Gravity method". Geophysics. Vol. 45, 1634-9
- [2] Rosaire E.E. and Ransone K. (1936). "The growth of company owned operations in Gulf Coast geophysical prospecting since July 1930". Geophysics. Vol. 1, 306-12
- [3] Woollard G.P. (1943). "Transcontinental gravitational and magnetic profile of North America and its relation to geologic structure". Geological Society of America Bulletin. Vol. 54, 747-90

- [4] Woollard G.P. and Rose J.C. (1963). "International gravity measurements": Society of Exploration Geophysicists Tulsa)
- [5] Woollard G.P. (1979). "The new gravity system-changes in international gravity base values and anomaly values". *Geophysics*. Vol. 44, 1352-66
- [6] Oezsen R. (2004). "Velocity modelling and prestack depth imaging below complex salt structures: a case history from on-shore Germany". *Geophysical Prospecting*. Vol. 52, 693-705
- [7] Zhdanov M.S. (2002). "Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems": Elsevier Science)
- [8] Caratori Tontini F., Cocchi L. and Carmisciano C. (2009). "Rapid 3-D forward model of potential fields with application to the Palinuro Seamount magnetic anomaly (southern Tyrrhenian Sea, Italy)". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* (1978–2012). Vol. 114,
- [9] Gordon A.C., Mohriak W.U. and Barbosa V.C. (2013). "Crustal architecture of the Almada Basin, NE Brazil: an example of a non-volcanic rift segment of the South Atlantic passive margin". *Geological Society, London, Special Publications*. Vol. 369, 215-34
- [10] Oliveira V.C. and Barbosa V.C.F. (2013). "3-D radial gravity gradient inversion". *Geophysical Journal International*. Vol. 195, 883-902
- [11] Last B. and Kubik K. (1983). "Compact gravity inversion". *Geophysics*. Vol. 48, 713-21
- [12] Guillen A. and Menichetti V. (1984). "Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional". *Geophysics*. Vol. 49, 1354-60
- [13] Barbosa V.C., Silva J.B. and Medeiros W.E. (1999). "Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations". *Geophysics*. Vol. 64, 754-64
- [14] Barbosa V. and Silva J. (1994). "Generalized compact gravity inversion". *Geophysics*. Vol. 59, 57-68
- [15] Li Y. and Oldenburg D. (1998). "3-D inversion of gravity data". *Geophysics*. Vol. 63, 109-19
- [16] Portniaguine O. and Zhdanov M. (1999). "Focusing geophysical inversion images". *Geophysics*. Vol. 64, 874-87
- [17] Bertete-Aguirre H., Cherkaev E. and Oristaglio M. (2002). "Non-smooth gravity problem with total variation penalization functional". *Geophysical Journal International*. Vol. 149, 499-507
- [18] Silva J. and Barbosa V. (2006). "Interactive gravity inversion". *Geophysics*. Vol. 71, J1-J9
- [19] Farquharson C.G. (2007). "Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversions". *Geophysics*. Vol. 73, K1-K9
- [20] Silva Dias F., Barbosa V. and Silva J. (2009). "3D gravity inversion through an adaptive-learning procedure". *Geophysics*. Vol. 74, I9-I21
- [21] Fregoso E. and Gallardo L.A. (2009). "Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data". *Geophysics*. Vol. 74, L31-L42
- [22] Silva Dias F., Barbosa V. and Silva J. (2011). "Adaptive learning 3D gravity inversion for salt-body imaging". *Geophysics*. Vol. 76, I49-I57
- [23] Moraes R.A. and Hansen R. (2001). "Constrained inversion of gravity fields for complex 3-D structures". *Geophysics*. Vol. 66, 501-10
- [24] Silva J.B., Medeiros W.E. and Barbosa V.C. (2000). "Gravity inversion using convexity constraint". *Geophysics*. Vol. 65, 102-12
- [25] Silva J.B. and Barbosa V.C. (2004). "Generalized radial inversion of 2D potential-field data". *Geophysics*. Vol. 69, 1405-13
- [26] Wildman R.A. and Gazonas G.A. (2009). "Gravitational and magnetic anomaly inversion using a tree-based geometry representation". *Geophysics*. Vol. 74, I23-I35
- [27] Luo X. (2010). "Constraining the shape of a gravity anomalous body using reversible jump Markov chain Monte Carlo". *Geophysical Journal International*. Vol. 180, 1067-79
- [28] Oliveira V.C., Barbosa V.C. and Silva J.B. (2011). "Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial inversion of gravity data". *Geophysical Journal International*. Vol. 187, 754-72
- [29] Moritz H. (1980). "Advanced physical geodesy". *Advances in Planetary Geology*. Vol. 1,

- [30] Klees R., Tenzer R., Prutkin I. and Wittwer T. (2008). "A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions". *Journal of Geodesy*. Vol. 82, 457-71
- [31] Wittwer T. (2009). "Regional gravity field modelling with radial basis functions". In: *Geoscience & Remote Sensing*: TU Delft)
- [32] Hadamard J. (2014). "Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations": Courier Corporation)
- [33] Stokes G. (1866). "On the internal distribution of matter which shall produce a given potential at the surface of a gravitating mass". *Proceedings of the Royal Society of London*. Vol. 15, 482-6
- [34] Zidarov D. (1980). "Some uniqueness conditions for the solution of the inverse gravimetric problem". *CR Acad. Bulgar. Sci*. Vol. 33, 909-12
- [35] Stromeyer D. and Ballani L. (1984). "Uniqueness of the inverse gravimetric problem for point mass models". *Manuscripta geodaetica*. Vol. 9, 125-36
- [36] Michel V. and Fokas A.S. (2008). "A unified approach to various techniques for the non-uniqueness of the inverse gravimetric problem and wavelet-based methods". *Inverse Problems*. Vol. 24, 045019
- [37] Freedman W., Gervens T. and Schreiner M. (1998). "Constructive Approximation on the Sphere with Applications to Geomathematics": Clarendon Press)
- [38] Vaníček P. and Krakiwsky E.J. (1986). "Geodesy, the concepts": North Holland)
- [39] Hofmann-Wellenhof B. and Moritz H. (2006). "Physical geodesy": Springer Science & Business Media)
- [40] Safari A., Ardalan A.A. and Grafarend E.W. (2005). "A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran". *Journal of Geodynamics*. Vol. 39, 545-68
- [41] Sjöberg L.E. (2005). "A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique in regional geoid modelling". *Journal of Geodesy*. Vol. 78, 645-53
- [42] Ardalan A. and Karimi R. (2013). "On correct application of one-step inversion of gravity data". *Stud Geophys Geod*. Vol. 57, 401-25
- [43] AllahTavakoli Y., Safari A., Ardalan A. and Bahrodi A. (2015). "Application of the RTM-technique to gravity reduction for tracking near-surface mass-density anomalies: A case study of salt diapirs in Iran". *Stud Geophys Geod*. Vol. 1-15
- [44] Hirt C., Featherstone W.E. and Marti U. (2010). "Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data". *Journal of Geodesy*. Vol. 84, 557-67
- [45] Eicker A. (2008). "Gravity field refinement by radial basis functions from in-situ satellite data": Citeseer)
- [46] Tenzer R., Prutkin I. and Klees R. (2012). "Geodesy for Planet Earth", ed S. Kenyon, et al.: Springer Berlin Heidelberg) pp 381-8
- [47] Nagy D., Papp G. and Benedek J. (2000). "The gravitational potential and its derivatives for the prism". *Journal of Geodesy*. Vol. 74, 552-60
- [48] Nagy D., Papp G. and Benedek J. (2002). "Corrections to "The gravitational potential and its derivatives for the prism"". *Journal of Geodesy*. Vol. 76, 475-
- [49] Hansen P.C. (1998). "Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion": Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104))
- [50] Hansen P. (2007). "Regularization Tools version 4.0 for Matlab 7.3". *Numer Algor*. Vol. 46, 189-94
- [51] Hansen P. and O'Leary D. (1993). "The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems". *SIAM Journal on Scientific Computing*. Vol. 14, 1487-503
- [52] NIOC (2004). "Gravity and magnetic data acquisition plan in Fars area". (Iran: National Iranian Oil Company (NIOC))
- [53] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K. (2013). "Correction to "The Development and Evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)"". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. Vol. 118, 2633-

- [54] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K. (2012). "The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. Vol. 117, B04406
- [55] Reuter H.I., Nelson A. and Jarvis A. (2007). "An evaluation of void-filling interpolation methods for SRTM data". *International Journal of Geographical Information Science*. Vol. 21, 983-1008
- [56] Hinze W.J., Aiken C., Brozena J., Coakley B., Dater D., Flanagan G., Forsberg R., Hildenbrand T., Keller G.R. and Kellogg J. (2005). "New standards for reducing gravity data: The North American gravity database". *Geophysics*. Vol. 70, J25-J32
- [57] LaFehr T. (1991). "Standardization in gravity reduction". *Geophysics*. Vol. 56, 1170-8
- [58] Forsberg R. (1984). "A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling". DTIC Document)
- [59] Hackney R. and Featherstone W. (2003). "Geodetic versus geophysical perspectives of the 'gravity anomaly'". *Geophysical Journal International*. Vol. 154, 35-43
- [60] Hirt C. (2013). "RTM gravity forward-modeling using topography/bathymetry data to improve high-degree global geopotential models in the coastal zone". *Marine Geodesy*. Vol. 36, 183-202
- [61] Hansen P. (1994). "REGULARIZATION TOOLS: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems". *Numer Algor*. Vol. 6, 1-35
- [62] Motiei H. (1993). "Stratigraphy of Zagros". *Treatise on the Geology of Iran*. Vol. 60-151