

برآورد تانسور گرادیان گرانی بر سطح زمین با استفاده از روش تفاضل محدود و تلفیق داده‌های جاذبی زمینی با مدل‌های ژئوپتانسیل جهانی: مطالعه موردی در منطقه فارس ساحلی

محمدعلی برومند^{۱*}، عبدالرضا صفری^۲، یحیی الله توکلی^۳، عباس بحرودی^۴

^۱ کارشناس ارشد ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
mboroomand@ut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
asafari@ut.ac.ir

^۳ دانشجوی دکتری ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
ytavakoli@ut.ac.ir

^۴ استادیار دانشکده مهندسی معدن - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
bahroudi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت مرداد ۱۳۹۴، تاریخ تصویب تیر ۱۳۹۵)

چکیده

تانسور گرادیان گرانی، ماتریسی مشتمل بر مشتقات مرتبه‌ی دوم گرانی می‌باشد که کاربردهای فراوانی در علوم ژئودزی و ژئوفیزیک دارد. تا به امروز تلاش‌های زیادی برای اندازه‌گیری و برآورد تانسور گرادیان گرانی با دقت مناسب صورت گرفته است. این کمیت تانسوری از روش‌های متنوعی قابل برآورد بوده که یکی از این روش‌ها استفاده از مشاهدات ثقلی و به کارگیری روش تفاضل محدود است. روش تفاضل محدود با استفاده مستقیم از مفهوم ریاضی تانسور گرانی، بدون در نظر گرفتن فرضیات اضافی که ممکن است از واقعیت مسئله به دور باشد، می‌تواند از نقطه نظر تئوری امکان برآورد صحیح تانسور گرادیان گرانی را فراهم آورد. در این مطالعه، تانسور گرادیان با استفاده از داده‌های جاذبی زمینی و روش تفاضل محدود فرموله و تعیین شده است. در این مقاله، روابط پیشنهادی به صورت عددی با استفاده از یک مدل جاذبی جهانی زمین مورد آزمایش قرار می‌گیرد و سپس از این روش، جهت برآورد تانسور گرادیان گرانی در ۶۳۵۰ ایستگاه ثقلی در منطقه‌ی فارس ساحلی در جنوب ایران، استفاده می‌گردد. آزمایش‌های عددی این تحقیق نشان از توانایی روش در برآورد مولفه‌های تانسور گرادیان گرانی با دقت مناسب می‌باشد. به عنوان مثال در آزمایش‌های عددی دیده می‌شود که روش پیشنهادی این تحقیق امکان برآورد مولفه‌های قطری تانسور گرادیان (به عبارتی مشتقات دوم گرانی در جهت‌های شرق، شمال و قائم) را با دقت‌هایی به ترتیب برابر با ۱۲،۴۶، ۳۴،۴۹ و ۴۵۴،۸۲ اتووش فراهم نموده است.

واژگان کلیدی: تانسور گرادیان گرانی، روش تفاضل محدود، مدل ژئوپتانسیل، فارس ساحلی

۱- مقدمه

بطور کلی مشاهدات جاذبی در ژئودزی برای اهداف متنوعی مانند: تعیین سطح مبنای ارتفاعی (ژئوئید)، تبدیل سیستم‌های ارتفاعی به یکدیگر، مدلسازی‌های محلی و جهانی میدان گرانی، تعیین تغییرات منطقه‌ای سطح آبها و آنالیز مدار ماهواره‌ها کاربرد بسیار فراوان دارد. از طرف دیگر در ژئوفیزیک از این نوع مشاهدات به عنوان مشاهدات ارزشمند در کمک به فهم ساختارهای زیر سطحی زمین، استفاده می‌شود. در ژئودزی غالباً از مشاهدات جاذبی برای بیان هندسی سه بعدی زمین استفاده می‌شود و از آن سو در ژئوفیزیک، عمده‌ی هدف از استفاده از این دسته مشاهدات، تعیین مشخصه‌های فیزیکی زمین می‌باشد. یکی از مهمترین مشاهدات جاذبی که هم در ژئودزی و هم در ژئوفیزیک از کاربرد و اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، مشاهده "تانسور گرادیان گرانی (gravitational gradient tensor)" است. تانسور گرادیان گرانی مشتقات مرتبه‌ی دوم پتانسیل گرانی زمین است. سیگنال گرادیان گرانی در مقایسه با مشاهده گرانی بسیار سریع تر نسبت به فاصله تضعیف می‌شود. از این رو تانسور گرادیان گرانی در مقایسه با اندازه شتاب گرانی، نسبت به تغییرات جرمی زیرزمینی نزدیک به سطح زمین، حساس‌تر است. داده‌های گرادیان گرانی می‌توانند برای بدست آوردن ساختارهای زیرسطحی زمین زمانی که یک ساختار ناهمگون زیر سطحی وجود دارد مورد استفاده قرار بگیرند [۱]. از جمله دیگر کاربردهای تانسور گرادیان گرانی می‌توان به اکتشافات معدنی مانند: سنگ آهن و اکتشاف نوعی سنگ آذرین به نام کیمبرلایت (kimberlite) برای اهداف اکتشاف الماس [۲]، اکتشافات نفت و گاز و دیگر منابع انرژی زیرزمینی [۳]، آشکارسازی دقیق حفره‌های زیرزمینی، تشخیص و بررسی پدیده‌های زمین‌شناسی مانند گنبد‌های نمکی، جزایر و گسل‌ها [۴]، کاربرد در تحقیقات مربوط به زمین لرزه و پیش بینی آن [۵]، استفاده در هدایت موشک‌های بالستیک، مدل‌سازی میدان ثقل زمین، تعیین مدار ماهواره‌ها و ناوبری اینرشیال [۶] اشاره کرد.

از زمانیکه رونالد بارون وان اتووش (Roland von Eötvös) ترازوی پیچشی خود موسوم به تورشن بالانس (torsion balance) را در اوایل قرن بیستم برای اهداف

اکتشافاتی در مجارستان عرضه نمود، اندازه گیری‌های تانسور گرادیان گرانی تا کنون رونق بسیار فراوانی یافته است (بود و همکاران، ۱۹۹۰) [۷]. در دو دهه اخیر، علوم ژئودزی و ژئوفیزیک شاهد پیشرفت سیستم‌های گرادیومتری جاذبی هوایی (AGG) مدرن مانند سیستم BHP فالکون (آستن، ۲۰۰۰) و سیستم برداشت کامل تانسور گرانی (FTG) بل ژئواسپیس (بل ژئواسپیس، ۲۰۰۴) بوده است [۸]. از جمله مزایای سیستم‌های گرادیومتری جاذبی هوایی آن است که آنها توانایی برداشت سریع تانسور گرادیان گرانی بر روی هر نوع ساختار زمینی و در هر نوع اقلیمی را با دقت مطلوب دارا می‌باشند و این خود دلیل اصلی در توسعه و افزایش تقاضای سریع این سیستم‌ها در ۲۰ سال اخیر بوده است.

مدل‌سازی مستقیم (Forward modeling) روشی بر پایه‌ی تئوری پتانسیل گرانی‌ی نیوتن بوده که برای محاسبه‌ی گرادیان گرانی، از آنومالی چگالی جرمی معلوم استفاده می‌نماید. مشکلی که در این روش وجود دارد این است که غالباً تغییرات چگالی جرمی توده‌های زیرزمینی، معلوم نبوده و این موضوع، استفاده مستقیم از معادله‌ی انتگرالی نیوتن جهت برآورد مولفه‌های تانسور را ممکن نمی‌سازد. از این رو، روش‌های جایگزین برای برآورد تانسور گرادیان گرانی با استفاده از داده‌های گرانی، در ابتدا توسط آگراول و لال (۱۹۷۲) [۹]، گان (۱۹۷۵) [۱۰] و سپس توسط میکوس و هینوجوسا (۲۰۰۱) [۱۱] ارائه گردید. آگراول و لال یک عملگر هموارکننده ریاضی (mathematical smoothing operator)، را به خدمت گرفتند که توانایی برآورد مشتق مرتبه‌ی دوم میدان پتانسیل گرانی را با استفاده از آنومالی گرانی‌ی بوگه فراهم می‌آورد. گان در مقاله‌ی خود در سال ۱۹۷۵ نشان داد که میدان‌های گرانی و مغناطیس، هر یک، نتیجه‌ی یک کانولوشن (convolution) از عواملی همچون ۱) هندسه‌ی جسم، ۲) ویژگی‌های فیزیکی آن و ۳) نوع میدان مشاهده شده، می‌باشند (گان، ۱۹۷۵) [۱۰]؛ از این رو مشتقات عمودی و افقی تابعکهای پتانسیل آنها می‌توانند توسط کانولوشن این عوامل همراه با فیلترهای مناسب، محاسبه گردند. میکوس و هینوجوسا (۲۰۰۱) تبدیل فوری‌ی مولفه‌ی ارتفاعی بردار گرانی را محاسبه کرده و از طریق آن طیف کلیه‌ی المان‌های تانسور گرادیان گرانی را تعیین نمودند، در واقع با استفاده از این تبدیل تمامی المان‌های

در این مرحله هدف ارائه یک روش پیشنهادی بر پایه روش تفاضل محدود جهت برآورد تانسور گرانی می‌باشد. بدین منظور یک نقطه با موقعیت معلوم $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید که بردار شتاب جاذبه $\mathbf{f}_g$ در آن اندازه گیری شده باشد. حال N نقطه در همسایگی نقطه محاسباتی در نظر بگیرید. در این اینجا جهت سهولت در یافتن نقاط همسایه، از یک همسایگی به شکل یک مکعب با ابعاد $2\delta \times 2\delta \times 2\delta$ و تعریف ریاضی زیر استفاده شده است:

$$Cube(\mathbf{r}, \delta) = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \|\mathbf{r} - \mathbf{r}\|_\infty < \delta\} \quad (3)$$

همانگونه که از رابطه فوق پیداست مکعب فوق از نقطه نظر ریاضی یک همسایگی به مرکز نقطه محاسباتی بوده که با یک نرم بی‌نهایت (Infinite Norm) مانند: $\|\mathbf{r}\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$ تعریف گردیده است. در رابطه (۳)، r بردار موقعیت نقطه محاسبه و r بردار موقعیت نقاط همسایه ی نقطه محاسبه است. شکل ۱ بصورت شماتیک همسایگی و نقاط همسایه در درون آن را نشان می‌دهد.

به‌علاوه فرض کنید که بردارهای گرانی و بردارهای موقعیت، همگی در N نقطه ی همسایگی نیز مشاهده شده و همگی آنها به صورت سه بعدی در اطراف نقطه محاسباتی پراکنده شده باشند. موقعیت‌های معلوم نقاط همسایه و بردارهای جاذبی مشاهده شده ی آنها، به ترتیب به صورت روابط زیر می‌باشند:

$$\mathbf{f}_g(r_n) = \mathbf{f}_{g_n} = \begin{bmatrix} f_{gx}^n \\ f_{gy}^n \\ f_{gz}^n \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \in Cube(\mathbf{r}, \delta)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

$$N \geq 3$$

حال به دنبال آن می‌باشیم که با استفاده مستقیم از مفاهیم حد و مشتق، تانسور گرادیان گرانی را از مشاهدات جاذبه فوق استخراج نماییم. همچنین در نظر داشته باشیم که در اینجا نیازی به منظم نمودن داده‌ها نبوده و مشاهدات می‌توانند به صورت مستقیم در موقعیت‌های اصلی‌شان استفاده گردند.

تانسور گرادیان جاذبه در فضای فرکانس تعیین و به دنبال آن، تانسور گرادیان گرانی از طریق یک تبدیل فوریه ی معکوس محاسبه گردید.

در این مطالعه، تلاش گردیده تا روشی برای برآورد تانسور گرادیان گرانی با استفاده از روش تفاضل محدود (Finite difference method) ارائه گردد. ابتدا روش پیشنهادی، برای یک مدل معلوم (حاصل از یک مدل ژئوپتانسیل) مورد آزمایش قرار گرفته و پس از حاصل شدن نتایج قابل قبول، بر روی داده ی گرانی واقعی پیاده سازی شده است.

۲- برآورد تانسور گرادیان گرانی با استفاده از روش تفاضل محدود و داده‌های جاذبی زمین

تانسور گرادیان گرانی که عموماً با نام‌هایی همچون تانسور گرانی، تانسور گرایان، تانسور ماروسی (Marrusi tensor)، ماتریس ژاکوبین (Jacobian matrix) بردار گرانی و ماتریس هسین (Hessian matrix) پتانسیل گرانی شناخته می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \nabla \mathbf{f}_g^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{gx}}{\partial x} & \frac{\partial f_{gy}}{\partial x} & \frac{\partial f_{gz}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{gx}}{\partial y} & \frac{\partial f_{gy}}{\partial y} & \frac{\partial f_{gz}}{\partial y} \\ \frac{\partial f_{gx}}{\partial z} & \frac{\partial f_{gy}}{\partial z} & \frac{\partial f_{gz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{f}_g = [f_{gx} \ f_{gy} \ f_{gz}]^T$ بردار گرانی می‌باشد. همانطور که در رابطه فوق دیده می‌شود، اجزای این ماتریس یا به عبارتی این تانسور، مشتقات میدان پتانسیل جاذبه می‌باشد و از آنجایی که میدان جاذبه یک میدان غیر دورانی است، روابط زیر نیز برای آن حاکم خواهند بود [۱۲]:

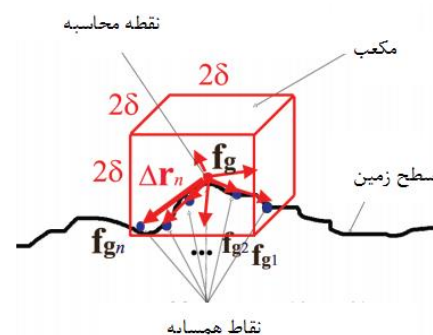
$$\frac{\partial f_{gy}}{\partial x} = \frac{\partial f_{gx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_{gz}}{\partial x} = \frac{\partial f_{gx}}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_{gz}}{\partial y} = \frac{\partial f_{gy}}{\partial z} \quad (2)$$

با مقایسه ی معادلات (۱) و جاگذاری آن در رابطه ی (۲) می‌توان نتیجه گرفت که تانسور گرادیان گرانی یک ماتریس متقارن است.

حال رابطه دیفرانسیلی زیر بین کمیت‌های دیفرانسیلی بردار گرانی و بردار مکان را در نظر بگیرید:

$$d\mathbf{f}_g = \mathbf{\Gamma} d\mathbf{r} \quad (5)$$

به نحوی که $d\mathbf{f}_g = [df_{gx} \ df_{gy} \ df_{gz}]^T$ و $d\mathbf{r} = [dx \ dy \ dz]^T$ به ترتیب کمیت‌های دیفرانسیلی بردار گرانی و بردار مکان می‌باشند. در رابطه (5) می‌بینیم که مفهوم مشتق (در اینجا تانسور گرانی) بین دیفرانسیل بردار مکان و دیفرانسیل بردار گرانی یک ارتباط ایجاد می‌نماید که در عمل و واقعیت مفهوم دیفرانسیل بردار گرانی چیزی جز تغییرات آن نخواهد بود.



شکل ۱- بردار گرانی مشاهده شده در نقطه‌ی محاسباتی و نقاط همسایه‌ی آن

از این رو همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{d\mathbf{f}_g}{dr} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{dr} \quad (6)$$

به نحوی که

$$\mathbf{u}_{dr} = \frac{d\mathbf{r}}{dr} \quad (7)$$

و به علاوه

$$dr = ||d\mathbf{r}|| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (8)$$

همچنین در صورتیکه Δr به سمت صفر کند معادله‌ی (8) به صورت ذیل برقرار خواهد بود:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0^+} \frac{\Delta \mathbf{f}_g}{\Delta r} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{\Delta r} = 0 \quad (9)$$

در حالیکه

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r} - \mathbf{r} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T \\ \Delta r &= ||\Delta \mathbf{r}|| \\ \Delta \mathbf{f}_g &= \mathbf{f}_g(\mathbf{r}) - \mathbf{f}_g(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_{\Delta r} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r}$$

بنابراین رابطه‌ی (10) نشان می‌دهد که به ازای هر

$\epsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\forall \mathbf{r} \in \text{Cube}(\mathbf{r}, \delta), \quad ||\Delta \mathbf{f}_g - \mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{r}|| < \epsilon \Delta r \quad (11)$$

این بدان معنی است که به ازای هر $\epsilon > 0$

یک مکعب همسایگی مانند: $\text{Cube}(\mathbf{r}, \delta)$ وجود دارد که هر نقطه در آن در معادله‌ی (11) صدق می‌کند.

پس خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{f}_g = \mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{r} + \mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r}) \quad (12)$$

در این رابطه، بردار $\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r})$ خطای مدل یا

خطای گسسته سازی نامیده می‌شود که نرُم (اندازه) آن

از $\epsilon \Delta r$ کمتر خواهد بود. بنابراین، اگر $\Delta r \rightarrow 0^+$

آنگاه $||\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r})|| / \Delta r \rightarrow 0$ پس رابطه‌ی (12) که

به نحوی فرم گسسته‌ی رابطه‌ی (11) محسوب می‌شود،

به صورت ذیل تبدیل می‌گردد:

$$\Delta \mathbf{f}_g = \mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{r} + o(\Delta r) \quad (13)$$

چنانکه درباره‌ی خطای مدل $\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r})$ اطلاعاتی

وجود نداشته و نرُم آن نیز در محدوده‌ی خطاهای

تصادفی باشد، آنگاه می‌توان خطای مدل و سایر خطاهای

تصادفی را با یکدیگر در فرآیند حل مسئله، پالایش

(Filtering) نمود. همچنین، در عمل، رابطه‌ی فوق

می‌تواند به ازای هر $\mathbf{r} \in \text{Cube}(\mathbf{r}, \delta)$ به صورت زیر

تقریب زده شود:

$$\Delta \mathbf{f}_g \approx \mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{r} \quad (14)$$

رابطه (5) با استفاده از مفاهیم حد و مشتق طی روابط

(6) الی (13) به فرم گسسته‌ی آن یعنی رابطه (14)

تبدیل می‌گردد. رابطه (14) به زبان ساده نشان می‌دهد

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{R} \Delta \mathbf{R}^{-1} \quad (20)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ یک ماتریس همانی می‌باشد. رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که ماتریس $\Delta \mathbf{R}^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ یک ماتریس راست-معکوس برای ماتریس $\Delta \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$ محسوب می‌گردد. بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۲۰) تانسور گرادیان گرانی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\Gamma = \Delta \mathbf{F}_g \Delta \mathbf{R}_r^{-1} - \mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{R}) \Delta \mathbf{R}_r^{-1} \quad (21)$$

در نظر داشته باشیم که ماتریس $-\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{R}) \Delta \mathbf{R}_r^{-1}$ نتیجه اثر خطای مدل بر روی تانسور برآورد شده است. از آنجائیکه ماتریس $\Delta \mathbf{R}$ یک ماتریس با رتبه کامل می‌باشد، ماتریس راست-معکوس $\Delta \mathbf{R}_r^{-1}$ می‌تواند به صورت زیر انتخاب شود:

$$\Delta \mathbf{R}^+ = \Delta \mathbf{R}^T (\Delta \mathbf{R} \Delta \mathbf{R}^T)^{-1} \quad (22)$$

که در واقع ماتریس فوق، شبه-معکوس (Pseudo-inverse) ماتریس $\Delta \mathbf{R}$ نیز محسوب می‌گردد. نهایتاً بنا بر رابطه‌های (۲۰)، (۲۱) و (۲۲)، تانسور گرادیان گرانی طبق معادله‌ی ذیل تخمین زده می‌شود:

$$\Gamma \approx \Delta \mathbf{F}_g \Delta \mathbf{R}^+ \quad (23)$$

۳- مطالعه موردی

منطقه مورد مطالعه در این تحقیق منطقه‌ی فارس ساحلی می‌باشد. این منطقه از نظر جغرافیایی، با مساحتی حدود ۱۰۰۰۰ کیلومتر مربع در جنوب ایران و در سواحل غربی شهر بندرعباس و در شمال جزایر ایرانی قشم و لاوان واقع شده است. این گستره از غرب به چهاوز، و از شرق به بندرخمیر و بندرعباس محدود می‌شود. مرز جنوبی آن، امتداد سواحل خلیج فارس و مرز شمالی آن به قسمت‌های مرتفع تر زاگرس محدود می‌شود. منطقه مورد مطالعه در سامانه‌ی مختصات‌ی ژئودتیک WGS-84 در بازه‌ی طول جغرافیایی ۵۳/۴۱ تا ۵۵/۵۸ و در بازه‌ی عرض جغرافیایی ۲۶/۵ تا ۲۷/۲۷ درجه واقع شده است و در سیستم تصویر مرکاتور جهانی (UTM) نیز، در پهنه‌های (Zones) ۳۹ و ۴۰ قرار دارد.

که اختلاف بردار جاذبه دو نقطه نزدیک به یکدیگر (که این نزدیکی با همسایگی تعریف می‌شود) با ضرب تانسور جاذبه در اختلاف بردار مکان بین دو نقطه تقریب زده می‌شود. این مفهوم ساده در اینجا اساس گسسته‌سازی را تشکیل داده است.

پس، برای N نقطه‌ی همسایه که در همسایگی نقطه محاسباتی قرار دارند، داریم:

$$\Delta \mathbf{f}_{gn} = \Gamma \Delta \mathbf{r}_n + \mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r}_n) \quad n=1,2,\dots,N \quad (15)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_n &= \mathbf{r}_n - \mathbf{r} \\ \Delta \mathbf{f}_{gn} &= \mathbf{f}_{gn} - \mathbf{f}_g \end{aligned} \quad (16)$$

حال، ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta \mathbf{F}_g = [\Delta \mathbf{f}_{g1} \quad \Delta \mathbf{f}_{g2} \quad \dots \quad \Delta \mathbf{f}_{gN}] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{R} = [\Delta \mathbf{r}_1 \quad \Delta \mathbf{r}_2 \quad \dots \quad \Delta \mathbf{r}_N] \in \mathbb{R}^{3 \times N}$$

$$\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{R}) = [\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r}_1) \quad \mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r}_2) \quad \dots \quad \mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r}_N)] \in \mathbb{R}^{3 \times N}$$

در روابط فوق می‌بینیم که، بردارهای $\{\Delta \mathbf{f}_{gn}\}$ ، $\{\Delta \mathbf{r}_n\}$ و $\{\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{r}_n)\}$ به ازای مقادیر $n=1,2,\dots,N$ به ترتیب ستون‌های ماتریس‌های $\Delta \mathbf{F}_g$ ، $\Delta \mathbf{R}$ و $\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{R})$ می‌باشند. پس بین ماتریس‌های تعریف شده‌ی فوق، معادله‌ی (۱۷) بشکل زیر برقرار است:

$$\Delta \mathbf{F}_g = \Gamma \Delta \mathbf{R} + \mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{R}) \quad (18)$$

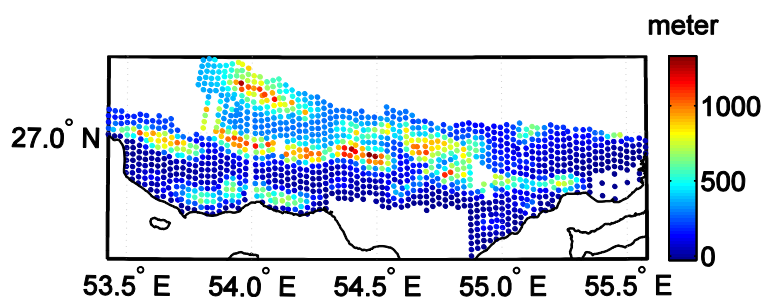
و همانند رابطه‌ی (۱۷) با نادیده گرفتن خطای مدل $\mathbf{e}_{MDL}(\Delta \mathbf{R})$ در رابطه‌ی فوق، تقریب زیر برقرار خواهد بود:

$$\Delta \mathbf{F}_g \approx \Gamma \Delta \mathbf{R} \quad (19)$$

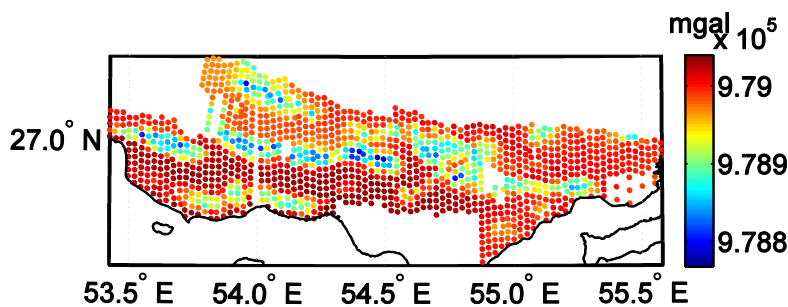
همانگونه که پیشتر ذکر گردید، در اینجا فرض بر این است که نقاط همسایه به صورت سه‌بعدی در فضای اطراف نقطه محاسباتی پراکنده شده باشند و این فرض موجب می‌شود که ماتریس $\Delta \mathbf{R}$ در رابطه‌ی (۱۹) یک ماتریس با رتبه کامل (Full rank) باشد. پس یک ماتریس با رتبه کامل دیگر مانند $\Delta \mathbf{R}^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ وجود دارد به نحوی که

حدود ۸۵۰۰ کیلومتر مربع (۸۵٪) از منطقه در نواحی ناهموار کوهستانی و حدود ۱۵۰۰ کیلومتر مربع (۱۵٪) از منطقه در مناطق هموار ساحلی داده برداری شده است. شکل ۲ توزیع ارتفاعی نقاط داده برداری شده در منطقه فارس ساحلی را نمایش می‌دهد.

داده‌های ثقلی منطقه فارس ساحلی مشتمل بر ۶۳۵۰ ایستگاه گرانی سنجی می‌باشد. فاصله‌ی تقریبی خطوط برداشت در این پروژه، ۱/۵ تا ۲/۵ کیلومتر و فاصله‌ی نقاط روی هر خط پیمایش نیز تقریباً ۵۰۰ الی ۱۰۰۰ متر می‌باشد. تعداد خطوط پیمایش در این داده‌برداری نیز ۹۳ خط بوده که در طول منطقه دارای اندازه‌های متفاوت‌اند و تقریباً همه‌ی آنها با راستای شمال جغرافیایی، آزیموت صفر درجه می‌سازند. شکل ۳ توزیع مکانی شتاب ثقل برداشت شده را در محدوده منطقه مورد مطالعه نمایش می‌دهند.



شکل ۲- توزیع ارتفاعی ایستگاههای داده‌برداری شده در منطقه فارس ساحلی



شکل ۳- توزیع شتاب ثقل برداشت شده در ۶۳۵۰ ایستگاه ثقلی در منطقه فارس ساحلی

پیش از استفاده از داده‌های واقعی منطقه فارس ساحلی در امر برآورد تانسور گرادیان گرانی به روش پیشنهادی این تحقیق، لازم است که برای بررسی و آزمایش عددی روش پیشنهادی، یک شبیه‌سازی در منطقه مورد مطالعه انجام پذیرد. بدین منظور، از مدل ژئوپتانسیل جاذبی جهانی (EGM-2008) استفاده گردیده است. ابتدا بردار شتاب گرانی با استفاده از مدل ژئوپتانسیل (EGM-2008) با درجه و مرتبه‌های مختلف محاسبه می‌گردد و سپس با استفاده از این بردار و روش تفاضل محدود، تانسور گرادیان گرانی برآورد می‌شود. اگر تانسور گرادیان گرانی بدست آمده با استفاده از روش تفاضل محدود با تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از مدل ژئوپتانسیل و نتایج حاصل از این دو روش به یکدیگر نزدیک باشند، می‌توان روش پیشنهادی را روش قابل قبولی دانست.

۳-۱- تعیین تانسور گرادیان گرانی با استفاده از ضرایب هارمونیک میدان گرانی

مدل گرانی جهانی EGM2008 مدلی است مشتمل بر ضرایب هارمونیک کروی میدان گرانی زمین تا درجه ۲۱۹۰ و مرتبه ۲۱۵۹ که توسط پاولیس و همکاران (۲۰۱۲ و ۲۰۱۳) تهیه شده است [۱۶ و ۱۷]. در برآورد ضرایب هارمونیک کروی این مدل از انواع مشاهدات گرانی زمینی، هوایی و مشاهدات ماهواره‌ای GRACE و مدل

های رقومی زمین و مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای بهره گرفته شده است [۱۶ و ۱۷].

این مدل به عنوان یک میدان گرانی مرجع در ژئودزی کاربردهای متنوعی دارد. یکی از کاربردهای مدل جاذبی جهانی EGM2008 استفاده از آن بعنوان مرجعی جهت مدل‌سازی و تعیین تانسور گرادیان گرانی است. با استفاده از مدل EGM2008 تابع پتانسیل گرانش V در یک نقطه با مختصات (r, θ, λ) بصورت زیر تعریف می‌شود:

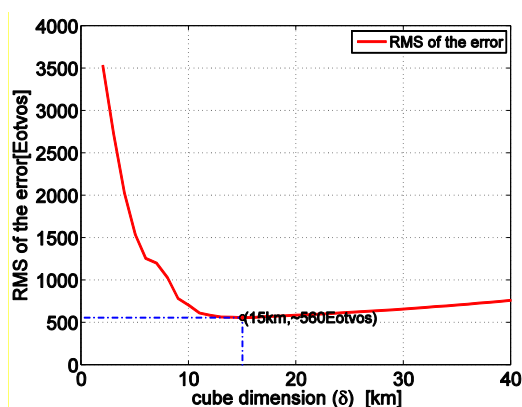
$$\frac{\partial^2 V^{EGM}}{\partial z^2} = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial r^2} \right) \quad (30)$$

که در روابط بالا V_{nm} بصورت معادله‌ی (۳۱) تعریف می‌شود:

$$(31)$$

$$V_{nm} = \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

همانطور که در بخش ۳ توضیح داده‌شد، در برآورد تانسور گرادیان گرانی با استفاده از روش تفاضل محدود، ابعاد مکعب همسایگی که به مرکز نقطه محاسباتی قرار می‌گیرد و محاسبات با توجه به آن انجام می‌گیرند، از اهمیت بالایی برخوردار است. برای پیدا کردن بهترین شعاع همسایگی در منطقه مورد مطالعه، تانسور گرادیان گرانی برآورد شده با استفاده از روش تفاضل محدود با شعاع‌های همسایگی مختلف (از ۲ تا ۲۰ کیلومتر) با تانسور گرادیان گرانی برآورد شده با مشتق‌گیری مستقیم از مدل ژئوپتانسیل، مقایسه شد. شکل ۴ RMS خطای برآورد تانسور گرادیان گرانی را حاصل از مقایسه‌ی بین دو روش برای شعاع‌های همسایگی مختلف نمایش می‌دهد.



شکل ۴- مقدار RMS خطای برآورد تانسور گرادیان حاصل از مقایسه تانسور برآورد شده از روش تفاضل محدود و محاسبه مستقیم تانسور از ضرایب هارمونیک کروی مدل ژئوپتانسیل

همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، بهینه‌ترین شعاع همسایگی در این روش، شعاع ۱۵ کیلومتری می‌باشد که کمترین مقدار RMS خطاها را ارائه می‌دهد. از این شعاع همسایگی بهینه برای مقایسه تانسور برآورد شده در تمامی ایستگاهها با مقدار بدست آمده آن از معادلات مستقیم مشروحه فوق با درجات مختلف استفاده گردیده است. شکل ۵ RMS حاصل از این مقایسه را برای هریک از المان‌های تانسور گرادیان گرانی بر حسب درجات مختلف

$$(24)$$

$$V^{EGM}(r, \theta, \lambda) =$$

$$\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

که در رابطه‌ی بالا G ثابت جهانی گرانی، M جرم زمین، R شعاع متوسط زمین، C_{nm} و S_{nm} ضرایب هارمونیک‌های کروی که از مدل EGM2008 بدست می‌آیند و $\bar{P}_{nm}$ تابع لژاندر می‌باشند. همچنین k درجه مدل EGM2008 می‌باشد که در این مدل می‌تواند تا درجه ۲۱۹۰، جایگذاری شود. با توجه به تعریف تانسور گرادیان گرانی که مشتقات مرتبه دوم تابع پتانسیل گرانی می‌باشد، می‌توان با مشتق‌گیری از معادله‌ی (۲۴) در جهات مختلف به صورت ذیل و همچنین در نظر گرفتن اثر گریز از مرکز، اجزای تانسور گرادیان گرانی را بدست آورد [۱۳] (در این روابط محور x در جهت شرق، محور y در جهت شمال و محور z نیز در قائم می‌باشد):

$$(25)$$

$$\frac{\partial^2 V^{EGM}}{\partial x^2} =$$

$$\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V_{nm}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{nm}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial \lambda^2} \right)$$

$$(26)$$

$$\frac{\partial^2 V^{EGM}}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{-\cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_{nm}}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial \theta \partial \lambda} \right)$$

$$(27)$$

$$\frac{\partial^2 V^{EGM}}{\partial x \partial z} =$$

$$\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{-1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_{nm}}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial \lambda \partial r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 V^{EGM}}{\partial y^2} =$$

$$(28)$$

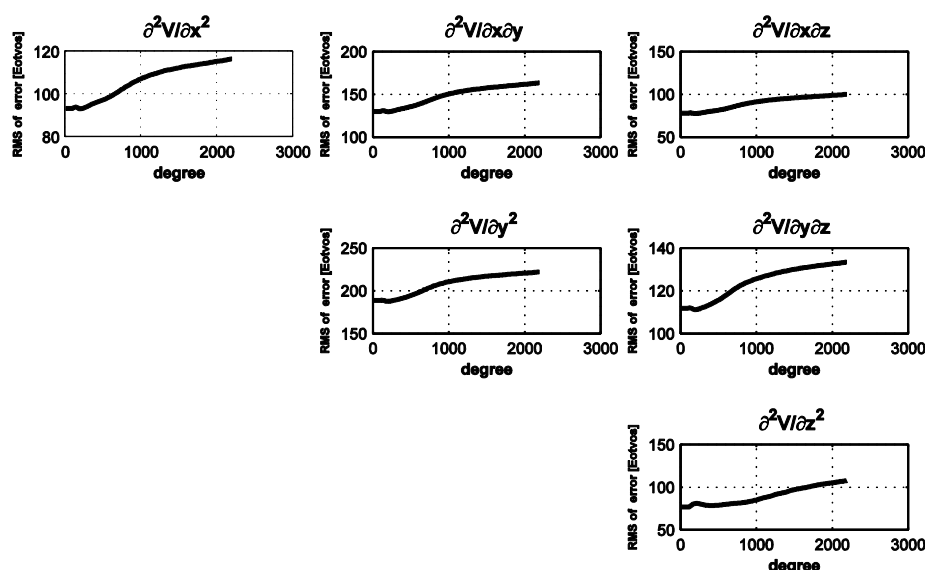
$$\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_{nm}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 V^{EGM}}{\partial y \partial z} =$$

$$(29)$$

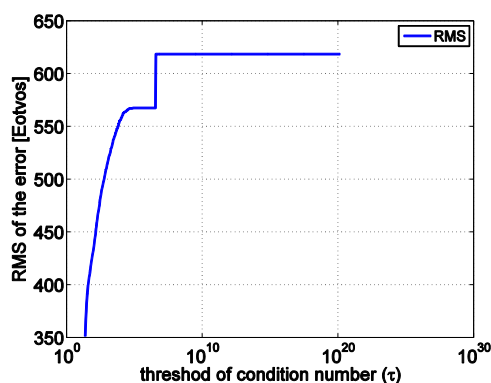
$$\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^k \sum_{m=0}^n \left(\frac{-1}{r^2} \frac{\partial V_{nm}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial \theta \partial r} \right)$$

نمایش می‌دهد. همانگونه که در شکل ۵ دیده می‌شود RMS خطاها با افزایش درجه مدل افزایش می‌یابد.



شکل ۵- نمایش RMS خطاها در مؤلفه‌های مختلف تانسور گرادیان گرانی به ازای درجات مختلف مدل ژئوپتانسیل

به ترتیب نمودارهای RMS خطا و تعداد نقاط حذف شده را برحسب کران بالای عدد شرط نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل ۷ می‌بینیم انتخاب یک مقدار کمینه برای کران بالای عدد شرط در ایستگاهها سبب کاهش RMS خطا و متعاقباً افزایش دقت می‌گردد. در صورتی که همانگونه که از شکل ۸ پیداست با کوچک گرفتن کران بالای عدد شرط، تعداد زیادی از ایستگاهها حذف خواهند گردید. انتخاب بهینه یک مقدار انتخابی برای کران بالای عدد شرط بایست به نحوی باشد که دقت مناسب را در بسیاری از ایستگاهها ارائه دهد. شکل ۹ نمودار منحنی-ال مذکور حاصل از ترسیم RMS خطا نسبت به تعداد نقاط حذف شده را نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل پیداست مقدار بهینه ۹۸.۸ در گوشه منحنی-ال قرار دارد.



شکل ۷- نمودار خطای RMS به ازای عدد شرطهای مختلف، همانطور که ملاحظه می‌شود، هرچه کران عدد شرط کوچکتر می‌شود، میزان خطا کمتر می‌شود.

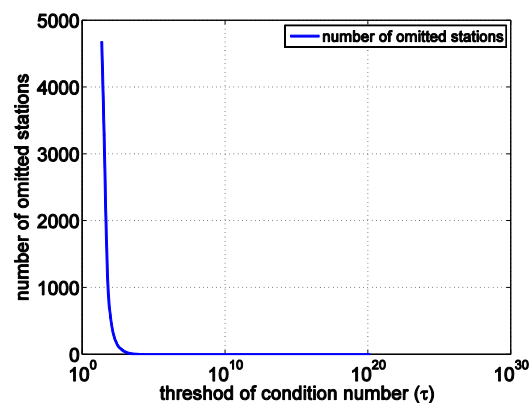
از طرف دیگر، یکی از مواردی که باید در روش تفاضل محدود مورد توجه قرار گیرد، خوش وضع (full-rank) بودن ماتریس حاصل از معادلات تفاضل محدود یعنی ΔR برای هر نقطه می‌باشد. زیرا که در غیر این صورت مؤلفه‌های ارتفاعی تانسور گرادیان گرانی (یعنی Γ_{xz} ، Γ_{yz} و Γ_{zz}) نمی‌توانند با دقت و صحت مناسبی برآورد شوند.

برای رفع این مشکل، بهتر است که از روش تفاضل محدود پیشنهادی بر روی نقاطی استفاده شود که ماتریس ΔR در آن نقاط دارای وضعیت مناسب از نظر رتبه و عدد شرط (condition number) باشد. بنابراین، پیشنهاد این است که قید خوش وضعی (well-posedness) یا خوش‌شرایطی (well conditioning) ماتریس ΔR به مسئله اضافه شود. از این رو در بین ایستگاههای جاذبی این مطالعه موردی، مقایسه‌هایی با عدد شرطهای (condition number) مختلف انجام پذیرفت. در اینجا ماتریسهای اختلاف فاصله‌ای که عدد شرط آنها کوچکتر و یا مساوی ۹۸.۸ بود برای انجام محاسبات انتخاب شدند. لازم به ذکر است که عدد شرط ۹۸.۸ مقدار بهینه‌ای است که از روش منحنی-ال بدست آمده است. در اینجا هدف آن بوده است که مقدار بهینه عدد شرط به نحوی اختیار گردد که به طور همزمان RMS خطاها و تعداد نقاط حذف شده را به حداقل برساند. بدین منظور از روش تعیین پارامتر منحنی-ال (هانس و لیری (۱۹۹۳) [۱۸]) جهت یافتن بهینه مقدار کران بالای عدد شرط استفاده شده است. شکل‌های ۷ و ۸

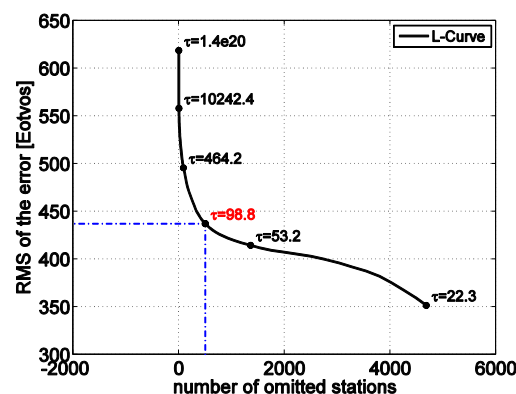
به نسبت مولفه قائم Γ_{zz} با دقت مناسبتری برآورد گردیده اند.

جدول ۱ نیز مقدار متوسط مولفه‌های برآورد شده و RMS خطای آنها را ارائه نموده است. در این جدول نسبت مقدار متوسط هر یک از مولفه‌ها به مقدار RMS خطای آن به عنوان نسبت سیگنال به نویز (SNR) در نظر گرفته شده است. همانگونه که از این جدول پیداست نسبت سیگنال به نویز برای مولفه‌های قطری تانسور در مقایسه با سایر مولفه‌ها به طور قابل توجهی بزرگ می‌باشد که این امر نشان از توانایی روش در برآورد مولفه‌های قطری تانسور می‌باشد. جدول ۱ نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین مقادیر سیگنال به نویز (SNR) به ترتیب مربوط به مولفه‌های Γ_{xx} و Γ_{xz} می‌باشد. از این رو، با توجه به نسبت سیگنال به نویز، روش پیشنهادی مناسبترین برآورد را برای مولفه Γ_{xx} و نامناسبترین برآورد را برای مولفه Γ_{xz} انجام داده است.

در نهایت با استفاده از داده‌های گرانی برداشت شده در منطقه‌ی فارس ساحلی و با استفاده از روش تفاضل محدود، تانسور گرادیان گرانی در منطقه مورد مطالعه بدست آمد. شکل ۱۳ توزیع مکانی مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی در منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در مطالعه موردی انجام پذیرفته مشاهدات جذبی برداشت شده تنها اندازه شتاب ثقل بوده و جهت بردار ثقل با استفاده از مدل جهانی در هر ایستگاه ثقلی بدست آمده است و پس از حصول بردارهای شتاب ثقل در تمامی ایستگاهها روش تفاضل محدود پیشنهادی به تمامی آنها اعمال گردیده است.

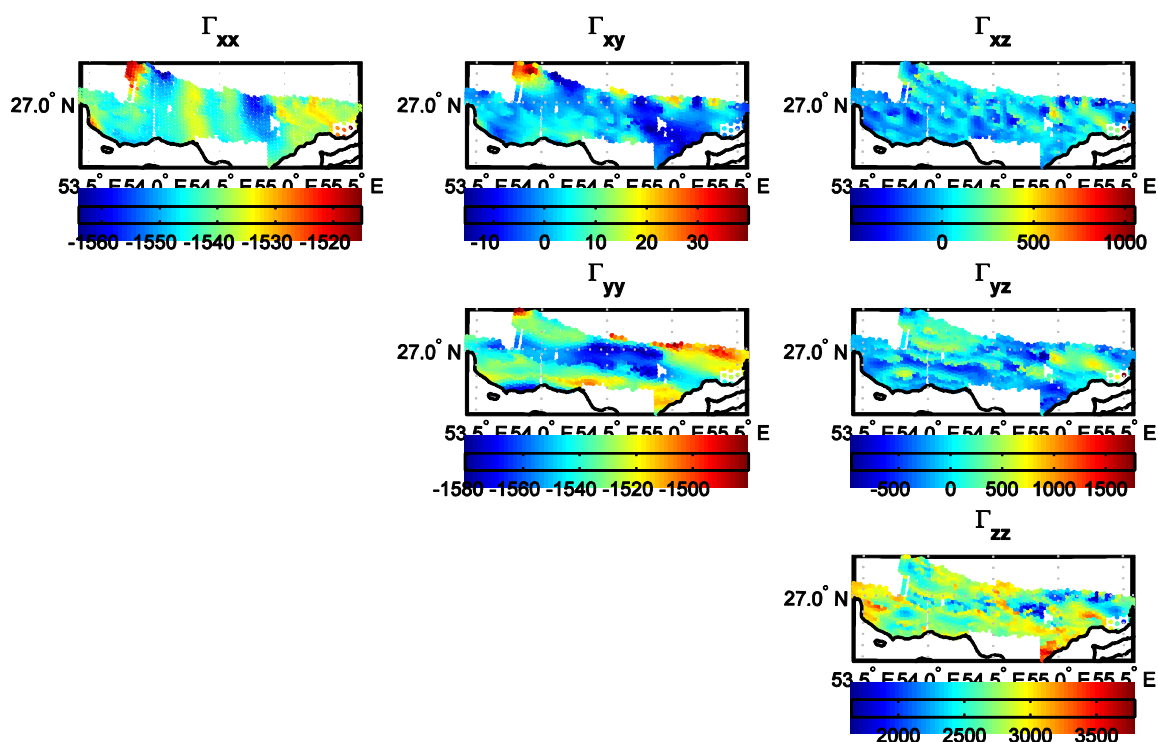


شکل ۸- نمودار تعداد نقاط در نظر گرفته نشده (نقاطی که در شرط خوش وضعی صدق نمی‌کنند) بر حسب عدد شرط‌های مختلف: در این شکل می‌بینیم که با کم شدن کران بالای عدد شرط، نقاط بیشتری از محاسبه خارج می‌شوند.

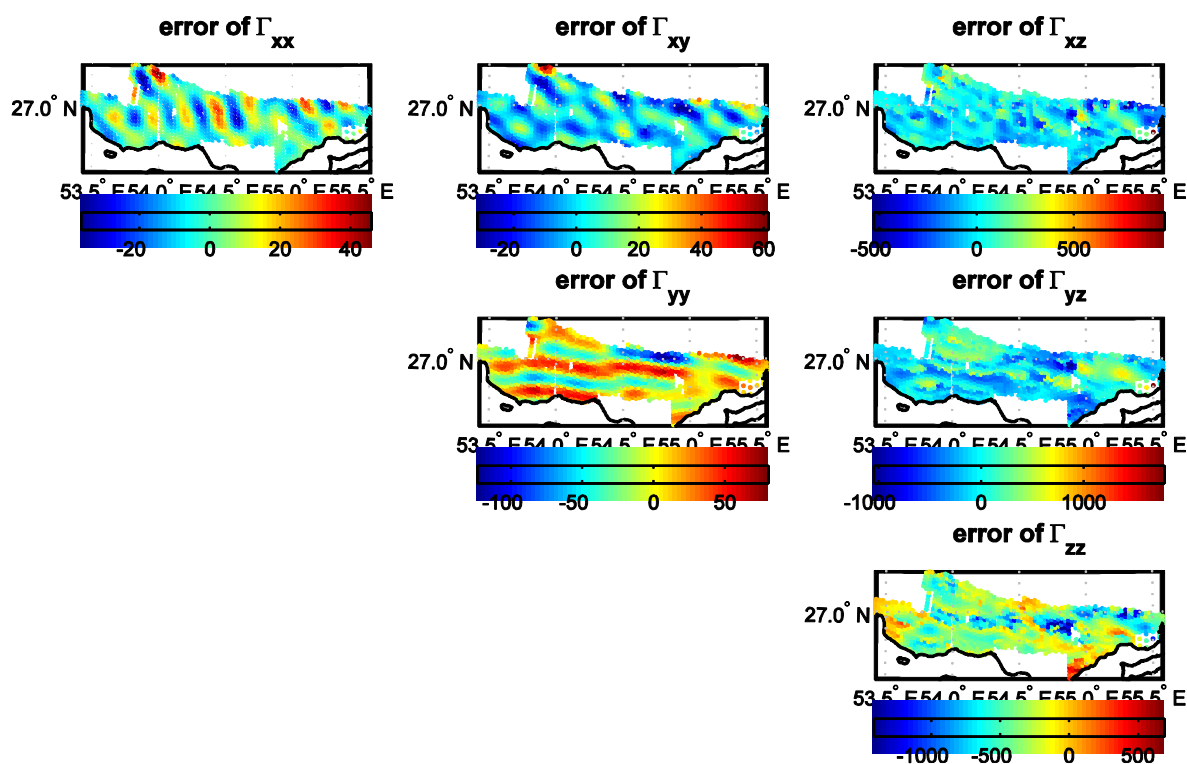


شکل ۹- نمودار منحنی -L حاصل از ترسیم RMS خطا نسبت به تعداد نقاط در نظر گرفته نشده

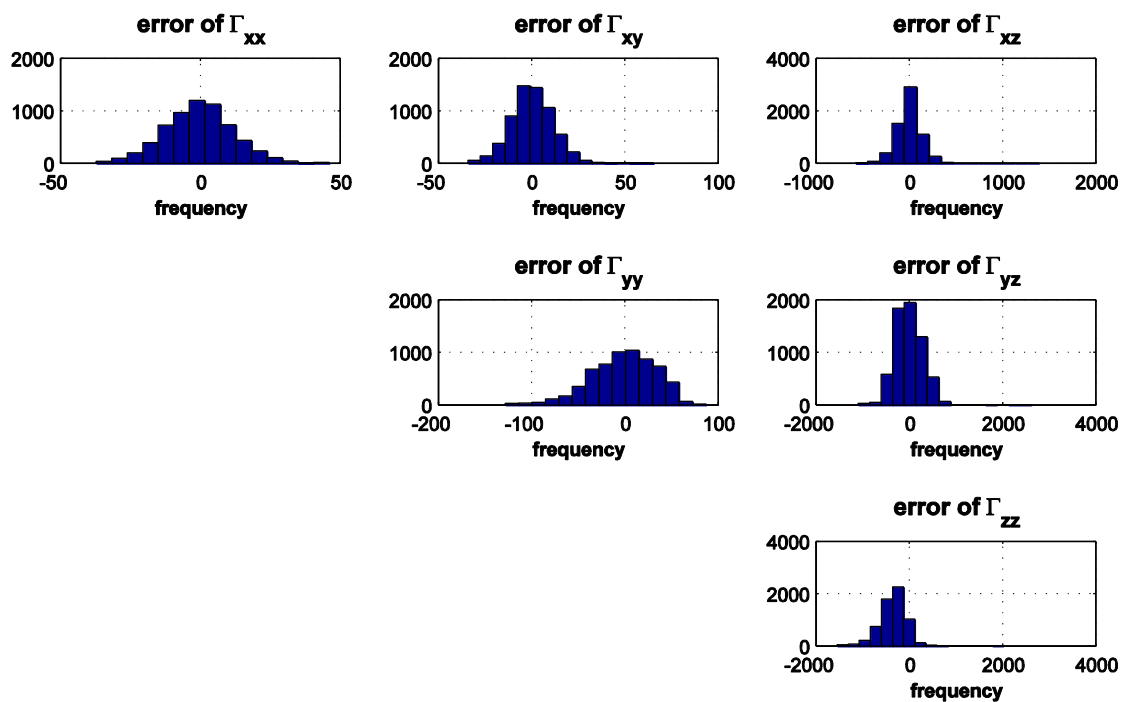
در این مطالعه موردی با در نظر گرفتن کران بالای عدد شرط برابر با ۹۸،۸، تانسور گرادیان گرانی در ۵۸۴۹ ایستگاه یعنی بیش از ۹۲ درصد کل ایستگاهها با RMS خطا برابر با ۴۳۷ اتووش بدست می‌آید. شکل ۱۰ توزیع مکانی تانسور گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود در شبیه‌سازی انجام پذیرفته را نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب توزیع مکانی و هیستوگرامهای خطای مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی حاصل از تفاضل تانسور بدست آمده از روش تفاضل محدود با تانسور بدست آمده از مدل ژئوپتانسیل در ۵۸۴۹ ایستگاه مذکور را نشان می‌دهد. این اشکال نشان می‌دهد که روش تفاضل محدود پیشنهادی در برآورد مولفه‌های قطری تانسور گرادیان (یعنی Γ_{xx} ، Γ_{yy} و Γ_{zz}) به نسبت مولفه‌های خارج قطر اصلی تانسور (یعنی Γ_{xy} ، Γ_{xz} و Γ_{yz}) بهتر عمل نموده است. همچنین شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهد که مولفه‌های افقی Γ_{xx} و Γ_{yy}



شکل ۱۰- توزیع مکانی مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود در شبیه‌سازی انجام پذیرفته (واحد: اتووش)



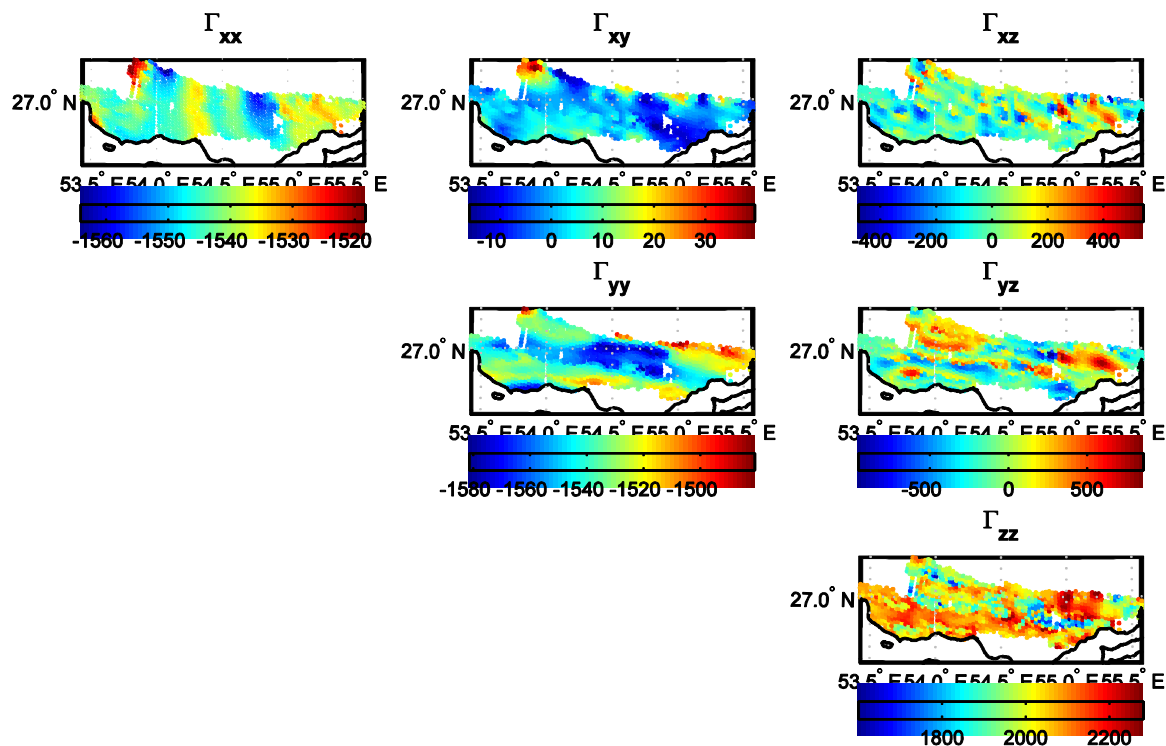
شکل ۱۱- توزیع مکانی خطای مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود (واحد: اتووش)



شکل ۱۲- هیستوگرامهای خطای مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود (واحد: اتووش)

جدول ۱- SNR مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود در شبیه‌سازی انجام پذیرفته (واحد: اتووش)

مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی	Γ_{xx}	Γ_{yy}	Γ_{zz}	Γ_{xy}	Γ_{xz}	Γ_{yz}
متوسط	-1542.23	-1539.06	2713.51	1.5	-5.64	-24.65
RMS خطا	12.46	34.49	454.82	11.85	128.38	283.41
SNR	123.75	44.63	5.97	0.13	0.04	0.09



شکل ۱۳- توزیع مکانی مؤلفه‌های تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود در منطقه مورد مطالعه (واحد: اتووش)

۴- بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق سعی گردید تا به معرفی و تحلیل روش تفاضل محدود در برآورد تانسور گرادیان گرانی پرداخته شود. از این رو جهت برآورد تانسور گرانی، روابط و فرمولهای ریاضی بر پایه روش تفاضل محدود و مفاهیم تانسور گرانی تولید و ارائه گردید.

سپس در یک مطالعه موردی روابط و معادلات پیشنهادی مورد آزمایش و کاربرد قرار گرفت. بدین منظور ابتدا یک شبیه‌سازی بر اساس مدل ژئوپتانسیلی EGM2008 صورت پذیرفت و تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از روش تفاضل محدود با تانسور گرادیان گرانی بدست آمده از مدل ژئوپتانسیل مقایسه شد. مقایسه‌های انجام پذیرفته روش تفاضل محدود پیشنهاد شده را از نقطه نظر صحت تایید نمود. پس از انجام شبیه‌سازی و تایید عددی روش پیشنهادی، از این روش جهت استخراج اطلاعات تانسوری

در ۵۸۴۹ ایستگاه ثقلی در منطقه فارس ساحلی استفاده گردید (شکل ۱۳).

در انتها، با توجه به مفاهیم تئوریک مطرح شده در این مقاله، می‌توان گفت از آن رو که روش تفاضل محدود جهت برآورد مشتقات گرانی (به عبارتی تانسور گرانی) مستقیماً از مفهوم مشتق و تفاضل استفاده می‌نماید، انتظار می‌رود این روش، برآورد صحیحی از تانسور گرانی را ارائه نماید؛ همانگونه که این انتظار در شبیه‌سازی انجام پذیرفته به وقوع پیوست. در عین حال که دقت این روش به فاصله نمونه برداری (به عبارتی فاصله ایستگاههای ثقلی) بسیار وابسته بوده و با کاهش فاصله بین ایستگاهها دقت این روش نیز افزایش می‌یابد. همچنین نتایج عددی این تحقیق در برخی ایستگاههای فارس ساحلی نشان داد که با داشتن یک توزیع مکانی مناسب از مشاهدات ثقلی در اطراف هر ایستگاه، امکان برآورد مولفه‌های تانسور با دقت های مناسب فراهم می‌گردد.

مراجع

- [1] S. Hammond and C. Murphy, "Air-FTG™: Bell Geospace's airborne gravity gradiometer, a description and case study," ASEG Preview, vol. 105, pp. 24-26, 2003.
- [2] M. Beiki and L. B. Pedersen, "Eigenvector analysis of gravity gradient tensor to locate geologic bodies," Geophysics, vol. 75, pp. 137-149, 2010.
- [3] L. Pedersen and T. Rasmussen, "The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps," Geophysics, vol. 55, pp. 1558-1566, 1990.
- [4] D. K. Butler, "Microgravimetric and gravity gradient techniques for detection of subsurface cavities," Geophysics, vol. 49, pp. 1084-1096, 1984.
- [5] C. Zhang, M. F. Mushayandebvu, A. B. Reid, J. D. Fairhead, and M. E. Odegard, "Euler deconvolution of gravity tensor gradient data," Geophysics, vol. 65, pp. 512-520, 2000.
- [6] C. Affleck and A. Jircitano, "Passive gravity gradiometer navigation system," in Position Location and Navigation Symposium, 1990. Record. The 1990's-A Decade of Excellence in the Navigation Sciences. IEEE PLANS'90., IEEE, 1990, pp. 60-66.
- [7] L. Bod, E. Fischbach, G. Marx, and M. Náray-Ziegler, "One hundred years of the Eötvös experiment," Acta Physica Hungarica, vol. 69, pp. 335-355, 1991.
- [8] B. Geospace, "Final report of acquisition and processing on Air-FTG survey in Parkfield earthquake experiment area, September 2004," Rice University, Houston, Texas, 2004.
- [9] B. Agarwal and T. Lal, "A generalized method of computing second derivative of gravity field," Geophysical Prospecting, vol. 20, pp. 385-394, 1972.
- [10] P. Gunn, "Linear Transformations of Gravity and Magnetic FIELDS*," Geophysical Prospecting, vol. 23, pp. 300-312, 1975.
- [11] K. L. Mickus and J. H. Hinojosa, "The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a Fourier transform technique," Journal of Applied Geophysics, vol. 46, pp. 159-174, 2001.
- [12] M. Roth, "Marine full tensor gravity gradiometry data analysis and Euler deconvolution," 2009.
- [13] L. Zhu, "Gradient modelling with gravity and DEM," The Ohio State University, 2007.

- [14] C. G. Farquharson, "Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversions," *Geophysics*, vol. 73, pp. K1-K9, 2007.
- [15] C. Farquharson and C. Mosher, "Three-dimensional modelling of gravity data using finite differences," *Journal of Applied Geophysics*, vol. 68, pp. 417-422, 2009.
- [16] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K. (2012). "The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. Vol. 117, B04406
- [17] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K. (2013). "Correction to "The Development and Evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)"". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. Vol. 118, 2633
- [18] Hansen P. and O'Leary D. (1993). "The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems". *SIAM Journal on Scientific Computing*. Vol. 14, 1487-503