

اثر گرید سازی آنومالی جاذبه بر پایداری مساله انتقال فروسو

مهدي گلي^۱

^۱ استادیار گروه ژئودزی - دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی شاهرود
goli@shahroodut.ac.ir

(تاریخ دریافت تیر ۱۳۹۴، تاریخ تصویب آذر ۱۳۹۴)

چکیده

این مقاله دقت و پایداری مساله انتقال فروسوی آنومالی های نقطه ای و متوسط (گرید شده) در سطح زمین برای محاسبه آنومالی های متوسط را بررسی می کند. برای این منظور، از تقریب صفحه ای معکوس انتگرال پواسن برای انتقال فروسو استفاده شده است. از آنجایی که مساله انتقال فروسو ذاتا بدوضع است، بررسی بدوضعی و ناپایداری دستگاه معادلات خطی حاصل از بررسی شرط گسسته پیکارد صورت گرفت. نتایج عددی در یک منطقه آزمون کوهستانی با داده های متراکم در آمریکا و یک منطقه آزمون در ایران با داده های پراکنده بدست آمد. نتایج عددی در هر دو منطقه آزمون نشان داد که مساله انتقال فروسو داده های نقطه ای تحت تاثیر نزدیکی داده ها (تجمع نقاط در برخی از مکانها نظیر مسیرهای ترازیابی)، ناپایدار است. در حالی که انتقال فروسوی آنومالی های متوسط ۵ دقیقه مساله ای خوش وضع است. نتایج شبیه سازی شده با مدل EGM08 بیانگر این است که استفاده از داده های گرید شده، علیرغم وجود خطای پیش بینی در نقاط گرید، خطای فروسوی کمتری دارند.

واژگان کلیدی: انتقال فروسو، مسایل بدوضع، پایداری، گرید کردن، آنومالی جاذبه

۱- مقدمه

تعیین ژئوئید با استفاده از داده های جاذبی اندازه گیری شده در سطح زمین نیازمند به انتقال (هارمونیک) فروسوی آنها به سطح ژئوئید/بیضوی است. این مرحله در همه روشهای تعیین ژئوئید اعم از روشهای استوکسی [۱] و روشهای غیر استوکسی نظیر تعیین ژئوئید با یک مرحله انتقال گیری [۲-۴]، تعیین ژئوئید با داده های هوابرد [۵] و تعیین ژئوئید با داده های نجومی و داده های تلفیقی [۶] یک مرحله اساسی و چالش برانگیز است.

از آنجایی که در خشکیها اغلب، ژئوئید در زیر توپوگرافی قرار دارد، مساله جاذبی تعیین ژئوئید به دلیل نیاز به انتقال فروسوی داده ها یک مساله معکوس است [۷]. مسایل معکوس در زمره مسایل بدوضع قرار می گیرند که معمولا با عدم وجود جواب و یا عدم جواب یکه و یا ناپایداری در جواب همراه هستند [۸]. البته این امکان وجود دارد که مسایل در حالت گسسته با تصویر شدن در ابعاد متناهی، خوش وضع و یا درجه بدوضعی آنها کم باشد.

حل معکوس انتقال پواسن مرسوم ترین روش برای انتقال فروسوی داده های گرانی در ژئودزی است. این روش با تقریبات مختلف بارها از سوی محققین مختلف برای انتقال فروسو بمنظور تعیین ژئوئید مورد استفاده قرار گرفته است [۲، ۵، ۶، ۹-۱۴]. بر اساس مطالعه [۱۵] تقریبات مختلف این انتقال اعم از صفحه ای، کروی و بیضوی دقت یکسانی در انتقال فروسو آنومالی های جاذبی ایجاد می کند. این امر ناشی از میرایی سریع کرنل پواسن در فواصل کروی کوتاه است. استفاده از تقریبات مختلف انتقال پواسن برای انتقال فروسو در ارتفاع ژئوئید اختلافاتی کمتر از چند سانتیمتر در مناطق کوهستانی ایجاد می کند [۱۵].

در مطالعه [۱۶] نشان داده شده است که مهم تر از انتخاب تقریبات مختلف، نحوه گسسته سازی معادلات انتقال پواسن است. بطور طبیعی داده های جاذبی در سطح زمین ماهیت نقطه ای دارند. بطوری که مقادیر مشاهده/محاسبه شده منتسب به آن نقطه است. از آنجایی که بیشتر انتقالها در ژئودزی بروش اجزای محدود حل می شوند، آنومالی های جاذبی در سطح ژئوئید نیز باید آنومالی های متوسط (مقدار متوسط اجزا) روی یک شبکه منظم باشند. لذا مدل گسسته سازی انتقال پواسن نقطه-متوسط است. این روش کم وبیش در مطالعات [۱۲، ۱۴، ۲۰،

[۲۱] مورد استفاده بکار رفته است. البته در همه این مطالعات مقادیر مشاهداتی شتاب های جاذبی به مقادیر پتانسیل نقطه ای روی یک شبکه منظم روی ژئوئید/بیضوی در قالب روش تعیین ژئوئید با یک مرحله انتقال گیری، تبدیل می شوند.

در محاسبات ژئودزی فیزیکی استفاده از مقادیر آنومالی های نقطه ای برای ایجاد یک شبکه منظم از آنومالی های جاذبی یک روش مرسوم است [۱۹]. ماهیت آنومالی های پیش بینی/تقریب شده، متوسط هستند. انتقال فروسوی آنومالی های گرید شده و منظم با استراتژی های مختلف در مطالعات [۱۲، ۱۴، ۲۰، ۲۱] بکار رفته است. در هر چهار مطالعه فوق داده های جاذبی در روی سطح زمین روی یک شبکه منظم قرار داشتند.

انتقال فروسو آنومالی های جاذبی مشاهداتی با پراکندگی نامنظم دارای مزایا و معایبی است. از جمله اینکه این روش نیاز به پیش بینی/تقریب آنومالی های جاذبی برای ایجاد یک گرید ندارد. بنابراین خطای پیش بینی آنومالی جاذبی نیز انتقال فروسو وجود نخواهد داشت. اما مهمترین مزیت این روش استفاده مستقیم از مشاهدات است که می توانند حاوی تمامی فرکانس های میدان باشند. در حالی که در ایجاد شبکه منظم اغلب خطای پیش بینی/تقریب به دقت انتقال رو به پایین تحمیل می شود. علاوه بر این بخشی از فرکانس های بالای میدان جاذبه در پروسه متوسط گیری حذف می شود. در مقابل استفاده از داده های پیش بینی شده روی یک گرید منظم دارای مزایایی نیز است. علاوه بر سهولت محاسبات و حجم محاسبات کمتر، با حذف بخشی از فرکانسهای بالای میدان، پایداری مساله بدوضع انتقال فروسو افزایش می یابد.

در این مطالعه پایداری و دقت مساله انتقال فراسو در دو سناریوی ۱- استفاده از نقاط مشاهداتی که در این مطالعه آنرا مدل نقطه-متوسط می نامیم و ۲- استفاده از شبکه منظم که آنرا مدل متوسط-متوسط می نامیم، بررسی می شود. همچنین به مشکلات پیش روی هر دو روش و در نهایت انتخاب روش مناسب برای تعیین ژئوئید، پرداخته می شود.

۲- مدل نقطه-متوسط

در تقریب کروی، انتقال فروسوی آنومالی های جاذبی زمینی به سطح ژئوئید، از حل معکوس انتقال پواسن با معادله زیر انجام می شود [۱۹].

کنترل است. در اغلب موارد دستگاه معادلات (۴)، به یک دستگاه معادلات فرامعین ($n > m$) تبدیل می شوند.

\bar{K}_{ij} متوسط کرنل پواسن روی ژئوئید با حل انتگرال (۳) بدست می آید. این انتگرال در تقریب کروی جواب تحلیلی ندارد و باید بروش عددی حل شود. با این وجود در تقریب صفحه ای این انتگرال دارای جواب تحلیلی است. با معرفی مرکز سلول ژئوئیدی (φ', λ') بعنوان مبدا مختصات کارترین، مختصات نقطه زمینی برابر است با:

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \varphi'), \\ y &= R(\lambda - \lambda') \cos \varphi'. \end{aligned} \quad (۶)$$

در این رابطه (x, y, h) مختصات کارترین نقطه زمینی است. در این حالت انتگرال کرنل پواسن رابطه (۳) برابر است با [۱۶]

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} K(x, y, h, x', y') dx' dy' \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{d^3(x, y, h, x', y')} dx' dy' \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{x' y'}{d h_i} \right|_{-R\Delta\varphi}^{+R\Delta\varphi} \left| \frac{+R\Delta\lambda \cos \varphi'}{-R\Delta\lambda \cos \varphi'} \right| \end{aligned} \quad (۷)$$

در این روابط، $d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + h^2}$ فاصله فضایی بین دو نقطه زمینی و ژئوئیدی است.

۳- مدل متوسط-متوسط

انتقال فرسوی آنومالی های متوسط روی زمین به آنومالی های متوسط روی ژئوئید با دو بار متوسط گیری از کرنل پواسن میسر می شود [۱۴]

$$\bar{\Delta g}(r, \varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi r A} \int_{\sigma_0} \bar{\Delta g}(\varphi', \lambda') \bar{K}(r, \psi, R) dS'. \quad (۸)$$

در این رابطه، $\bar{k}(r, \psi, R)$ کرنل پواسن با دوبرار متوسط گیری (یکبار روی ژئوئید و یکبار روی زمین) و A مساحت سلول زمینی است. در حالت گسسته، معادلات فوق نیز یک دستگاه معادله خطی بفرم $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ تشکیل می دهند. بطوریکه ماتریس A عبارتست از

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad a_{ij} = \frac{R}{4\pi r_i} \bar{K}_{ij} ds_{ij}$$

و

$$\mathbf{x} = [\bar{\Delta g}(R, \varphi_j, \lambda_j)]_{n \times 1}$$

$$\Delta g(r, \varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi r} \int_{\sigma_0} K(r, \psi, R) \Delta g(R, \varphi', \lambda') d\sigma' \quad (۱)$$

در این رابطه $\Delta g(r, \varphi, \lambda)$ آنومالی جاذبه در سطح زمین و معلوم، $K(r, \psi, R) = R \frac{r^2 - R^2}{L^3(r, \psi, R)}$ کرنل پواسن و $\Delta g(R, \varphi', \lambda')$ آنومالی جاذبی در سطح ژئوئید و مجهول است. همچنین $L(r, \psi, R) = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi}$ فاصله فضایی بین نقطه ژئوئید و زمینی، ψ زاویه فاصله کروی، $r = R + H$ شعاع ژئوسنتریک نقطه زمینی و R شعاع متوسط ژئوئید است. تبدیل آنومالیهای جاذبی زمینی به آنومالیهای متوسط $\bar{\Delta g}$ در سطح ژئوئید با انتگرالگیری از کرنل پواسن میسر است [۱۶]:

$$\Delta g(r, \varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi r} \int_{\sigma_0} \bar{K}(r, \psi, R) \bar{\Delta g}(R, \varphi', \lambda') d\sigma' \quad (۲)$$

در این رابطه \bar{K} متوسط کرنل روی سلول ژئوئید، c_j است:

$$\bar{K}(r, \psi, R) = \int_{c_j} K(r, \psi, R) d\sigma \quad (۳)$$

در حالت گسسته، معادلات فوق تشکیل یک دستگاه معادلات خطی به شکل

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} \quad (۴)$$

می دهد. بطوری که

$$\mathbf{b} = [\Delta g(r_i, \varphi_i, \lambda_i)]_{n \times 1}$$

بردار مشاهدات (معلوم) شامل آنومالیهای جاذبی در سطح زمین،

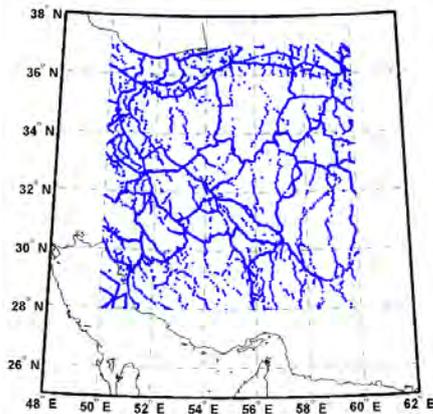
$$\mathbf{x} = [\bar{\Delta g}(R, \varphi_j, \lambda_j)]_{m \times 1}$$

بردار مجهولات شامل آنومالی های متوسط در سطح ژئوئید و ماتریس A نیز به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times m}, \quad a_{ij} = \frac{R}{4\pi r_i} \bar{K}_{ij} ds_j \quad (۵)$$

در این رابطه $ds_j = \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta \lambda$ مساحت سلول ژئوئیدی است. $\Delta \varphi$ و $\Delta \lambda$ ابعاد سلول ژئوئید در راستای طول و عرض ژئودتیکی است. حل دستگاه معادلات خطی (۴) باید تعداد مجهولات کمتر یا مساوی مشاهدات باشد. این امر با انتخاب ابعاد سلول های ژئوئید ($\Delta \varphi$ و $\Delta \lambda$) قابل

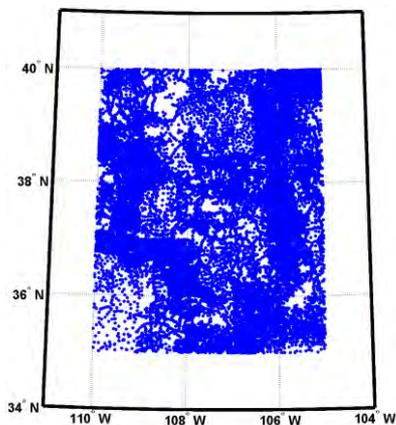
محاسبه مقادیر متوسط با گام ۲۰ و ۵ دقیقه در سطح زمینی در دو منطقه آزمون ایران و امریکا بروش میانگین گیری وزندار انجام گرفت. علاوه بر این مقادیر متوسط آنومالی های جاذبی در سطح ژئوئید (جواب مساله) با استفاده از نرم افزار Synth.f محاسبه گردید.



شکل ۱- توزیع نقاط مشاهداتی در سطح زمین در منطقه ایران

۴-۲- آنالیز پایداری انتقال فروسو

انتقال فروسو به عنوان یک مساله معکوس، ذاتا بدوضع است. مسایل بدوضع مسایلی هستند که حداقل یکی شرایط وجود جواب، یا جواب یکه و یا پایداری جواب نقض شود [۲۳]. در این مسایل تغییر کوچک در داده ها تغییرات زیادی در جوابها را ایجاد می کند (ناپایداری جواب). ماتریس های ضرایب حاصل از گسسته سازی این مسائل عدهای شرط بزرگ دارند. بزرگ بودن عدد شرط، باعث بزرگ شدن نرم بردار جواب می شود و این به معنی وجود نوسانات در بردار جواب (ناپایداری) است [۲۳].



شکل ۲- توزیع نقاط مشاهداتی در سطح زمین در منطقه امریکا

$$\mathbf{b} = [\overline{\Delta g}(r_i, \varphi_i, \lambda_i)]_{n \times 1}$$

\overline{K}_{ij} کرنل با دو بار متوسط گیری است:

$$\overline{K}_{ij} = \int_{c_j} K(\overline{r}_i, \psi, R) d\sigma \quad (9)$$

همانند آنچه در رابطه (۷) دیدیم، \overline{K}_{ij} با استفاده از رابطه زیر بدست می آید:

$$\overline{K}_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left| \left| \frac{x' y'}{d h_i} \right| \right|_{-R\Delta\varphi}^{+R\Delta\varphi} \left| \right|_{-R\Delta\lambda \cos \varphi'}^{+R\Delta\lambda \cos \varphi'} \quad (10)$$

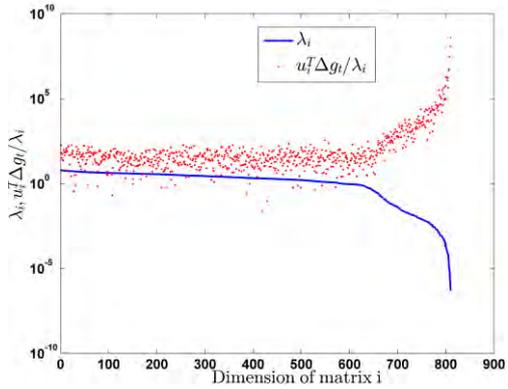
که در این رابطه \overline{h}_i ارتفاع متوسط سلول زمینی است. برخلاف حالت اول معمولا در این معادلات ابعاد سلول های زمینی و ژئوئیدی یکسان است. لذا دستگاه معادلات فوق یک دستگاه با جواب یکه است.

۴- آنالیز عددی

۴-۱- داده ها و مناطق آزمون

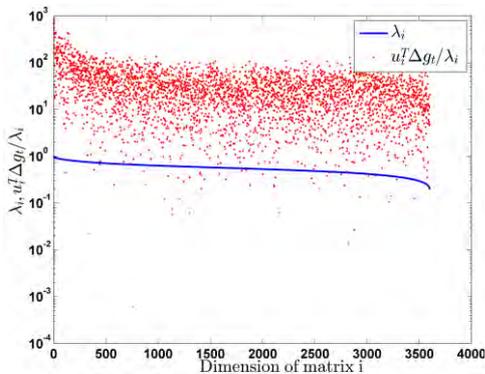
برای بررسی های عددی، دو منطقه آزمون با توپوگرافی نسبتا شدید، با تراکم داده های متفاوت، در ایران و امریکا انتخاب شد. در منطقه آزمون امریکا، محدود به $35^\circ < \varphi < 40^\circ$ ، $-110^\circ < \lambda < -105^\circ$ تراکم دادهها در مناطق پست حدود ۶ کیلومتر و در مناطق کوهستانی بطور متوسط ۱۰ کیلومتر است (شکل ۱). در منطقه در ایران محدود به $28^\circ < \varphi < 37^\circ$ ، $50^\circ < \lambda < 60^\circ$ پخش دادهها بصورت خطی اغلب در طول خطوط ترازبایی است (شکل ۲). در این منطقه در برخی از مناطق مرکزی فواصل دادهها از چند ده کیلومتر نیز بیشتر است.

از آنجا که آنومالی جاذبه متوسط در سطح ژئوئید معلوم نیست، برای کنترل نتایج انتقال فروسو، از آنومالی های شبیه سازی شده با مدل ژئوپتانسیل EGM08 تا درجه/مرتبه ۲۱۹۰ استفاده شد. با استفاده از نرم افزار synth.f [۲۲] آنومالی جاذبی (هوای آزاد) در محل نقاط مشاهداتی در هر دو منطقه تست محاسبه گردید. تعداد نقاط در منطقه تست ایران و امریکا به ترتیب ۹۱۹۹ و ۷۸۸۰۰ بود. ابعاد سلول های ژئوئیدی نیز ۵ دقیقه در امریکا و ۲۰ دقیقه در ایران انتخاب شد. در منطقه ایران، حتی با وجود انتخاب سلول های بزرگ ۲۰ دقیقه، بیش از ۲۵٪ از سلول ها خالی از داده بودند.

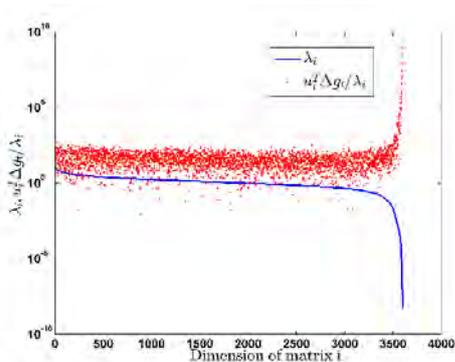


شکل ۴- شرط پیکارد گسسته برای آنومالی های گرید نشده (ایران)

حل دستگاه معادلات خطی بدووضع نیاز به استفاده از روشهای خاص به همراه پایدارسازی دارد. در این گونه مسایل، جواب کمترین مربعات (برمبنای معکوس ماتریس ضرایب) دارای اختشاشات زیاد (نرم بزرگ) هستند و مطلوب نخواهند بود. بطور کلی روشهای پایدارسازی شامل دو دسته کلی مستقیم و تکراری هستند. روشهای مستقیم بر پایه تجزیه مقادیر منفرد ماتریس ضرایب و اعمال پارامتری موسوم به پایدارسازی به مساله هستند. روشهای تکراری، روشهایی هستند که دنباله ای از جواب ها بطور تکراری فراهم می کنند. در حل دستگاه معادلات بزرگ (نظیر مساله انتقال فروسو) استفاده از روشهای تکراری بدلیل حجم محاسباتی کمتر بر روشهای مستقیم برتری دارند.



شکل ۵- شرط پیکارد گسسته برای آنومالی های گرید شده (امریکا)

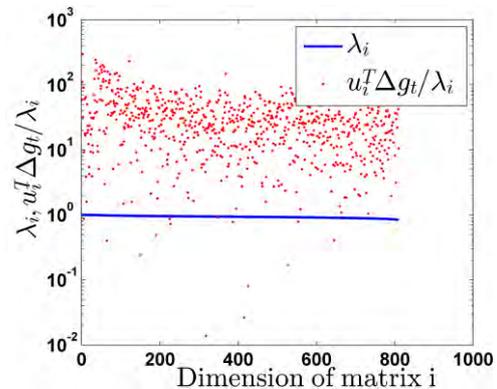


شکل ۶- شرط پیکارد گسسته برای آنومالی های گرید نشده (امریکا)

از سوی دیگر محتوی فرکانسی داده ها نیز در پایداری جواب تاثیرگذار است. فرکانسهای بالای داده ها در جوابها تقویت شده و ناپایداری جواب را افزایش می دهد. داده های خوشه ای و نزدیک بهم محتوای فرکانسی بالاتری نسبت به داده های گرید شده و منظم دارند. از این رو بطور طبیعی انتظار می رود مساله انتقال فروسو آنومالی های نقطه ای نسبت به متوسط ناپایدارتر باشد.

یک روش سیستماتیک برای مطالعه بدووضع یک دستگاه معادله خطی بررسی شرط گسسته پیکارد است [۲۴]. بر اساس این شرط در مسایل بدووضع ضرایب فوریه داده ها، $\langle u, \Delta g_t \rangle$ ، نسبت به مقادیر منفرد ماتریس ضرایب، λ_i با سرعت بیشتری به سمت صفر میل می کنند. در این صورت نسبت $\frac{\langle u, \Delta g_t \rangle}{\lambda_i}$ به سمت واگرایی میل می کند. خوانندگان برای مطالعه کامل شرط گسسته پیکارد و تجزیه مقادیر منفرد ماتریس ضرایب می توانند به [۲۵] مراجعه کنند.

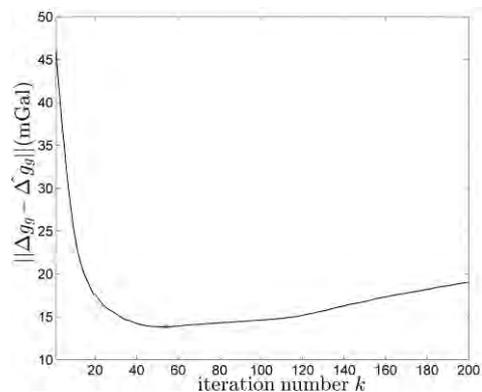
بررسی شرط گسسته پیکارد برای دو منطقه آزمون ایران و امریکا و در دو حالت انتقال فروسوی نقطه ای و متوسط در اشکال (۳ - ۶) آورده شده است.



شکل ۳- شرط پیکارد گسسته برای آنومالی های گرید شده (ایران)

عدد شرط (نسبت بزرگترین مقدار منفرد به کوچکترین آن) ماتریس ضرایب در منطقه ایران برای انتقال فروسوی آنومالی های گرید شده و نشده به ترتیب برابر ۱،۱۹ و $5.06e+13$ است. این عدد برای منطقه آزمون امریکا به ترتیب برابر ۴،۹۹ و $1.29e+7$ است. عدد شرط میزان تقویت فرکانس های بالای داده ها در بردار جواب را نشان می دهد. لذا از بررسی اعداد شرط و اشکال (۴ و ۶) می توان دریافت، انتقال فروسوی آنومالی های جاذبی گرید نشده مساله ای بدووضع است. در حالی که انتقال فروسو آنومالی های متوسط با گام ۵ و ۱۰ دقیقه مساله خوش وضع است.

روشهای تکراری پس از چندین تکرار تحت تاثیر مقادیر منفرد کوچک نرم جواب ها بیشتر شده و به سمت جواب (غیر مطلوب) کمترین مربعات میل می کند. لذا باید با انتخاب یک معیار مناسب، قبل از ناپایدار شدن جواب به تکرارها خاتمه داد. در اینجا پارامتر پایدارسازی انتخاب تکرار بهینه است. در روشهای تکراری و در مسایل بدوضع، پس از چند تکرار جواب بهینه بدست می آید. سپس خطای جوابها زیاد می شود که این خاصیت را گاهی نیمه همگرایی می نامند [۲۶]. شکل (۷)، خاصیت نیمه همگرایی جواب تکرارهای روش گرادیانت مزدوج [۲۳] را در مساله انتقال فروسوی آنومالی های گرید نشده آمریکا نشان می دهد.



شکل ۷- خاصیت نیمه همگرایی در تکرارهای فروسوی داده های گرید نشده. * محل تکرار بهینه را نشان می دهد.

۳-۴- نتایج انتقال فروسو

انتقال فروسو در دو منطقه آزمون و در دو حالت نقطه ای و متوسط (روی گرید منظم) انجام شد. با توجه به این شعاع انتگرال گیری در انتگرال پواسن حداقل ۱ درجه است [۹]. در حالت معکوس، آنومالی هایی که در حاشیه یک درجه ای از محدوده داده ها قرار دارند، نامعتبر بوده و باید از جواب نهایی کنار گذاشته می شوند [۲۷]. برای تعیین دقت انتقال فروسو، جواب ها در محدوده جدید با آنومالی های متوسط بازسازی شده از مدل EGM08 مقایسه می شود.

برای حل دستگاه معادلات خطی بدوضع، نتایج سه روش تکراری ART، تکراری گرادیانت مزدوج و مستقیم تیخونوف، مقایسه شد. روش گرادیانت مزدوج به علت خطای کمتر بعنوان روش حل استفاده گردید. در انتقال فروسوی آنومالی های متوسط با توجه به خوش وضع بودن مساله، تکرارها سریعا (بعد از چند تکرار) به جواب کمترین مربعات همگرا (جواب مطلوب) همگرا می شود. اما در

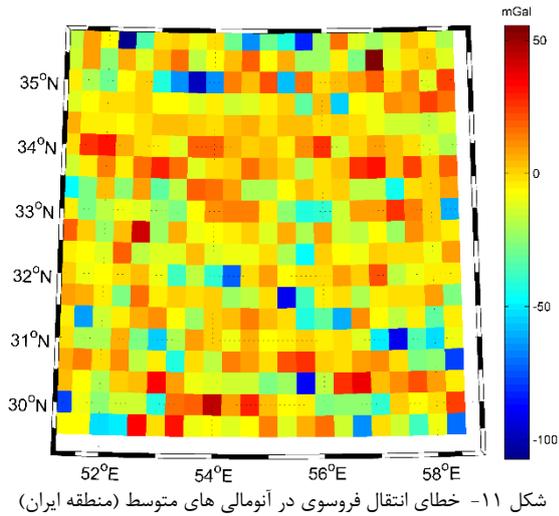
دستگاه معادلات خطی متناظر با آنومالیهای نقطه ای، بعلت بد وضع بودن مساله و پدیده نیمه همگرایی، انتخاب تکرار بهینه از اهمیت بالایی برخوردار است. انتخاب تکرار بهینه بعلت وجود اثر حاشیه یک درجه ای که در فوق بدان اشاره شد، به آسانی میسر نیست [۲۷]. با توجه به معلوم بودن جواب، برای جلوگیری از خطای احتمالی در برآورد تکرار بهینه، انتخاب آن از مقایسه جواب با آنومالی های متوسط روی ژئوئید انجام شد. به عبارت دیگر تکرار بهینه بدون خطا انتخاب شد. پارامترهای آماری نتایج اختلاف بین آنومالی های منتقل شده و جواب در جدول ۱ نشان داده شده است. نمایش گرافیکی این اختلافات در اشکال ۸-۱۱ برای دو منطقه آزمون ترسیم شده است.

نتایج جدول ۱ و اشکال ۸-۱۱ نشان می دهد، انتقال فروسوی آنومالی های متوسط دقت بهتری در مقایسه آنومالی های نقطه ای دارند. برای بررسی منابع و رفتار خطای انتقال فروسو در منطقه آزمون آمریکا نقشه توپوگرافی نقاط ترسیم گردید (شکل ۱۲). مقایسه این شکل با اشکال ۸ و ۹ حاکی از آن است که قدمطلق خطای انتقال فروسو با ارتفاع همبستگی مثبت دارد. بعبارت دیگر دقت انتقال فروسو در کوهستانها پایین تر است. این مساله در هر دو آنومالی های نقطه ای و متوسط وجود دارد. هرچند که در آنومالی های نقطه ای وابستگی بیشتری وجود دارد.

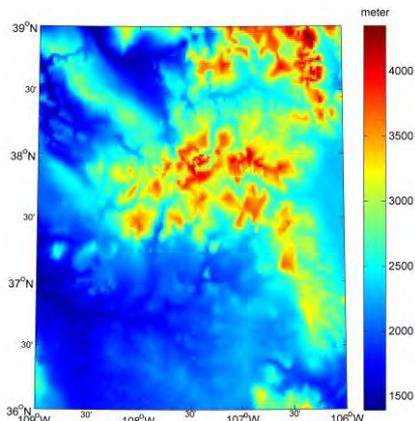
جدول ۱- پارامترهای آماری خطای فروسوی مدل های مختلف در دو منطقه آزمون. واحد میلی گال است.

SD	mean	max	min	آنومالی / منطقه
۱۳٫۸	-۱٫۰	۲۰۹٫۴	-۱۰۷٫۵	مدل نقطه-متوسط آمریکا
۴٫۹	-۰٫۲	۳۴٫۱۶	-۲۹٫۶	مدل متوسط-متوسط آمریکا
۲۳٫۲	-۱۰٫۷	۵۹٫۲	-۱۳۶٫۲	مدل نقطه-متوسط ایران
۲۱٫۶	-۷٫۱	۵۵٫۶	-۱۰۷٫۳	مدل متوسط-متوسط ایران

اشکال ۱۱-۱۲ نشان می دهد که در منطقه ایران خطای انتقال فروسو بسیار زیاد است. حتی می توان گفت در نقاط قابل توجهی، خطای کمیت از خود مقدار کمیت بیشتر است. هر چند در مدل متوسط خطا به مراتب کمتر است، اما خطای فروسوی متوسط ۲۵ میلی گال اساسا تعیین ژئوئید با کمیت و توزیع داده های موجود را در ایران دچار چالش می



شکل ۱۱- خطای انتقال فروسوی در آنومالی های متوسط (منطقه ایران)



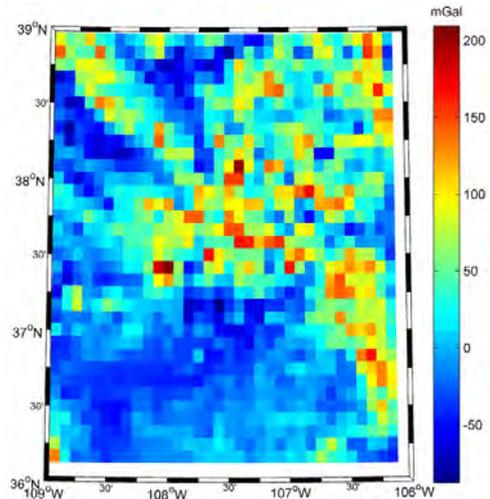
شکل ۱۲- توپوگرافی منطقه آزمون آمریکا برحسب ارتفاعات نقاط گرانی

۵- نتیجه گیری

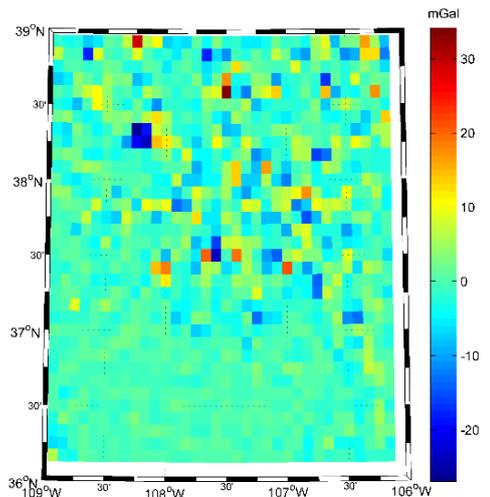
در این مطالعه مساله انتقال فروسو آنومالی های نقطه‌ای و متوسط از نظر پایداری و دقت مورد ارزیابی قرار گرفت. آنومالی های متوسط آلوده به خطای پیش بینی هستند. این خطا در مناطقی با داده های گرانی پراکنده مانند ایران، زیاد است. با این وجود نشان داده شد که حتی در این مناطق نیز خطای انتقال فروسوی آنومالی های متوسط از انتقال فروسوی مستقیم آنومالی های نقطه ای کمتر است. مساله فیلتر شدن فرکانس های بالا در پروسه متوسط گیری اگرچه بخش مفید سیگنال را حذف می کند، اما در عوض مانع از تقویت این فرکانس ها و ایجاد اختشاش در بردار جواب در پروسه انتقال فروسو می شوند.

نکته مهم تر از انتخاب روش پایدارسازی، انتخاب یک معیار برای غلبه بر پدیده نیمه همگرایی تکرارهاست. شاید اگر بحث حذف شعاع انتگرال گیری در انتگرال پواسن (که در این مطالعه یک درجه انتخاب شد) مطرح نباشد، بتوان از

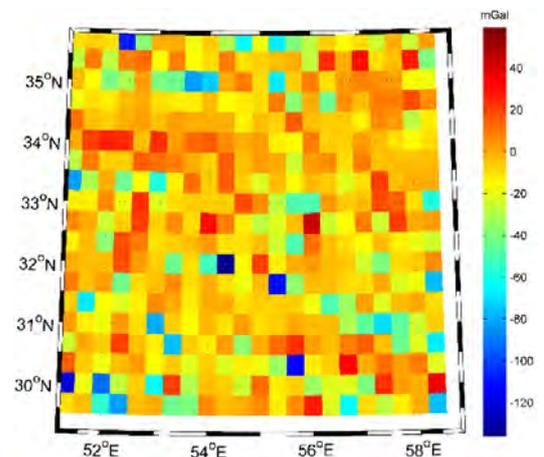
کند. در منطقه آزمون ایران، بر خلاف امریکا توپوگرافی عامل اصلی در خطای فروسو نیست. بلکه عمده خطا ناشی از عدم توزیع مناسب داده ها و سپس توپوگرافی است. هر دو روش نقطه ای و متوسط دارای خطای پیش بینی زیاد هستند. لذا از بازسازی آنومالی جاذبی روی ژئوئید ناتوان هستند.



شکل ۸- خطای انتقال فروسوی در آنومالی های نقطه ای (منطقه امریکا)



شکل ۹- خطای انتقال فروسوی در آنومالی های متوسط (منطقه امریکا)



شکل ۱۰- خطای انتقال فروسوی در آنومالی های نقطه ای (منطقه ایران)

آنومالی های جاذبه را در این مناطق کاهش می دهد. بطور مثال در منطقه آزمون امریکا فواصل داده ها در مناطق کوهستانی شدید (با ارتفاع بیشتر از ۲۰۰۰ متر) بیشتر از ۵ دقیقه کمانی است. همانطور که نتایج این مطالعه نشان می دهد با وجود تراکم های موجود تعیین ژئوئید با دقت ۱ تا ۵ سانتیمتر دور از دسترس است. مساله ای که در مطالعه [۲۸] نیز بدان اشاره شده است. همچنین در منطقه ایران، خطای بالای انتقال فروسوی آنومالی های جاذبه (متوسط و نقطه ای) ممکن است از سهم انتقال فروسو در ژئوئید نیز بیشتر شود. در این صورت تعیین ژئوئید با داده های موجود نیاز به توجه و بررسی بیشتر دارد.

معیار هایی نظیر منحنی ال سود برد، اما معمولا استفاده از این معیارها به تکرار بهینه منتهی نمی شود [۲۷]. هرچند در این مطالعه با معلوم بودن جواب، تکرار بهینه (پارامتر پایداری بهینه) انتخاب شد، اما در مسایل واقعی باید سهم خطا در تخمین پارامتر پایداری (تکرار بهینه) را نیز به خطای انتقال فروسو آنومالی های نقطه ای افزود. صرفنظر از بحث دقت آنومالی های متوسط و نقطه ای نتایج این مطالعه نشان می دهد که حتی تراکم استفاده شده در منطقه امریکا نیز جوابگوی دقت های مورد نیاز برای ژئوئید سانتیمتری نیست. معمولا تراکم داده های گرانی در منطق کوهستانی کم و شدت تغییرات سیگنال آنومالی جاذبه زیاد است. این امر دقت تقریب/پیش بینی

مراجع

- [1] P. Vaníček, J. Huang, P. Novak, S. Pagiatakis, M. Veronneau, Z. Martinec, et al., "Determination of the boundary values for the Stokes-Helmert problem," *Journal of Geodesy*, 1999.
- [2] A. A. Ardalan, "High resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity," PhD, Department of Geodesy and Geoinformatics University of Stuttgart, 1999.
- [3] A. A. Ardalan and E. W. Grafarend, "High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid," *Journal of Geodesy*, vol. 78, pp. 138-156, 2004.
- [4] P. Novák, "Geoid determination using one-step integration," *Journal of Geodesy*, vol. 77, pp. 193-206, 2003/06/01 2003.
- [5] F. A. Bayoud and M. G. Sideris, "Two different methodologies for geoid determination from ground and airborne gravity data," *Geophysical Journal International*, vol. 155, pp. 914-922, 2003.
- [6] A. Safari, "Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations.," Ph.d, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University of Tehran, 2004.
- [7] Z. Martinec, *Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid* vol. 233 pp. Heidelberg: Springer, 1998.
- [8] J. Hadamard, "Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique," *Princeton Univ. Bull.*, pp. 49-52, 1902.
- [9] J. Huang, "Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation of gravity and geoid," Ph.D, Department of Geodesy and Geomatics Engineering UNB, Fredericton, 200.۲
- [10] J. Huang, M. G. Sideris, P. Vanicek, and I. N. Tziavos, "Numerical investigation of downward continuation techniques for gravity anomalies," *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, vol. LXII, N. 1, pp. 33-48, 2003.
- [11] J. Huang and M. Veronneau, "Applications of downward-continuation in gravimetric geoid modeling: case studies in Western Canada," *Journal of Geodesy*, vol. 79, pp. 135-145, 2005.
- [12] Z. Martinec, "Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains," *Journal of Geodesy*, vol. 70, pp. 805-828, 1996.
- [13] W. Sun, "On Discrete Schemes in Downward Continuation of Gravity " in *International Association of Geodesy*, Sapporo, Japan 2003 pp. 512-517.
- [14] P. Vaníček, W. Sun, P. Ong, Z. Martinec, M. Najafi, P. Vajda, et al., "Downward continuation of Helmert's gravity," *Journal of Geodesy*, vol. 71, pp. 21-34, 1996.

- [15] M. Goli and M. Najafi-Alamdari, "Planar, spherical and ellipsoidal approximations of Poisson's integral in near zone," in *Journal of Geodetic Science* vol. 1, ed, 2011, p. 17.
- [16] M. Goli, M. Najafi-Alamdari, and P. Vaníček, "Numerical behaviour of the downward continuation of gravity anomalies," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 55, pp. 191-202, 2011/04/01 2011.
- [17] A. Safari, A. A. Ardalan, and E. W. Grafarend, "A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran," *Journal of Geodynamics*, vol. 39, pp. 545-568, 7// 2005.
- [18] A. Ardalan and R. Karimi, "On correct application of one-step inversion of gravity data," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 57, pp. 401-425, 2013/07/01 2013.
- [19] W. H. Heiskanen and H. Moritz, *Physical Geodesy*. San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1967.
- [20] M. Goli, M. Najafi-Alamdari, and P. Vaníček, "Downward continuation of Helmert gravity anomaly to precise determination of geoid in Iran," *Journal of the Earth and Space Physics*, vol. 38, pp. 99-109, 11/21 2012.
- [21] P. Novák and B. Heck, "Downward continuation and geoid determination based on band-limited airborne gravity data," *Journal of Geodesy*, vol. 76, pp. 269-278, 2002/05/01 2002.
- [22] S. A. Holmes and N. K. Pavlis, "synth, a FORTRAN program for very high degree harmonic synthesis," ed. NGA ,2006.
- [23] P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems.*, Philadelphia, USA: SIAM, 1998.
- [24] P. C. Hansen, "The discrete Picard condition for discrete ill-posed problems," *Source, BIT archive*, vol. 30, pp. 658 - 672, 1990.
- [25] A. Safari and Y. Allahtavakoli, "A Comparison of direct and indirect regularization methods for downward continuation problem of geoid computations without applying Stokes formula," *Journal of the Earth and Space Physics*, vol. 34, 2008.
- [26] F. NATTERER, *The Mathematics of Computerized Tomography*. New York: John Wiley, 1986.
- [27] M. Goli, "Downward continuation of spherical Bouguer anomalies in no topography space for precise determination of geoid," Ph.D thesis, department of geodesy and geomatics, KNToosi University, Tehran, Iran, 2011.
- [28] C. Jekeli, H. Yang, and J. Kwon, "Using gravity and topography-implied anomalies to assess data requirements for precise geoid computation," *Journal of Geodesy*, vol. 83, pp. 1193-1202, 2009/12/01 2009.