

ارزیابی توانایی روش‌های تشخیص خطاهای بارز در مدل‌سازی رقومی زمین

فرهاد صمدزادگان^۱، معصومه حمیدی^{۲*}

^۱استاد گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
samadz@ut.ac.ir

^۲دانشجوی کارشناسی ارشد فتوگرامتری - گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
m.hamidi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت بهمن ۱۳۹۱، تاریخ تصویب اسفند ۱۳۹۱)

چکیده

امروزه مدل‌های رقومی زمین (DEM)، یک منبع مهم داده‌ی مکانی برای کاربردهای متنوع در بسیاری از زمینه‌های علمی و تجاری می‌باشد. از این‌رو، خصوصیت اصلی آن‌ها، یعنی دقت، مورد توجه ویژه‌ای قرار دارد. این مدل‌ها در مراحل نمونه‌برداری، اندازه‌گیری و بازسازی با انواع مختلفی از خطاها آلوده می‌گردند. این خطاها به سه گروه؛ اتفاقی، سیستماتیک، و بارز تقسیم می‌شوند. وجود خطاهای بارز موجب بروز نتایج غیر قابل قبول در محصول نهایی می‌گردد. بنابراین، شناسایی و حذف خطاهای بارز از داده‌های مدل رقومی زمین، توجه بسیاری را در آنالیزهای داده‌های مکانی به خود معطوف ساخته است. اغلب روش‌های موجود بر مبنای آزمون‌های آماری هستند که به دلیل ایزوله در نظر گرفتن مشاهدات و صرف‌نظر کردن از تأثیرات آن‌ها روی مشاهدات دیگر مشکلات قابل توجهی را ایجاد می‌نمایند. به دلیل ضعف و محدودیت این روش‌ها، در این پژوهش الگوریتمی مبتنی بر برآورد پایدار به روش کمترین مربعات با وزن‌دهی تکراری (IRLS) ارائه شده است. همچنین، کاربرد روش پیشنهادی در مقابل شیوه‌ی کلاسیک کمترین مربعات مورد آزمون قرار گرفته است. برای این منظور، منطقه‌ی مورد نظر به چند بخش تقسیم می‌شود. در هر بخش با برازش یک سطح دوخطی و محاسبه‌ی بردار باقیمانده‌ها با استفاده از برآورد پایدار سعی در کمینه کردن مجموع مربعات بردار باقیمانده‌ها و کشف خطاها می‌شود. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که روش پیشنهادی یک راه‌حل با بیشترین پایداری فراهم می‌نماید که شناسایی مشاهدات دارای خطای بارز را امکان‌پذیر می‌سازد.

واژگان کلیدی: مدل رقومی زمین، خطای بارز، برآورد کمترین مربعات، برآورد پایدار.

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

مدل‌های رقومی زمین از ابتدای پیدایش در سال ۱۹۵۰، کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلفی چون تولید نقشه^۱، سنجش از دور^۲، مهندسی عمران^۳، مهندسی معدن^۴، زمین‌شناسی^۵، مهندسی نظامی^۶، برنامه‌ریزی زمین^۷، و ارتباطات^۸ یافته‌اند [۱-۵].

به دلیل آن‌که مدل‌های رقومی زمین تبدیل به یک محصول صنعتی گردیده‌اند، توجه خاصی به کیفیت آن‌ها، خصوصاً دقت آن‌ها می‌شود. در تولید مدل رقومی زمین، خطاها در مرحله‌ی اخذ داده (خطاها در داده‌های منبع) و همچنین در مرحله‌ی پردازش داده‌ها (خطاهای انترپولاسیون و نمایش) وارد می‌شوند.

امروزه روش‌های مختلفی از قبیل روش‌های فتوگرامتری^۹، تداخل‌سنجی سار^{۱۰}، لیدار^{۱۱}، و استفاده از لیزر اسکنر هوایی^{۱۲} برای تولید داده‌های ارتفاعی وجود دارد. تمامی این روش‌های تولید داده‌ی ارتفاعی و روش‌های پردازشی متناسب با آن‌ها برای تولید مدل رقومی زمین، خطاهایی از انواع مختلف اتفاقی^{۱۳}، سیستماتیک^{۱۴}، و بارز^{۱۵} تولید می‌نمایند که موجب عدم اطمینان در دسترسی به دقت مورد نیاز در کاربردهای مد نظر می‌شود. بنابراین، روش‌هایی برای کنترل و مدیریت کیفیت مدل‌های رقومی زمین مورد نیاز است.

همان‌گونه که معمولاً در نظر گرفته می‌شود، دو روش پایه‌ی اصلی در برخورد با این خطاهای ناخواسته وجود دارد: استفاده از آزمون‌های آماری، و به کار بردن برآورد پایدار [۶]. از کار پیشگام باآردا در سال ۱۹۶۸ [۷] چندین آزمون آماری برای شناسایی خطاهای بارز و

سیستماتیک توسعه داده شده است. تمامی این روش‌ها از نتایج یک سرشکنی استفاده می‌نمایند. عملکرد روش‌های آماری در تشخیص خطاهای بارز همواره رضایت‌بخش نیست، عمدتاً به این دلیل که سرشکنی که این روش‌ها بر مبنای آن قرار دارند بر اساس مشاهداتی صورت گرفته است که خطاهای بارز نیز در میان آن‌ها حضور داشته است. این آزمون‌ها خصوصاً هنگامی که تعداد قابل توجهی از مشاهدات دارای خطای بارز (اشتباه^{۱۶}) وجود داشته باشد، غیر موثر خواهند بود [۸]. در این مورد ممکن است این خطاها ناشناخته باقی بمانند، (خطای نوع دوم) و یا به طور معکوس، مشاهدات صحیحی به عنوان اشتباه رد گردند (خطای نوع اول).

در مقابل، روش‌های برآورد پایدار^{۱۷} با این هدف توسعه داده شدند که بیشترین پایداری در جواب را نسبت به تاثیر خطاهای بارز و سیستماتیک داشته باشند. در نتیجه، این روش‌ها نه تنها ابزارهایی برای تشخیص خطاهای بارز می‌باشند، بلکه روش‌های برآوردی هستند که جواب تولید شده توسط آن‌ها کمترین تاثیر را از مشاهدات اشتباه گرفته است [۸].

با وجود این‌که اصطلاح "پایدار"^{۱۸} ابتدا در کار Box در سال ۱۹۵۳ مورد استفاده قرار گرفت [۹]، مطالعات پس از آن کمک بسیاری به تشکیل تئوری حاضر کردند (به عنوان مثال [۱۰، ۱۱]). برآورد پایدار در ژئودزی و علوم مرتبط، به طور گسترده‌ای در دهه‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱۲-۱۶].

برطبق این مطالعات مقایسه‌ای میان روش کلاسیک کمترین مربعات، و روش برآورد پایدار را می‌توان بدین شکل داشت:

- در هنگامی که مدل ریاضی مورد استفاده صحیح بوده و مشاهدات تنها تحت تاثیر خطاهای اتفاقی قرار گرفته باشند، برآورد کلاسیک کمترین مربعات محتمل‌ترین جواب ممکن را ارائه می‌دهد. در این شرایط روش برآورد پایدار، جوابی ارائه می‌دهد که نزدیک‌ترین جواب به نتیجه‌ی حاصل از روش کمترین مربعات باشد، اما این جواب به اندازه‌ی پاسخ حاصل از کمترین مربعات محتمل نیست [۸].

^۱ Mapping^۲ Remote Sensing^۳ Civil Engineering^۴ Geology^۵ Mining Engineering^۶ Military Engineering^۷ Land Planning^۸ Communications^۹ Photogrammetric techniques^{۱۰} SAR Interferometry^{۱۱} LIDAR (Light Detection and Interferometry)^{۱۲} Airborne Laser Scanner^{۱۳} Random^{۱۴} Systematic^{۱۵} Gross^{۱۶} Blunder^{۱۷} Mapping^{۱۸} Robust

بیان می‌کند، توسط این سیستم معادلاتی تعریف می‌گردد:

$$Ax = l + v \quad (1)$$

که A ماتریس ضرائب بردار مجهولات (x) می‌باشد، l بردار داده‌های مشاهداتی یا اختلاف میان داده‌های مشاهداتی و محاسباتی را نمایش می‌دهد؛ و v بردار باقیمانده‌ها می‌باشد. عموماً فرض می‌شود که مشاهدات دارای توزیع نرمال هستند و بنابراین رفتار آماری آن‌ها توسط یک ماتریس وریانس-کوریانس (Σ) مدل می‌شود. این ماتریس، وارون ماتریس وزن می‌باشد:

$$P = \sum l^{-1} \quad (2)$$

بنابراین، محتمل‌ترین جواب سیستم (۱) با ماتریس وزن (۲) با استفاده از برآوردگر کمترین مربعات (۳) بدست می‌آید:

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (3)$$

اگر حضور خطای بارز در مشاهدات مورد انتظار باشد، می‌توان با به‌کار بردن آزمون تاو^۱ روی نتایج حاصل از سرشکنی، داده‌ها را مورد ارزیابی قرار داد. این آزمون باقیمانده‌های استاندارد شده را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد

$$\tau_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{vi}} \sim \tau_{n-r} \quad (4)$$

در این رابطه، $\hat{\sigma}_{vi}$ انحراف معیار بدست آمده پس از سرشکنی برای باقیمانده‌ی v_i می‌باشد؛ و τ_{n-r} توزیع τ با $n-r$ درجه‌ی آزادی را نمایش می‌دهد، که با رابطه‌ای که در ادامه می‌آید، به توزیع t-student مرتبط می‌شود.

$$\tau_{n-r} = \frac{\sqrt{n-r} t_{n-r-1}}{\sqrt{n-r-1 + t_{n-r-1}^2}} \quad (5)$$

^۱ Tau

• در هنگامی که خطاهای سیستماتیک یا بارز مشاهدات را تحت تاثیر قرار گذاشته و یا مدل ریاضی صحیح نباشد، برآورد پایدار بهترین جواب ممکن را فراهم می‌نماید [۸].

روش‌های مختلفی برای شناسایی خطاهای بارز در داده‌های منبع مدل رقومی زمین توسعه داده شده است [۱۷-۲۱]. اگر داده‌ها توزیع منظمی داشته باشند، شناسایی خطاهای بارز را می‌توان با روش‌های ساده‌ای انجام داد. یکی از این روش‌ها استفاده از اطلاعات شیب منطقه است. بدین ترتیب که شیب توپوگرافی در هر نقطه در هشت جهت محاسبه شده، و سپس با شیب‌های توپوگرافی در نقاط مجاور مقایسه می‌گردد. اگر اختلاف قابل توجهی وجود داشته باشد، نقطه‌ی متناظر مظنون به داشتن خطای بارز خواهد بود [۱]. مزیت این روش شناسایی و حذف داده‌های اشتباه قبل از ورود به مرحله‌ی سرشکنی می‌باشد. اما زمانی که داده‌های منبع مدل رقومی زمین به‌طور نامنظم توزیع شده باشند، شرایط پیچیده‌تر است.

این پژوهش بر روی یافتن خطاهای بارز منفرد و خوشه‌ای در منبع داده‌ی نامنظم مدل رقومی زمین با استفاده از روش کلاسیک کمترین مربعات و روش‌های برآورد پایدار متمرکز شده است. بنابراین همزمان با سرشکنی سعی در شناسایی مشاهدات اشتباه و حذف تاثیرات آن‌ها می‌گردد. روش‌ها ارائه شده و در نهایت، مثال‌هایی از مدل‌سازی رقومی زمین با داده‌های واقعی با استفاده از این روش‌ها داده خواهد شد تا مزایای برآورد پایدار نسبت به روش کمترین مربعات در موردی که خطاهای ناخواسته در مرحله‌ی سرشکنی حضور دارند، مشخص گردد. همان‌گونه که خواهیم دید زمانی که خطاهای بارز مشاهدات را تحت تاثیر قرار داده باشند، روش کمترین مربعات نتایج غیر قابل قبولی تولید خواهد نمود، درحالی‌که برآورد پایدار بهترین جواب ممکن را ارائه می‌دهد.

۲- برآورد کمترین مربعات و آزمون‌های آماری

مدل تابعی یا مدل ریاضی که ارتباط میان داده‌های مشاهداتی و مجهولات را در سرشکنی کمترین مربعات

مشاهده‌ی i در سطح اطمینان α (مثلاً سطح اطمینان ۰/۰۵) رد می‌شود اگر باقی‌مانده‌ی استاندارد شده‌ی آن از یک مقدار بحرانی c تجاوز نماید؛ که

$$\alpha = P[\tau > c] \quad (۶)$$

سطح اطمینان، احتمال وقوع خطای نوع اول را نشان می‌دهد. اگر $c < |\tau_i|$ آن‌گاه فرض صفر (مشاهده‌ی i -ام دارای خطای بارز نیست) در سطح اطمینان α پذیرفته می‌شود. در غیر این‌صورت فرض صفر رد شده و فرض مخالف در سطح اطمینان α پذیرفته خواهد شد. عموماً ممکن است که آزمون‌های آماری شناسایی خطا بر روی جواب کمترین مربعات در شناسایی صحیح خطاهای بارز دچار شکست گردند، تنها به این دلیل که سرشکنی که این روش‌ها بر مبنای آن قرار دارند، هنوز آلوده به خطاست. علاوه‌بر آن، همان‌گونه که به‌خوبی دانسته می‌شود، شناسایی در هنگامی که تعداد مشاهدات دارای خطای بارز بیش از یکی باشد، حتی پیچیده‌تر می‌شود. زیرا، همبستگی میان باقیمانده‌ها شناسایی مشاهداتی را که موجب رد شدن آزمون گردیده‌اند دشوار می‌نماید [۶، ۲۲].

از این‌رو، شیوه‌ی قابل اطمینان‌تر دیگری حداقل به‌عنوان مکمل این آزمون‌های آماری مورد نیاز است.

۳- برآورد پایدار

در هر فرآیند سرشکنی چندین فرض اولیه وجود دارد. نخست آن که مدل پیشنهاد شده برای سرشکنی تنها فرضی است که ارتباط میان مشاهدات و مجهولات را برقرار می‌سازد. همچنین توزیع مشاهدات و استقلال آن‌ها فرضیات بعدی است که در نظر گرفته می‌شوند. تمامی این فرضیات کاملاً صحیح نیستند، اما موجب سادگی واقعیت بسیار پیچیده‌تر می‌گردند که ممکن است بیان آن با معادلات جبری امکان‌پذیر نباشد. اگرچه، قاعده‌ی اصلی بر مبنای قبول مدل سرشکنی (در هر دو قسمت ریاضی و آماری) و نتایج به‌دست آمده قرار دارد: کمترین اختلافات با واقعیت تنها موجب بروز کمترین تغییرات در جواب می‌گردد. متأسفانه، همواره این اتفاق رخ نمی‌دهد. خصوصاً، سرشکنی کمترین مربعات اختلافات اولیه‌ی موجود را به مقدار قابل توجهی

تشدید می‌کند. بنابراین، به‌جای آن بایستی از برآورد پایدار استفاده گردد. یک برآوردگر برای پارامتر x بر مبنای متغیرهای $m_1, m_2, \dots, m_n$ تابعی است که برای هر مجموعه‌ی ممکن از مقادیر مدل‌های رقومی زمین تعریف می‌گردد.

$$\hat{x} = \hat{x}(m_1, m_2, \dots, m_n) \quad (۷)$$

مقادیر بدست آمده برای $m_1, m_2, \dots, m_n$ تحت عنوان برآورد^۱ شناخته می‌شوند. یک برآورد نااریب^۲ است اگر مقدار امید ریاضی آن برابر با پارامتر برآورد شده باشد

$$E(\hat{x}) = x \quad (۸)$$

علاوه بر آن، گفته می‌شود که یک برآوردگر سازگار^۳ است، اگر با افزایش تعداد نمونه‌ها حد آن به سمت پارامتر برآورد شده میل نماید، به بیان دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{x}) = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\hat{x}} = 0 \quad (۹)$$

هرچه وریانس یک برآوردگر نااریب کوچک‌تر باشد، گفته می‌شود که کارا^۴ تر است. به‌عنوان یک مثال خاص، در صورتی که دو برآوردگر از x داشته باشیم به‌گونه‌ای که وریانس آن‌ها به ترتیب s_1^2 و s_2^2 باشد، آن‌گاه برآوردگر نخست کارا تر از دومی است در صورتی که داشته باشیم.

$$\alpha_1^2 < \alpha_2^2 \quad (۱۰)$$

درنهایت، یک برآوردگر در صورتی کافی^۵ است که تمامی اطلاعات موجود در نمونه را در نظر بگیرد، به بیان دیگر، برآوردگر (۷) در صورتی کافی است که $P(m_1 = M_1, m_2 = M_2, \dots, m_n = M_n | \hat{x} = a)$ وابسته به x نباشد.

پایداری را می‌توان به این ویژگی‌های کلاسیک مطلوب برای یک برآوردگر اضافه نمود. یک برآوردگر در

^۱ Estimation

^۲ Unbiased

^۳ Consistent

^۴ Efficient

^۵ Sufficient

$$\min \rho(v) \quad (11)$$

این تابع یکی از خصوصیات برآوردگر مورد نظر است. به عنوان نمونه، درمورد کمترین مربعات داریم:

$$\rho(v) = \sum v_i^2 \quad (12)$$

۳-۱- حل با استفاده از روش کمترین مربعات با وزن دهی مجدد^۲ (IRLS)

به منظور حل مدل ریاضی (۱) تحت شرایط کمینه‌ی (۱۱) برای برآوردگر پایدار انتخاب شده، روش کمترین مربعات با وزن دهی مجدد (IRLS) معمول‌ترین انتخاب است. سپس تابع هدف $\rho(v)$ ، وزن (۱۳) را برای کمترین مربعات کلاسیک تولید می‌نماید.

$$\omega(v) = \frac{1}{v} \frac{d\rho(v)}{dv} \quad (13)$$

برآوردگرهای پایداری که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته‌اند به همراه تابع وزن آن‌ها (ω)، و همچنین ثابت استفاده شده برای آن‌ها (در صورت وجود) در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- برآوردگرهای بیشترین شباهت مورد استفاده [۸، ۲۳، ۲۴]

ثابت (k)	وزن ($\omega(v)$)	برآوردگر
-	1	L2
-	$\frac{1}{ v }$	L1
-	$\frac{1}{\sqrt{1+v^2/2}}$	L1-L2
1.5	$ v ^{k-2}$	Lp
1.5	$\frac{1}{1+ v /k}$	Fair
1.5	$\frac{1}{ v \leq k}$ $k/ v $ $ v > k$	Huber
2.5	$\frac{1}{1+(v/k)^2}$	Cauchy
8	$\exp(-(v/c)^2)$	Welsch

صورتی پایدار است که نسبت به تغییرات فرضیات اولیه غیر حساس باشد. این تغییرات ممکن است ناشی از عدم کامل بودن مدل آماری (مشاهدات تحت تاثیر خطاهای بارز یا سیستماتیک قرار گرفته باشند) یا مدل تابعی (که این مورد نیز یک خطای سیستماتیک است) باشد.

نکته این که در برآورد پایدار قاعده‌ی اصلی به جای "کارایی"، "اطمینان" است. در نتیجه، برآوردگری که یک جواب غیر بهینه اما نزدیک به پاسخ صحیح تولید می‌نماید، بجای برآوردگر بهینه‌تری که در هنگام عدم صدق هر یک از فرضیات یک راه‌حل ناصحیح تولید می‌کند، ارجح‌تر است.

می‌توان برآوردگرهای پایدار را بدین گونه طبقه‌بندی نمود:

- برآوردگرهای بیشترین شباهت (M-estimators)
- برآوردگرهای ترکیب خطی آماره‌های ترتیبی L- (estimators)
- برآوردگرهای R (R-estimators).

در میان این برآوردگرها، برآوردگرهای بیشترین شباهت انعطاف‌پذیری بیشتری دارند و تعمیم آن‌ها به موارد چند پارامتری ساده‌تر است. به همین دلیل استفاده از آن‌ها متداول‌تر است و در این مطالعه نیز این برآوردگرها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برخی از این برآوردگرها عبارتند از:

- برآوردگرهای نرم p (p-norms): مانند L1 و L2 (که پایداری کمی دارد).
- برآوردگر Huber
- برآوردگر Andrews
- برآوردگر Danish
- سایر: برآوردگرهای Geman-McClure، Tukey، Fair، Cauchy و Welsch.

ایده‌ی کلی استفاده از یک برآوردگر بیشترین شباهت در ادامه آورده شده است.

اگر $O_1, O_2, \dots, O_m$ مشاهدات مستقلی باشند که بایستی طبق مدل ریاضی (۱) سرشکن گردند، باقیمانده‌های سرشکنی با کمینه کردن تابعی بدست می‌آید که تابع هدف نامیده می‌شود:

^۲ Iteratively Reweighted Least-Squares

^۱ Security

ثابت (k)	وزن ($\omega(v)$)	برآوردگر
15	$[1 - (v/c)^2]^2$	$ v \leq k$
	0	$ v > k$
5	1	$ v \leq 2\sigma$
	$\exp(-kv^2)$	$ v > 2\sigma$
-	1	$ v \leq \sigma$
	$\sigma/ v $	$\sigma < v \leq 3\sigma$
	0	$3\sigma \leq v $

سرشکنی در این روش نیز مطرح است. در حقیقت، فرآیند وزن‌دهی مجدد برای حذف تاثیر خطاهای بارز و یا سیستماتیک می‌باشد؛ اما وزن‌ها همواره بر مبنای سرشکنی قبلی هستند که امکان بالایی دارد که تحت تاثیر خطاها قرار گرفته باشد.

۴- نتایج عملی

در این مطالعه آزمون‌هایی برای ارزیابی توانایی روش کلاسیک کمترین مربعات و روش برآورد پایدار با استفاده از IRLS و بکارگیری برآوردهای بیشترین شباهت، در شناسایی خطاهای بارز صورت گرفته است. خطاهای بارز به مختصات نقاط داده‌ی مورد استفاده برای مدل‌سازی رقومی زمین اعمال گردید و سپس با استفاده از روش‌های مورد بررسی، سعی در شناسایی و حذف این خطاها شد. همچنین، دقت مدل رقومی تولید شده با محاسبه‌ی RMSE در نقاط کنترل و چک ارزیابی شد.

۴-۱- داده‌های مورد استفاده

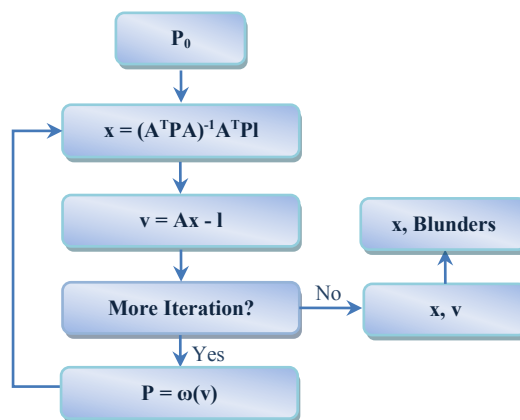
داده‌های مورد استفاده در این مطالعه، نقاط لیدار هستند که برای منطقه‌ی Stuttgart در جنوب غربی آلمان می‌باشد. خصوصیات اصلی این مجموعه داده در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲- خصوصیات مجموعه داده ارتفاعی مورد استفاده

مقدار	خصوصیت
Stuttgart, آلمان	موقعیت
شهری	نوع منطقه
۸۹۰	تعداد نقاط
نامنظم	پراکندگی نقاط
۲۹۲/۳۷ متر	کمترین ارتفاع منطقه
۳۲۷/۷۰ متر	بیشترین ارتفاع منطقه

روش مدل‌سازی رقومی زمین که در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است، روش درونیایی سطح دوخطی به صورت منطقه‌ای می‌باشد. بدین صورت که ناحیه‌ی مورد نظر به چندین بخش تقسیم شده و سپس به هر بخش، یک سطح دوخطی برازش داده شده است. مدل رقومی زمین تولید شده با این روش برای داده‌های اصلی (بدون خطا) در شکل ۲ آورده شده است.

- می‌توان فرآیند را بدین شکل خلاصه نمود:
- در ابتدا یک سرشکنی کمترین مربعات با استفاده از وزن واحد (یا وزن‌های برآورد شده‌ی اولیه) انجام می‌گیرد.
 - با بکار بردن باقیمانده‌های حاصل از سرشکنی و استفاده از تابع وزن متناظر با برآوردگر مورد نظر، وزن‌های جدید محاسبه می‌گردد.
 - یک سرشکنی کمترین مربعات بر مبنای وزن‌های جدید محاسبه شده، صورت می‌گیرد. سپس مراحل از گام II مجدد تکرار می‌گردد تا زمانی که اختلاف دو حل متوالی ناچیز گردد.
- شکل ۱ دیگرام کلی مراحل IRLS را نمایش می‌دهد.



شکل ۱- دیگرام برآورد پایدار با استفاده از IRLS

استفاده از روش سرشکنی کمترین مربعات با وزن‌دهی مجدد، فرآیند متداولی برای برآورد پایدار می‌باشد. اما، بایستی توجه داشت که گرچه محاسبات این روش ساده می‌باشد، قابلیت‌های برآورد پایدار را به تحلیل می‌برد. از این‌رو تا حدی مشکلات اصلی کمترین مربعات یعنی سهولت انتشار خطاهای ناخواسته در طول

^۱ در برآوردهای Danish و Andrews، σ انحراف معیار باقی‌مانده‌ها را نمایش می‌دهد

• Omission، که نماینده‌ای برای خطای نوع دوم (به بیان دیگر، احتمال باقی ماندن یک نقطه‌ی اشتباه در لیست داده‌ها) می‌باشد. بالاتر بودن این آماره، به معنای بیش‌تر بودن تعداد اشتباهات شناخته نشده است. این آماره‌ها بر حسب درصد عبارتند از:

$$Accuracy = \frac{EDB}{TNDB} \times 100 \quad (14)$$

$$Commission = \frac{IEDB}{TNDB} \times 100 \quad (15)$$

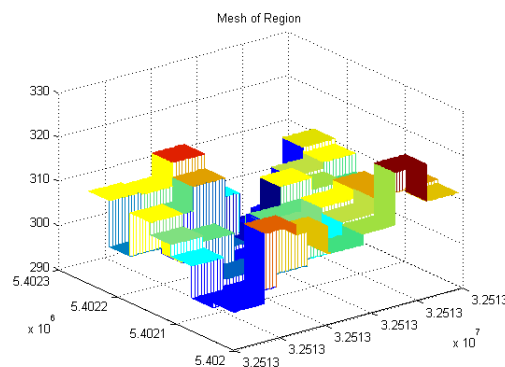
$$Omission = \frac{NDB}{TNDB} \times 100 \quad (16)$$

که در این روابط، ^۱EDB تعداد نقاط اشتباهی است که به‌طور صحیح به‌عنوان نقاط دارای خطای بارز شناسایی گردیده‌اند؛ ^۲TNDB تعداد کل نقاط شناسایی شده است؛ ^۳IEDB تعداد نقاطی است که به اشتباه به‌عنوان نقاط دارای خطای بارز شناسایی شده‌اند؛ و ^۴NDB تعداد نقاط دارای خطای بارز است که شناسایی نشده‌اند.

۴-۲-۱- خطاهای بارز منفرد

به مختصات Z تعدادی از نقاط که در سطح منطقه بصورت تصادفی انتخاب شدند، مقداری خطای بارز افزوده شد (۴ تا ۲۰ برابر بزرگ‌تر از RMSE اصلی). سپس سرشکنی با استفاده از روش کلاسیک کمترین مربعات و برآوردگرهای پایدار بیشترین شباهتی که در جدول ۱ آورده شده‌اند، برای تولید مدل رقومی منطقه و شناسایی خطاهای بارز انجام گرفت.

به‌عنوان یک مثال، مدل رقومی تولید شده، و نمایش دو و سه‌بعدی نتایج شناسایی خطای بارز با استفاده از برآوردگر پایدار LI ، در شکل‌های ۳ تا ۵ آورده شده است.



شکل ۲- مدل رقومی تولید شده از مجموعه داده‌ی اصلی بدون خطا

در این مجموعه داده، درصدی از نقاط انتخاب و خطای بارزی به اندازه‌ی ۴ تا ۲۰ برابر بزرگ‌تر از RMSE اصلی به مختصات ارتفاعی آن‌ها اعمال شد. نقاط انتخاب شده و همچنین مقدار خطای اعمال شده به آن‌ها ثبت گردید تا با نتایج فرآیند شناسایی خطای بارز مقایسه شود.

۴-۲-۲- فرآیند آزمون

در این مطالعه دو حالت برای حضور خطاهای بارز در سطح منطقه در نظر گرفته شده است. مورد نخست این که چندین نقطه‌ی منفرد دارای خطای بارز در میان داده‌ها وجود داشته باشد که در سطح منطقه بصورت تصادفی پراکنده شده‌اند، و مورد دوم حالتی است که خطاهای بارز خوشه‌ای در سطح منطقه پراکنده شده باشد.

به منظور ارزیابی نتایج آزمون، چند آماره تعریف شد:

- Accuracy، که دقت فرآیند شناسایی خطاهای بارز را نمایش می‌دهد. بالاتر بودن مقدار آن، حاکی از دقت بالاتر روش مورد استفاده در شناسایی خطاهای بارز می‌باشد.
- Commission، که نماینده‌ای برای خطای نوع اول (به بیان دیگر، احتمال در نظر گرفتن یک نقطه‌ی صحیح به‌عنوان اشتباه) می‌باشد؛ بدین ترتیب که هرچه مقدار این آماره بیشتر باشد، بیان‌گر این است که تعداد بیشتری از نقاط بدون خطا به اشتباه به‌عنوان نقاط دارای خطای بارز شناخته شده‌اند.

^۱ Exactly Detected Blunders

^۲ Total Number of Detected Blunders

^۳ Inexactly Detected Blunders

^۴ Not Detected Blunders

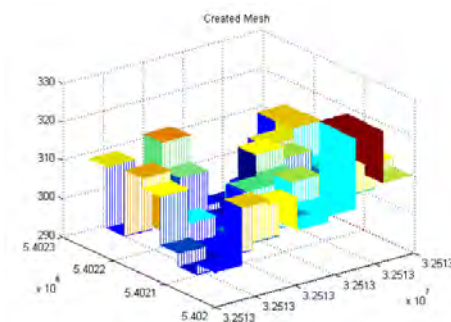
نتایج خام شناسایی خطاهای بارز با استفاده از برآوردهای مورد استفاده، برای یک بار تولید تصادفی خطای بارز منفرد در سطح منطقه، در جدول ۳ دیده می‌شود. این نتایج، سپس برای محاسبه‌ی آماره‌های معرفی شده مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

در این جدول GCPRMSE و CHPRMSE، به ترتیب RMSE را برای نقاط کنترل و چک نمایش می‌دهد؛ EDB تعداد نقاط اشتباهی است که به طور صحیح شناسایی شده است؛ IEDB تعداد نقاط صحیحی است که به اشتباه به عنوان خطای بارز شناسایی شده‌اند؛ و NDB تعداد نقاط اشتباهی است که الگوریتم نتوانسته آن‌ها را شناسایی کند. بایستی این نکته را خاطر نشان نمود که مقایسه‌ی میان RMSE تولید شده از روش‌های مختلف مهم است و مقدار RMSE به تنهایی دارای اهمیت نیست، چراکه هدف از این مطالعه مقایسه‌ی روش‌ها در شناسایی خطاهای بارز و تولید مدل رقومی زمین بود، به همین دلیل نیز از یک روش ساده‌ی انترپولاسیون سطح دوخطی به عنوان روش مدل‌سازی استفاده شد.

جدول ۳- نتایج روش‌های شناسایی خطاهای بارز در مورد خطاهای منفرد

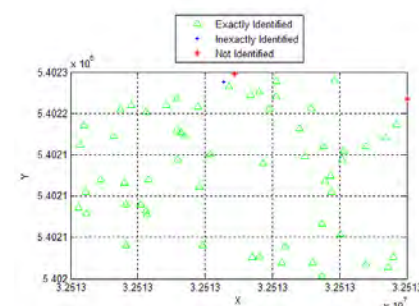
برآوردها	GCP RMSE (m)	CHP RMSE (m)	EDB	IEDB	NDB
L2	30.8	12.6	57	6	3
L1	31.5	8.7	58	1	2
L1-L2	31.4	8.5	58	0	2
Lp	31.1	9.1	58	4	2
Fair	31.4	8.5	58	0	2
Huber	31.4	8.6	58	0	2
Cauchy	31.6	9.1	58	0	2
Welsch	31.5	8.7	58	0	2
Tukey	31.6	8.0	58	0	2
Danish	31.4	7.3	58	5	2
Andrews	31.2	8.7	58	5	2

همان‌گونه که اشاره شد، این نتایج برای یک بار تولید تصادفی خطاهای بارز منفرد در سطح منطقه می‌باشد. برای دسترسی به امکان مقایسه‌ی بهتر روش‌ها، تولید تصادفی خطاها شش بار انجام و آماره‌های معرفی شده برای هر مجموعه داده، از نتایج حاصل از تمامی روش‌ها بدست آمد. سپس، مقادیر میانگین آن‌ها در شش مرحله محاسبه شد. نتایج در جدول ۴ آورده شده است. با مقایسه‌ی نتایج ارائه شده در این جدول، می‌توان

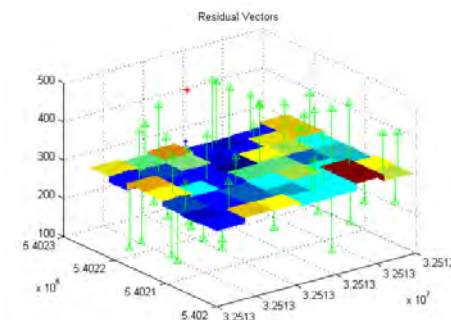


شکل ۳- مدل رقومی تولید شده با استفاده از برآوردها در L1 فرآیند شناسایی خطاهای بارز منفرد

در شکل‌های ۴ و ۵، مثلث‌های سبزرنگ، نمایانگر نقاط دارای خطای بارزی است که توسط روش مورد استفاده به طور صحیح شناسایی شده‌اند؛ ستاره‌های قرمز رنگ برای نمایش نقاط دارای خطای بارزی که الگوریتم قادر به شناسایی آن نبوده، به کار رفته است؛ و دایره‌های آبی رنگ نقاط صحیحی هستند که توسط الگوریتم به اشتباه به عنوان نقاط دارای خطای بارز شناسایی شده‌اند. همچنین، در شکل ۵ بردارهای خطا برای تمامی نقاط شناسایی شده توسط الگوریتم در نمایش سه بعدی دیده می‌شود.



شکل ۴- نمایش دو بعدی نتایج فرآیند شناسایی خطاهای بارز منفرد با استفاده از برآوردها در L1



شکل ۵- نمایش سه بعدی نتایج شناسایی خطاهای بارز منفرد با استفاده از برآوردها در L1

دریافت که در حضور مشاهدات دارای خطای بارز در میان داده‌ها، برآوردگرهای پایدار نسبت به روش کلاسیک کمترین مربعات عملکرد بهتری دارند.

جدول ۴- مقادیر متوسط نتایج شش بار تولید و شناسایی خطاهای

برآوردگر	بارز منفرد				
	GCP RMS E (m)	CHP RMS E (m)	Co mm issi on (%)	Om issi on (%)	Accura cy (%)
L2	25.9	10.4	21.7	2.1	76.1
L1	26.5	8.2	11.8	2.0	86.1
L1-L2	26.4	8.1	8.5	2.1	89.4
Lp	26.2	8.2	6.7	2.1	91.1
Fair	26.4	8.0	8.2	2.1	89.7
Huber	26.5	8.1	8.5	1.7	89.4
Cauchy	26.6	8.3	11.7	2.1	86.2
Welsch	26.6	8.3	11.6	2.1	86.2
Tukey	26.6	8.1	8.8	2.1	89.1
Danish	26.6	7.6	3	2.2	94.8
Andrews	26.4	8.1	4	2.2	93.8

معناست که همان‌گونه که انتظار می‌رفت روش‌های برآورد پایدار کمتر تحت تاثیر مشاهدات اشتباه قرار می‌گیرند؛ و لذا در حضور خطاهای بارز، دقت مدل رقومی بدست آمده با استفاده از برآوردگرهای پایدار بیش از روش کلاسیک کمترین مربعات می‌باشد.

- نتایج حاصل از مقایسه‌ی مقادیر بدست آمده از روش‌های مختلف برای آماره‌ی Commission، نیز قابل انتظار بود. مقدار این آماره برای روش کمترین مربعات کلاسیک بیش از تمامی برآوردگرهای پایدار بدست آمد (به‌عنوان مثال ۲۱/۷ درصد به‌ازای روش کمترین مربعات، در مقابل ۳ درصد حاصل از برآوردگر پایدار Danish). همان‌طور که اشاره شد، این آماره نماینده‌ای از احتمال وقوع خطای نوع اول، یعنی درنظر گرفتن مجموعه‌ای از نقاط صحیح به‌عنوان خطای بارز، می‌باشد. در روش کمترین مربعات کلاسیک خطای ناشی از مشاهدات اشتباه روی سایر نقاط پخش می‌شود و در نتیجه مقدار باقیمانده‌ی نقاط مجاور نقطه‌ی دارای خطای بارز، افزایش می‌یابد. از این رو احتمال حذف تعداد بیش‌تری از نقاط صحیح به‌عنوان اشتباه (خطای نوع اول) افزایش می‌یابد.

- آماره‌ی محاسبه شده‌ی بعدی، آماره‌ی Omission می‌باشد که احتمال وقوع خطای نوع دوم (عدم شناسایی خطاهای بارز) را بیان می‌کند. همان‌گونه که نتایج نشان می‌دهند، در هنگام حضور خطاهای بارز از نوع منفرد در سطح منطقه، روش‌های کمترین مربعات و برآورد پایدار عملکرد نسبتاً مشابهی در مورد این آماره داشته‌اند (به‌عنوان مثال ۲/۱ درصد به‌ازای روش کمترین مربعات، در مقابل ۲/۲ درصد حاصل از برآوردگر پایدار Danish).

- و آخرین آماره‌ی مورد بررسی، آماره‌ی Accuracy می‌باشد، که دقت فرآیند شناسایی خطاهای بارز را نشان می‌دهد. مقایسه‌ی این آماره به ازای روش‌های مختلف نیز نشان دهنده‌ی توانایی بالاتر روش برآورد پایدار نسبت به روش کمترین مربعات کلاسیک می‌باشد (به‌عنوان مثال ۷۶/۱

- با مقایسه‌ی میان RMSE بدست آمده برای نقاط کنترل به ازای روش‌های مختلف (ستون دوم)، دیده می‌شود که این آماره در مورد روش کمترین مربعات کلاسیک مقدار کمتری دارد. (به‌عنوان مثال ۲۵/۹ متر به‌ازای روش کمترین مربعات، در مقابل ۲۶/۶ متر حاصل از برآوردگر پایدار Danish) اما بایستی این نکته را در نظر داشت که کمتر بودن RMSE روش کمترین مربعات کلاسیک روی نقاط کنترل، بیان‌گر دقت بالاتر این روش نیست. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد، روش کمترین مربعات برای رسیدن به کمترین باقیمانده‌ها خطای یک نقطه را روی سایر نقاط پخش می‌کند، و در نتیجه RMSE روی نقاطی که در فرآیند سرشکنی حضور داشته‌اند (نقاط کنترل) کاهش می‌یابد. اما اگر از نقاطی که در داخل سرشکنی حضور نداشته‌اند (نقاط چک) برای محاسبه‌ی RMSE استفاده شود، دقت مدل‌سازی مشخص می‌گردد؛ همان‌گونه که از ستون سوم جدول دیده می‌شود RMSE روی نقاط چک برای روش برآورد پایدار مقدار کمتری دارد (به‌عنوان مثال ۱۰/۴ متر به‌ازای روش کمترین مربعات، در مقابل ۷/۶ متر حاصل از برآوردگر پایدار Danish)، این گفته بدین

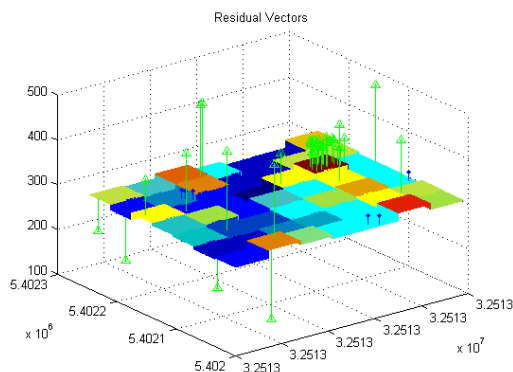
درصد به‌ازای روش کمترین مربعات، در مقابل ۹۴/۸ درصد حاصل از برآوردگر پایدار (Danish).

- در مورد برآوردهای پایدار می‌توان با توجه به آماره‌های مختلف ترتیب متفاوتی را برای قدرت آن‌ها در نظر گرفت، اما به طور کلی به‌نظر می‌رسد که برآوردگر Danish عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردها داشته است.

۲-۲-۴- خطاهای بارز خوشه‌ای

به‌عنوان آزمون بعدی، چندین خطای بارز خوشه‌ای به نقاط کنترل معرفی شد. و سپس از روش سرشکنی کمترین مربعات و همچنین برآورد پایدار با استفاده از برآوردهای گفته شده، برای تولید مدل رقومی زمین و شناسایی خطاهای بارز استفاده گردید.

در این حالت نیز مدل رقومی تولید شده، و نمایش دو و سه بعدی شناسایی خطاهای بارز در هنگام استفاده از برآوردگر L1 آورده شده است. (اشکال ۶ تا ۸)

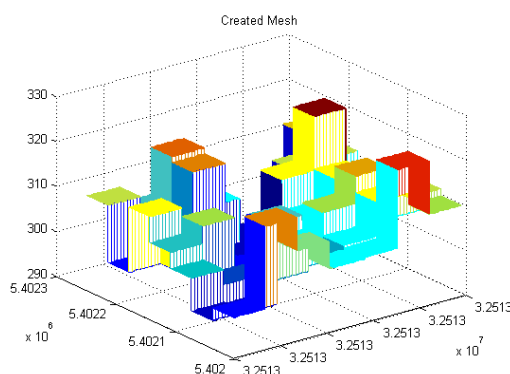


شکل ۸- نمایش سه بعدی نتایج شناسایی خطاهای بارز خوشه‌ای با استفاده از برآوردگر L1

نتایج عددی به‌دست آمده از روش‌های مختلف روی داده‌های حاصل از یک بار تولید تصادفی خطاهای بارز خوشه‌ای در سطح منطقه در جدول ۵ آورده شده است. المان‌های این جدول مشابه جدول ۳ می‌باشد.

جدول ۵- نتایج روش‌های شناسایی خطاهای بارز در مورد خطاهای خوشه‌ای

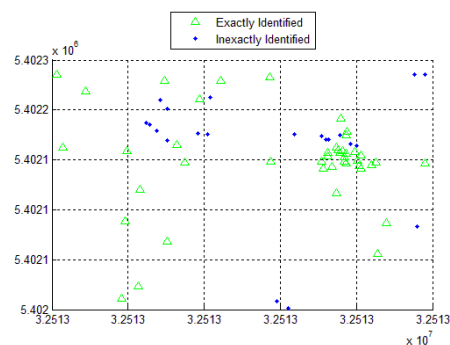
Estimator	GCP RMSE (m)	CHP RMSE (m)	EDB	IEDB	NDB
L2	23.5	12.9	34	26	2
L1	25.3	10.2	34	13	2
L1-L2	24.3	10.4	34	13	2
Lp	24.0	11.4	34	18	2
Fair	24.2	10.5	34	12	2
Huber	24.4	10.3	34	18	2
Cauchy	25.2	10.5	34	10	2
Welsch	24.7	10.9	34	15	2
Tukey	23.8	9.4	34	18	2
Danish	23.8	14.1	34	21	2
Andrews	23.7	12.3	34	21	2



شکل ۶- مدل رقومی تولید شده با استفاده از برآوردگر L1 در فرآیند شناسایی خطاهای بارز خوشه‌ای

این بار نیز تولید خطاهای بارز شش بار انجام و برای هر مجموعه داده، سرشکنی با استفاده از تمامی روش‌ها صورت گرفت، آماره‌ها محاسبه شد، و سپس میانگین نتایج بدست آمد (جدول ۶).

با مقایسه‌ی نتایج ارائه شده در جدول ۶ می‌توان دریافت که در هنگام حضور مشاهدات اشتباه خوشه‌ای نیز روش‌های برآورد پایدار عملکرد بهتری نسبت به روش کلاسیک کمترین مربعات دارد. تمامی آماره‌های ارائه شده در این جدول، همانند آن‌چه که در مورد جدول ۴ گفته شد، قابل تحلیل هستند.



شکل ۷- نمایش دو بعدی نتایج فرآیند شناسایی خطاهای بارز خوشه‌ای با استفاده از برآوردگر L1

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه، کاربرد روش برآورد پایدار با استفاده از وزن دهی مجدد (IRLS)، در مقابل شیوهی کلاسیک کمترین مربعات در مدل سازی رقومی زمین مورد آزمون قرار گرفت.

نتایج حاصل از این پژوهش را می توان بدین صورت خلاصه نمود:

مدل سازی رقومی زمین بر مبنای سرشکنی کمترین مربعات در زمانی که هیچ گونه خطای سیستماتیک یا بارز در مشاهدات و در مدل ریاضی حضور نداشته باشد، بهترین انتخاب است. جوابی که سرشکنی کمترین مربعات در این حالت ارائه می دهد، محتمل ترین جواب است. اما در شرایط مخالف، یعنی شرایطی که هرگونه خطای سیستماتیک یا بارز رخ داده باشد، جواب حاصل از کمترین مربعات توسط این خطاها مخدوش شده و بنابراین نتایج غیر قابل قبولی تولید خواهد نمود. درحالی که روش برآورد پایدار نسبت به حضور این خطاهای ناخواسته پایداری بیشتری دارد و از این رو جوابی که تولید می نماید به جواب صحیح نزدیک تر است.

علاوه بر آن دریافته شد که در برخی شرایط پیچیده تر به لحاظ حضور داده های اشتباه در لیست مشاهدات، به ویژه در هنگام حضور خطاهای بارز خوشه ای، روش کمترین مربعات با وزن دهی مجدد (IRLS) کارایی کمی دارد؛ چراکه بر مبنای سرشکنی کمترین مربعات قرار دارد که آلوده به خطا است.

به جای دنبال نمودن فرآیند کلاسیک برای محاسبه ی برآورد پایدار با استفاده از وزن دهی مجدد، پیشنهاد می گردد استفاده از روش های بهینه سازی کلی (GO) مانند الگوریتم ژنتیک به منظور انجام محاسبات مربوط به برآورد پایدار مورد آزمون قرار گیرد.

جدول ۶- مقادیر متوسط نتایج شش بار تولید و شناسایی خطاهای جدول ۶- بارز خوشه ای

برآوردگر	GCP RMS E (m)	CHP RM SE (m)	Comm ission (%)	Omissi on (%)	Accur acy (%)
L2	22.4	10.5	45.0	4.4	50.6
L1	23.0	9.4	39.0	5.9	55.0
L1-L2	22.9	9.2	37.7	4.6	57.6
Lp	22.7	9.3	36.6	4.7	58.7
Fair	22.9	9.2	36.0	4.8	59.2
Huber	22.9	9.2	37.9	4.6	57.5
Cauchy	23.6	9.5	39.5	4.5	56
Welsch	23.2	9.4	39	4.6	56.4
Tukey	23.1	8.9	34.2	4.6	61.2
Danish	22.9	9.3	28.9	5.4	65.8
Andrews	22.7	9.02	29.19	5.24	65.6

گرچه نتایج آزمون در مورد خطاهای بارز خوشه ای نیز نشان گر توانایی بالاتر روش های برآورد پایدار با استفاده از IRLS می باشد، اما همان گونه که دیده می شود عملکرد در هنگام حضور خطاهای بارز خوشه ای نسبت به حالتی که خطاهای بارز منفرد در داده ها وجود داشته باشد، کاهش می یابد. بیشترین دقت بدست آمده در این حالت برای برآوردگر Danish می باشد که برابر ۶۵/۸ درصد بدست آمده است. اگر چه در این حالت نیز دقت حاصل از برآوردهای پایدار بیش از دقت روش کمترین مربعات کلاسیک (۵۰/۶ درصد) بوده، اما دقت بالایی حاصل نشده است. همان گونه که اشاره شد استفاده از روش کمترین مربعات با وزن دهی مجدد، گرچه نسبت به حالت کمترین مربعات کلاسیک نتایج قابل قبول تری ارائه می دهد، اما به دلیل وابسته بودن فرآیند وزن دهی به مراحل قبلی سرشکنی که داده های اشتباه در آن ها حضور داشته است، به طور کامل پایدار نمی باشد. این مشکل خصوصا در هنگامی که داده های اشتباه به صورت خوشه ای در کنار هم حضور دارند، خود را بیش تر نمایان می سازد.

مراجع

- [1] Binh, T. Q. (2007). "On the detection of gross errors in digital terrain model source data." VNU Journal of Science, Earth Sciences 23 (2007) 213- 219.
- [2] Catlow, D.R. (1986). "The multu diciplinary application of DEMs." Auto Carto London, pp. 447-454.
- [3] Maune, D.F., Huff, L.C., and Guenther, G.C., (2001)." Digital Elevation Model techniques and applications, The DEM user Manual." American Society for photogrammetry and Remote Sensing,

- Bethesda, MD, pp. 367-394.
- [4] Petrie, G. and Kennie, T., (1990). "Terrain modeling in surveying and civil engineering." Whittles publishing, Caithness, England, pp. 85-111.
 - [5] Saati, A., Arefi, H., Schmitt, M., and Stilla, U. (2011). "Statistically robust detection and evaluation of errors in DTMs." Proceedings of Joint Urban Remote Sensing Event (JURSE 2011), Munich: 305-308.
 - [6] Berber, M. and Hekimoglu, S. (2003). "What is the reliability of conventional outlier detection and robust estimation in trilateration networks?" Survey Review 37, 290.
 - [7] Baarda, W. (1968), "A testing procedure for use in geodetic networks." Netherlands Geodetic Commission, Publications in Geodesy, New Series, Vol. 2, No. 5, Delft, The Netherlands, 97 pp.
 - [8] Valero, J. L. B., and Moreno, S. B., (2005). "Robust estimation in geodetic networks." Física de la Tierra, ISSN: 0214-4557 (2005) 7-22.
 - [9] Box, G.E.P. (1953). Non-normality and tests on variances. Biometrika, 40, 318- 355.
 - [10] Andrews, D.F., Bickel, P.J., Hampel, F.R., Huber, P.J., Rogers, W.H. and Tukey, J.W. (1972). "Robust estimates of location." Princeton University Press, Princeton, 372 pp.
 - [11] Huber, P.J. (1981). Robust statistics. John Wiley & Sons, New York, 328 pp.
 - [12] Fuchs, H. (1982). "Contribution to the adjustment by minimizing the sum of absolute residuals." Manuscripta Geodaetica , 7,151-207.
 - [13] Harvey, B.R. (1993). "Survey network adjustments by the L1 method." In Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying , 59, 39-52.
 - [14] Krarup, T., Juhl, J., and Kubik, K. (1980). "Götterdämmerung over least squares adjustment." In Proc. 14th Congress of the International Society of Photogrammetry , Vol B3, 369-378. Hamburg.
 - [15] Krauss, K. (1992). "Photogrammetry." Volume 2, Advanced Methods and Applications. Ümmeler Verlag, Berlin.
 - [16] Yang, Y., (1999). "Robust estimation of geodetic datum transformation." Journal of Geodesy, 73, 268-274.
 - [17] Felicísimo, A. (1994). "Parametric statistical method for error detection in digital elevation models." ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing: 49 (1994) 29.
 - [18] Hannah, M. (1981). "Error detection and correction in digital terrain models." Photogrammetric Engineering and Remote Sensing: 47 (1981) 63.
 - [19] Li, Z. L., Zhu, Q., and Gold, C. (2005). "Digital terrain modeling: principles and methodology." CRC Press, Boca Raton.
 - [20] Li, Z. L. (1990). "Sampling Strategy and Accuracy Assessment for Digital Terrain Modelling." Ph.D. thesis, The University of Glasgow.
 - [21] Lopez, C. (1997). "On the improving of elevation accuracy of Digital Elevation Models: a comparison of some error detection procedures." In Scandinavian Research Conference on Geographical Information Science (ScanGIS), Stockholm, Sweden, (1997) 85.
 - [22] Chen, Y.Q., Kavouras, M. & Chrzanowski, A. (1987). "A strategy for the detection of outlying observations in measurements of high precision." The Canadian Surveyor , Vol. 41, No. 4, 527-40.
 - [23] Gokalp, E., Gungor, O., Boz, Y. (2008). "Evaluation of Different Outlier Detection Methods for GPS Networks." sensors, ISSN 1424-8220.
 - [24] Zhang, Z., 1996. <http://research.microsoft.com/en-us/um/people/zhang/inria/publis/tutorial/estim/node24.html> (accessed on 9/8/2012).