

تحلیل اطلاعات مکانی در فضای خمیده با هندسه ناقلیدسی

محمدرضا ملک*

استاد، گروه سیستم‌های اطلاعات مکانی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
mrmalek@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت: آبان 1401، تاریخ تصویب: آذر 1401)

چکیده

هدف غایی اطلاعات مکانی چه به‌عنوان بخشی از فناوری و چه به‌عنوان علم، پاسخگویی به مسایل و پرسش‌های مرتبط با مکان، موقعیت و محل است. از این‌رو هندسه برای توصیف، ذخیره و تحلیل بطور گسترده استفاده می‌شود. بی‌شک یکی از مهمترین مشخصات اطلاعات مکانی، ویژگی‌های هندسی و از بارزترین انواع تحلیل‌ها، نوع هندسی و سنجه‌های کمی روی چنین داده‌هایی است. عمده تحلیل‌ها و سنجه‌های هندسی مورد استفاده در بخش‌های مختلف مبتنی بر هندسه اقلیدسی است. به دیگر سخن، عمده آنالیزهای شناخته‌شده هندسی مورد استفاده با این فرض بنا شده‌اند که از یک نقطه خارج خط فقط می‌توان یک خط بموازات آن خط ترسیم کرد. بنابراین، برای مثال باید مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180 درجه و با فقط با سه نوع چندضلعی منتظم می‌توان پاره‌چینی را در صفحه انجام داد. در هندسه‌های ناقلیدسی فرض یاد شده و نتایج پیروی آن نقض می‌شوند. هدف این پژوهش تبیین نیاز به استفاده از هندسه ناقلیدسی است. در این پژوهش، بصورت کاربردی نشان داده می‌شود که می‌توان شبکه‌های اجتماعی مکان‌مبنا و یا شبکه‌های حسگر را در بستر هندسه ناقلیدسی تحلیل کرد. در این پژوهش، همچنین نشان داده می‌شود که هندسه حاکم بر شبکه اجتماعی مکان‌مبنا یک هندسه هذلولوی با انحنا منفی است. این مهم می‌تواند در مسایلی چون مسیریابی و خوشه‌بندی بسیار موثر باشد. بیش از آن، استفاده از پاره‌چینی ناقلیدسی ابزاری مناسب برای ارایه سرویس موقعیت جاری کاربر روی نقشه در سیستم‌های همراه و فراگیر است.

واژگان کلیدی: اطلاعات مکانی فراگیر، انحنا، شبکه اجتماعی مکان‌مبنا، هندسه ناقلیدسی، هندسه هذلولوی

1- مقدمه

هدف غایی اطلاعات مکانی چه به‌عنوان بخشی از فناوری و چه به‌عنوان علم، پاسخگویی به مسایل و پرسشهای مرتبط با مکان، موقعیت و محل است. از این‌رو هندسه برای توصیف، ذخیره و تحلیل بطور گسترده استفاده می‌شود. بی‌شک یکی از مهمترین مشخصات اطلاعات مکانی، ویژگی‌های هندسی و از بارزترین انواع تحلیل‌ها، نوع هندسی و سنجه‌های کمی روی چنین داده‌هایی است. پیشرفت‌های گسترده‌ای در این حوزه تاکنون صورت گرفته و در منابع اصلی مطالب فراوانی برای آن می‌توان یافت (برای نمونه [1] و [2]). همچنین تحلیل‌ها و سنجه‌های هندسی ابزاری قوی برای شناخت و بررسی انواع داده‌ها و البته کلان‌داده می‌باشد. بسیاری از ارزیابی‌های احتمالاتی و آماری را می‌توان با سنجه‌های هندسی گویاتر و دقیق‌تر دریافت کرد. روی همین اصل و بابت اهمیت ویژگی‌های هندسی، استاندارد ISO 19107 و یکسری استاندارد دیگر اختصاص به مشخصات هندسی و توپولوژی عوارض مکانی دارد.

از سوی دیگر، شاهد بروز و رواج گسترده ابزار رایانشی نوین در مورد اطلاعات مکانی فراگیر و همه‌جاگاه¹ و شبکه‌های اجتماعی هستیم. این محیط‌ها خود منشا اصلی تولید کلان‌داده نیز هستند. درواقع در دنیای جدید رسانه‌ها و حسگرها نیاز شدیدی به محیط‌های یادشده وجود داشته و این خود انگیزه گسترش وسیع آن‌ها شده‌است.

عمده تحلیل‌ها و سنجه‌های هندسی مورد استفاده در بخش‌های مختلف مبتنی بر هندسه اقلیدسی است. به دیگر سخن، عمده آنالیزهای شناخته‌شده هندسی مورد استفاده با این فرض بنا شده‌اند که از یک نقطه خارج خط فقط می‌توان یک خط به‌موازات آن خط ترسیم کرد. بنابراین، برای مثال باید مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180 درجه و یا فقط با سه نوع چندضلعی منتظم می‌توان پاره‌چینی را در صفحه انجام داد. در هندسه‌های ناقلیدسی فرض یاد شده و نتایج پیروی آن نقض می‌شوند. هدف این پژوهش تبیین نیاز به استفاده از هندسه ناقلیدسی است. نشان خواهیم داد که شبکه‌های اجتماعی بزرگ بویژه مکان‌مبنا را بهتر است در بستر هندسه ناقلیدسی بررسی کرد. درچنین شرایط معیارهایی چون انحنا نقش پررنگی در تفسیر و تحلیل داده‌ها ایفا خواهند کرد.

در ادامه فصل دوم اختصاص به پیشینه و تاریخچه هندسه ناقلیدسی دارد. در فصل سوم فشرده‌ای از مبانی نظری موردنیاز بیان می‌شود. فصل چهارم شواهد و نیاز به هندسه ناقلیدسی را به‌عنوان مشارکت اصلی مقاله تشریح خواهیم کرد. فصل پنجم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

2- پیشینه

هندسه شاخه‌ای از ریاضیات بوده که به مشخصات فضا چون اندازه، شکل و موقعیت نسبی اشیا می‌پردازد. اسناد موجود دال بر تدوین مبانی هندسه توسط اقلیدس دارند [3]. برای همین، هندسه رایج به هندسه اقلیدسی موسوم شده‌است. این هندسه بر مبنای پنج اصل موضوع یا بنیاد² بنا شده‌است. بلندترین و دست بر قضا غیربدیهی‌ترین اصل آن موسوم به فرض پنجم اقلیدس است. فرض کنید خط L و نقطه خارج آن یعنی P داده شده باشند. از نقطه P فقط و فقط یک خط می‌توان ترسیم کرد که از P عبور کرده و خط L را قطع نکند [4]. گرچه در فرض پنجم نامی از توافقی آورده نشده‌است ولی در نگارش هیلبرت در کتاب معروفش یعنی "مبانی هندسه" این اصل بدین شکل بیان شده‌است: "در یک صفحه X از هر نقطه p واقع در خارج خط راست L ، فقط و فقط یک خط راست می‌توان رسم کرد که L را قطع نکند. این خط راست را خط موازی با L گذرنده بر p می‌نامند." [5].

از گذشته دور دانشمندان و ریاضی‌دانان ایرانی چون خیام و خواجه‌نصیرالدین طوسی، فرض پنجم را بعنوان یک بنیاد و اصل موضوع قبول نداشته و بدنبال اثبات آن بودند. برای مثال خواجه نصیرالدین طوسی تلاش داشت تا با روش برهان خلف آنرا اثبات کند [4]. در دوران جدید فعالیت افرادی چون بایایی، گوس، لباچفسکی، هیلبرت و ریمان دو شاخه دیگر هندسه که به هندسه ناقلیدسی مشهور شده‌اند را پدید آوردند. در اولین نوع آن یعنی هندسه بیضوی و یا هندسه ریمانی از هر نقطه خارج خط بینهایت خط می‌توان به‌موازات آن خط ترسیم کرد، درحالی‌که در هندسه هذلولوی یا هندسه لباچفسکی نمی‌توان هیچ خطی را به‌موازات خط مفروض ترسیم کرد [4 و 6]. در هر دو نوع هندسه بنیاد و فرض پنجم نقض شده ولی با این حال به تناقض نیز منجر نمی‌شوند. آن‌ها یک سیستم کامل هندسی بوده و هر کدام

در بستر خود می‌توانند انواع نوینی از تحلیل‌ها و ابزار هندسی را فراهم سازند.

هندسه‌های ناقلیدسی کاربردهای گوناگونی در حوزه‌های مختلف از فیزیک گرفته تا نور و هنر پیدا کرده‌اند. برای مثال مدل فضا-زمان مینکوفسکی در فیزیک نسبیت با هندسه هذلولوی مرتبط بوده و یا تصویر معروف بهشت و جهنم (شکل 1) هنرمند سرشناس اشر تحت تاثیر همین هندسه بوده است [7].



شکل 1- فرشته‌ها و شیاطین در قالب پاره‌چینی هذلولوی [8]

هندسه ناقلیدسی جای خود را بتدریج در هوش مصنوعی و یادگیری عمیق باز می‌کند. برای نمونه در [9] الگوریتمی کارا برای بهینه‌سازی ریمانی جهت یادگیری در ساختارهای سلسله مراتبی ارائه داده شده‌است. در [10] یادگیری عمیق هندسی را بعنوان چتری برای مدل عصبی عمیق در شبکه و چندگونا¹ پیشنهاد شده‌است.

در [11] نشان داده شده که ژئودزیک‌های مورد استفاده در ناوبری روی نقشه در گوشی‌های هوشمند درواقع قابل مدل‌سازی با ژئودزیک‌ها و روابط متریک در یک فضای هذلولوی است. بنابراین، با فرض قبول حرکات انگشت‌ها برای ناوبری روی نقشه به‌عنوان یک متر، می‌توان آن‌را با متر روی فضای هذلولوی بررسی کرد.

3- مبانی نظری

هندسه ناقلیدسی بویژه هندسه لباچفسکی یا هندسه هذلولوی قابلیت‌های مهمی برای استفاده در حوزه اطلاعات

مکانی دارند. تمرکز ما در این مقاله روی هندسه هذلولوی است، بنابراین جزییات بیشتری از این هندسه در ادامه تشریح می‌شود.

در هندسه هذلولوی می‌توان ثابت کرد که اگر دو مثلث متشابه باشند، آنگاه قابل انطباق هم هستند. به عبارت دیگر ملاک "ز ز ز" برای قابلیت انطباق درست است. در هندسه هذلولوی ممکن نیست مثلثی را بدون تغییرشکل، تغییر مقیاس داد. در نتیجه در یک جهان هذلولوی، عکاسی بطور ذاتی جنبه فراواقع‌گرایی پیدا خواهد کرد. در نتیجه، خروجی قضیه مذکور این است که در هندسه هذلولوی یک پاره‌خط می‌تواند به کمک یک زاویه مشخص شود. یعنی یک زاویه از یک مثلث متساوی‌الساقین، طول یک ضلع را به طور منحصربه‌فرد تعیین می‌کند.

فضای هذلولوی با انحنای منفی ثابت را بسیار مشکل بتوان با ابزارهای رایج در فضای اقلیدسی نمایش داد. با این حال مدل‌های مختلفی برای نمایش یک صفحه هذلولوی و با انحنای منفی در صفحه اقلیدسی ارائه شده‌است. این مدل‌ها مشابه سامانه‌های افکنش که مشخصه معینی چون مساحت یا فاصله را حفظ کرده، هرکدام مشخصه‌ای از هندسه هذلولوی را حفظ می‌کنند. نیم‌صفحه پوانکاره، قرص پوانکاره و قرص بلترامی-کلاین از مدل‌های پرکاربرد می‌باشند.

برای درک ساده‌تر یک صفحه هذلولوی، فضای دو بعدی را بگونه‌ای در نظر بگیرید که با نزدیک شدن به محور افقی x ، فضا منقبض بشود (شکل 2). بنا بر آنچه گفته شد، علیرغم برابری دو طول از منظر ناظر خارجی، سفر از q_1 به q_2 کوتاه‌تر از p_1 به p_2 است. توجه شود که ارتباطی بین نیم‌صفحه پایین محور x با بالای آن نیست.

این نیم‌صفحه، نیم‌صفحه بالای پوانکاره نیز نامیده می‌شود. تفاوت بنیادی صفحه هذلولوی با یک نیم‌صفحه اقلیدسی نحوه محاسبه طول می‌باشد.

در نیم‌صفحه پوانکاره بخاطر همان خاصیت انقباضی یاد شده، فاصله از رابطه 1 محاسبه می‌شود.

$$d_h = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{y} \quad (1)$$

در این فضا، ژئودزیک یا کمان‌هایی از نیم‌دایره‌های گذرنده از دو نقطه با مرکز واقع روی محور x بوده و یا پاره‌خط‌های راست اقلیدسی عمود بر محور x می‌باشند.

4- پیاده‌سازی

در این فصل برای نمونه چند مبحث مختلف از کاربرد پیشنهادی هندسه هذلولوی در حوزه اطلاعات مکانی را تشریح می‌کنیم.

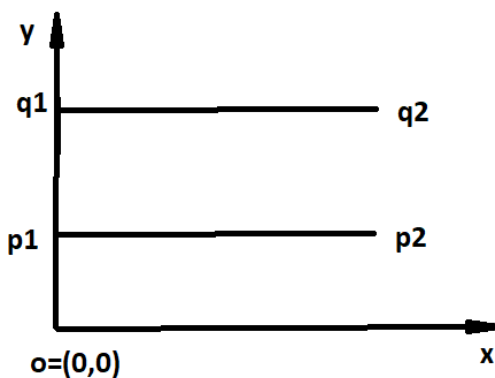
4-1- پاره‌چینی

منظور از پاره‌چینی منظم، موزاییک‌بندی و پرکردن صفحه با چندضلعی‌های منظم است. بنابراین نباید در پرکردن صفحه هیچ جای خالی بین چندضلعی‌ها باقی مانده و یا هیچ گوشه‌ای روی ضلع چندضلعی مجاور قرار گیرد. این چندضلعی‌ها خود نقش وجوه یک شبکه را ایفا خواهند کرد. در صفحه اقلیدسی فقط سه نوع پاره‌چینی منظم با اشکال مثلث، مربع و شش‌ضلعی منظم وجود دارد [13].

برخلاف هندسه اقلیدسی این موضوع در هندسه هذلولوی کاملاً متفاوت است. در این هندسه به تعداد بسیار فراوان می‌توان پاره‌چینی را انجام داد. در حقیقت به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq 6$ ، بینهایت روش مختلف برای پوشاندن صفحه‌ی هذلولوی با n -ضلعی‌های منظم است.

قضیه 1: به‌ازای هر جفت از اعداد صحیح $k > n > 2$ یک n -ضلعی منظم هذلولوی با زاویه $\frac{\pi(n-2)}{k}$ وجود دارد [12].

برای نمونه چند مورد پاره‌چینی هم در قرص پوانکاره و هم در قرص بلترامی-کلاین را محاسبه و در شکل‌های 3 تا 6 نمایش داده‌ایم. در آن‌ها m تعداد اضلاع و 1 تعداد چندضلعی‌های همسایه یک گوشه می‌باشند. پاره‌چینی هذلولوی این امکان را در ارایه سرویس‌های مکانی مانند نمایش موقعیت جاری کاربر فراهم می‌سازد که نمایش با تاکید روی وضعیت جاری کاربر انجام گیرد. بنابراین، با قرار دادن کاربر در چندضلعی بزرگتر، محل کاربر و اطراف او با جزئیات بیشتر و بزرگتر در دسترس است. با حرکت کاربر کافی است آن چندضلعی نیز در صفحه هذلولوی تغییر کند. استفاده از روش که بنوعی مانند افکنش چشم‌ماهی است، موجب می‌شود کاربر ضمن مشاهده جزئیات بیشتر در مرکز نقشه بتواند قسمت وسیعی از نقشه را هم در دسترس داشته باشد. در شکل 7 نمونه‌ای از این سرویس بر مبنای هندسه هذلولوی را می‌توان ملاحظه کرد.



شکل 2- مدلی برای صفحه هذلولوی در نیم‌صفحه اقلیدسی

یک مشخصه اصلی هر فضای هذلولوی داشتن انحنا یا خمیدگی گاوسی، K ، منفی است. در این مدل نیز براحتی می‌توان نشان داد که انحنا گاوس منفی است [12].

مدل قرص پوانکاره الگوی رایج دیگری برای صفحه هذلولوی در فضای اقلیدسی است. این مدل از نگاشت حاصل از تبدیل همدیسی¹ چون T روی نیم‌صفحه پوانکاره به داخل قرص واحد بدست می‌آید. متر ریمانی قرص واحد یا همان الگوی قرص پوانکاره از رابطه 2 محاسبه می‌شود.

$$d_h = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (2)$$

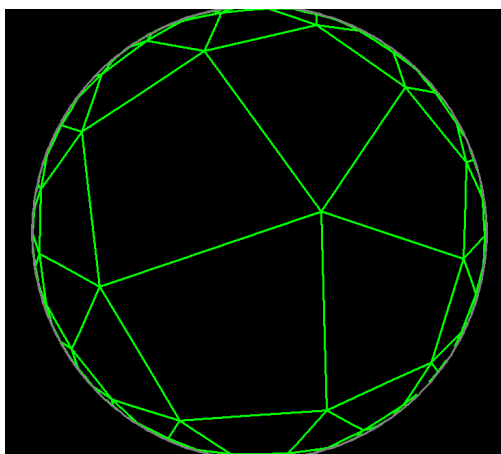
الگوی بلترامی-کلاین شبیه قرص واحد پوانکاره می‌باشد. در این الگو، برخلاف قرص پوانکاره ژئودزیک‌ها وترهای اقلیدسی دایره واحد بوده و بنابراین هم برای ساکنان آن فضا و هم برای ناظر خارجی، ژئودزیک خط راست است. البته این مدل دیگر همدیس نمی‌باشد [12].

در انتها جدول 1 را برای مقایسه مشخصات مهمی از انواع هندسه‌ها می‌آوریم.

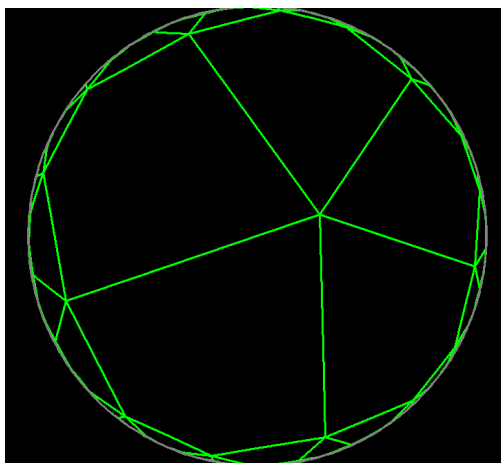
جدول 1- مشخصات انواع هندسه

نوع هندسه	اندازه انحنا	نسبت محیط به قطر دایره	مجموع زوایای مثلث	تعداد خطوط موازی
اقلیدسی	صفر	عدد پی	180 درجه	یک
هذلولوی	منفی	بزرگتر از عدد پی	کوچکتر از 180 درجه	بینهایت
بیضوی	مثبت	کوچکتر از عدد پی	بزرگتر از 180 درجه	صفر

آنها در مدل گراف با یک یال جهت‌دار/بدون جهت و وزندار/بدون وزن ارایه داده است. این رابطه می‌تواند رابطه دوستی، تماس و مانند آن باشد. با همه این موارد آنچه وجه اصلی تفاوت بین یک شبکه اجتماعی با شبکه‌های دیگر را شکل داده، ویژگی‌های یک شبکه اجتماعی است. در یک شبکه اجتماعی گره‌ها تمایل با ایجاد ارتباط هستند. بنابراین اگر یک گره مانند A با دو گره B و C رابطه داشته باشد آنگاه احتمال آنکه خود B با C هم رابطه داشته باشند باید از میانگین احتمال متوسط شبکه بیشتر باشد.



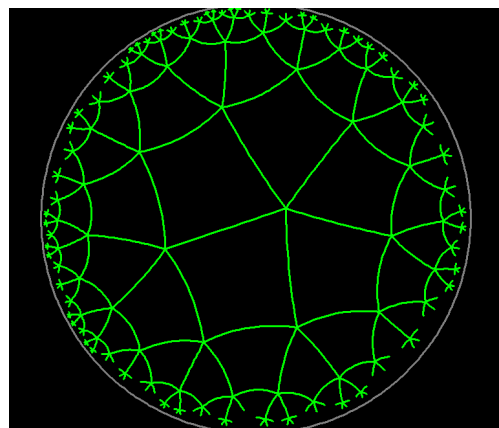
شکل 5- پاره‌چینی در قرص کلاین با $l=5$ و $m=4$



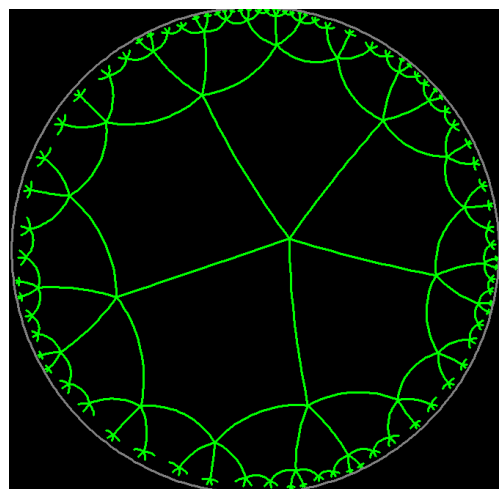
شکل 6- پاره‌چینی در قرص کلاین با $l=5$ و $m=5$

در دنیای واقعی تجربیاتی وجود دارند که مشخصات شبکه‌های بزرگ، شبکه‌های پیچیده¹ و شبکه‌های اجتماعی را بیان می‌کنند. با توجه به هدف این پژوهش ناگزیر بعضی از آنها را بگونه فشرده بیان می‌کنیم.

نخستین ویژگی شبکه‌های نام برده شده نوع توزیع حاکم بر آنها است. قانون حاکم بر توزیع درجه گراف‌های



شکل 3- پاره‌چینی در قرص پوانکاره با $l=5$ و $m=4$



شکل 4- پاره‌چینی در قرص پوانکاره با $l=5$ و $m=5$

حسن روش پیشنهادی در این واقعیت نهفته که براحتی مشابه عملیات یاد شده را برای نقشه‌های سه بعدی البته نسبت به کره پوانکاره و یا کره بلترامی-کلاین بجای قرص آنها می‌توان انجام داد. نکته مهم توجه به این نکته است که طول در یک فضای n بعدی هذلولوی از رابطه 3 محاسبه می‌شود.

$$d(u, v) = \text{acosh} \left\langle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\rangle \quad (3)$$

در رابطه 3، $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نماد ضرب داخلی، $\|\cdot\|$ نماد نرم و acosh همان آرک‌کسینوس هذلولوی است.

4-2- هندسه هذلولوی شبکه اجتماعی مکان-مبنا

یک شبکه اجتماعی، ساختاری شامل اشیا که در مدل گراف آنها را با گره نمایش داده، نوعی ارتباط بین اشیا که

شبکه‌های مزبور از قانون توانی پیروی می‌کند [14]. دو متغیر x و y با کمک قانون توانی مشابه رابطه 4 با هم ارتباط برقرار می‌کنند.

$$y = Ax^{\gamma} \quad (4)$$



شکل 7- نمایش نقشه با بزرگنمایی محدوده کاربر

در رابطه 4 بجز متغیرهای x و y بقیه مقادیر ثابت و مثبت هستند. بنابراین، بین لگاریتم‌های آن‌ها یک رابطه خطی برقرار خواهد بود. تجربه نشان داده که توزیع درجه بسیار از شبکه‌ها از قانون توانی پیروی می‌کنند که در آن بخشی از گره‌ها با درجه $\deg$ متناسب با $\deg^{\alpha}$ جایگاه $\alpha > 0$ می‌باشد.

یکی دیگر از مشخصات واقعی شبکه‌های یاد شده حداکثر فاصله بین گره‌ها می‌باشد. برای شبکه‌های بزرگ گرچه بنظر می‌رسد فاصله بین گره‌ها زیاد می‌شود ولی در عمل فاصله بین آن‌ها کم می‌باشد. پدیده‌های جهان کوچک¹ و جدایی شش درجه² به همین قاعده اشاره می‌کنند (برای نمونه [14]). بخاطر همین خصوصیت در پردازش گراف چنین شبکه‌هایی بجای قطر از قطر موثر برای اکثریت گره‌ها و نه

تمام آن‌ها استفاده می‌شود. شبیه همین قانون برای مثلث-های داخل شبکه و گره‌های تشکیل دهنده آن‌ها نیز تابع یک قانون نمایی است.

استفاده گسترده از تجهیزات هوشمند همراه و خدمات مکان مبنا³ نوع جدیدی از شبکه اجتماعی با عنوان شبکه اجتماعی مکان مبنا را ایجاد کرده‌است. در این شبکه با استفاده از فناوری‌هایی چون GPS، Web 2.0 و دستگاه‌های همراه امکان فعالیت‌هایی از قبیل اشتراک‌گذاری موقعیت خود یا پیام و تصویر، یافت نقاط جذاب محلی، اظهارنظر در مورد مکان‌های خاص، برقراری ارتباط با دوستان و یافتن دوستانی جدید در نزدیکی محل زندگی فراهم شده‌است. شبکه اجتماعی مکان مبنا نوعی شبکه اجتماعی بوده که مشخصات مکانی برای تشکیل آن حایز اهمیت می‌باشد. برای مثال، احتمال برقراری رابطه دوستی برای افراد داخل یک شهر از سایر شهرها بیشتر بوده و برای افراد یک کشور نسبت به سایر کشورها بیشتر خواهد بود.

حال سوال این است که چه ارتباطی بین یک شبکه اجتماعی مکان مبنا و یا حتی یک شبکه حسگر⁴ با هندسه ناقلیدسی بطور عام و هندسه هذلولوی بطور خاص وجود دارد. نخست یک تصویر کلی از نحوه رسیدن به پاسخ را بیان و سپس جزییات آنرا شرح خواهیم داد. بین قضیه پوانکاره-اولر برای مشخصه گراف و انحنا ی گاوسی که در هندسه دیفرانسیل معرفی شده رابطه‌ای وجود دارد. این رابطه در قالب قضیه‌ای بسیار مهم بنام قضیه گاوس-بونت شناخته می‌شود. بنابراین، به کمک این قضیه می‌توان برای یک شبکه گسسته مثل شبکه اجتماعی، مفاهیم هندسی و توپولوژی چون انحنا را معرفی کرد. حال این انحنا می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد که بیانگر حاکمیت فضاهای هندسی مختلف در آن شبکه است. از سوی دیگر، با استفاده از فرمول عمومی پوانکاره-اولر می‌توان تابع مشخصه گراف را محاسبه کرد. نشان خواهیم داد این مقدار برای شبکه‌های اجتماعی مکان-مبنا باندازه کافی بزرگ، مقداری منفی است. به دیگر سخن، انحنا ی گاوسی برای اینگونه شبکه‌ها منفی شده و حاکی از حاکمیت هندسه ناقلیدسی خواهد بود. اینک برای تبیین و استدلال برای فرضیه یاد شده چند قضیه و مفهوم ریاضی معرفی می‌شوند.

3 Location Based Services (LBS)

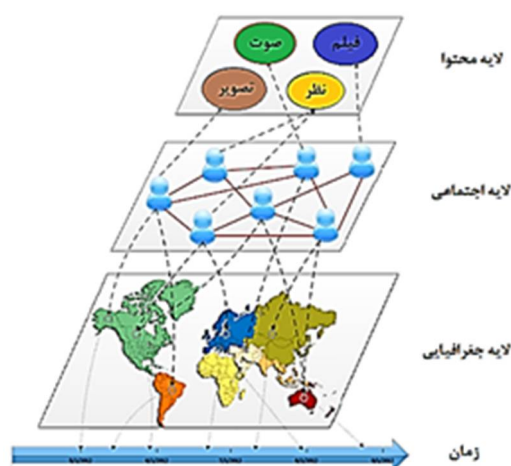
4 Sensor Network

1 Small World Phenomenon

2 Six-degree Separation

مکان‌ها، رسانه‌ها و موارد دیگری وجود داشته که خود را بصورت شبکه چند بخشی نشان می‌دهند. بین هر دسته با دسته دیگر نیز ارتباط وجود دارد. برای مثال بین افراد و مکان‌ها یا بین افراد و رسانه‌ها ارتباط وجود دارد (شکل 8).

حال مقدمات یاد شده را کنار این حقیقت بگذاریم که گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ مسطح نبوده و حداقل یک یال آن با یال دیگر متقاطع است، نتیجه حاصل خواهد شد. زیرا در گراف پیچیده چندبخشی شبکه اجتماعی مکان‌مبنا به-اندازه کافی بزرگ در اساس گراف‌های دوبخشی بزرگتری داشته و گونای آن باید بزرگتر از عدد دو شود. نتیجه مستقیم گونای بزرگتر از دو، انحنای منفی را منجر خواهد شد. بنابراین، می‌توان فضای هندسی حاکم بر چنین شبکه‌های اجتماعی مکان‌مبنا را هندسه ناقلیدسی دانست. گرچه استدلال بیان‌شده نظری بوده ولی براحتی می‌توان شواهد تجربی برای آن نیز پیدا کرد. برای این کار چند شبکه تصادفی با مشخصات بیان‌شده در قسمت اول فصل 4-1 تولید و خمیدگی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.



شکل 8- هستارهای ناهمگون در شبکه اجتماعی مکان‌مبنا [19].

پیشتر لازم به توضیح است که برای تولید متغیرهای تصادفی از تابع توزیع یکنواخت³ استفاده می‌کنیم. در نظریه احتمال، توزیع‌های متغیرهای تصادفی از اهمیت زیادی برای شناخت پدیده‌های تصادفی برخوردارند. از این میان توزیع یکنواخت کاربردهای فراوانی بخصوص در شبیه‌سازی داده‌های مربوط به توزیع‌های آماری دیگر دارند. به همین علت در این مقاله از آن استفاده کرده‌ایم. برای تولید تصادفی شبکه تعداد گره‌ها را 100 و متوسط درجه گره‌ها را 5 در نظر می‌گیریم.

گونای¹ یک گراف کمترین عدد صحیح n است که گراف می‌تواند بدون تقاطع با یال‌های خود روی یک کره با n دسته رسم شود [15]. بنابراین، گونای یک گراف مسطح صفر و یک گراف کامل دو بخشی با سه گره، $k_{3,3}$ خواهد بود. زیرا برای $k_{3,3}$ یک سوراخ جهت ترسیم یال‌ها بدون تقاطع لازم است.

قضیه 2 (رابطه اوایلر-پوانکاره): رابطه زیر برای عناصر یک گراف برقرار است.

$$\chi = |V| - |E| + |F| = 2 - 2g \quad (5)$$

که در آن V ، E ، F ، χ و g به ترتیب گره، یال، وجه (بصورت عمومی همان منطقه)، مشخصه اوایلر و گونا می‌باشند [16].

در ادامه قضیه بسیار پراهمیتی در ریاضیات که بین هندسه دیفرانسیل و ساختار توپولوژی آن ارتباط برقرار کرده معرفی می‌شود. این قضیه نگارش‌های مختلفی بر پایه مفروضات متفاوت دارد. ما فقط به یکی از آن‌ها اکتفا می‌کنیم. برای جزییات بیشتر بطور نمونه [17] دیده شود.

قضیه 3 (رابطه گاوس-بونت²): بین انحنای و خمیدگی با مشخصه اوایلر رابطه

$$\iint_M K dA = 2\pi\chi(M). \quad (6)$$

برقرار است. M ، K و dA رویه مورد نظر، انحنای گاوس و عنصر سطح می‌باشند.

از قضیه 3 می‌توان متوجه شد که بین انحنای و خمیدگی با مشخصه اوایلر رابطه مستقیمی وجود دارد. بنابراین، علامت مشخصه، نوع انحنای یعنی مثبت و منفی بودن آنرا معین خواهد کرد. قضیه 2 هم نشان می‌دهد علامت مشخصه اوایلر تابع عبارت $2-2g$ است.

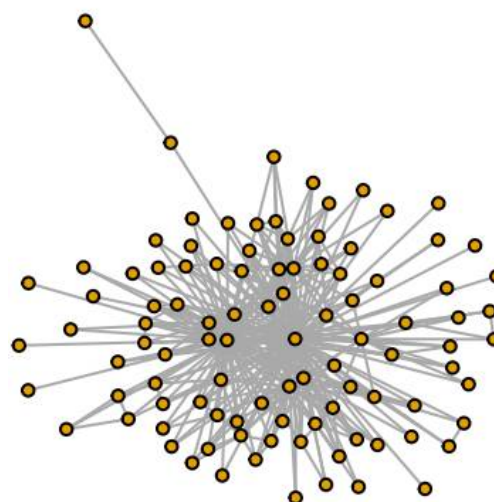
پرواضح است که به‌ازای $g < 2$ مقدار مشخصه مثبت، به‌ازای $g = 1$ مشخصه صفر و به‌ازای $g > 2$ مشخصه منفی و در نتیجه انحنای رویه منفی خواهد شد.

شبکه اجتماعی مکان‌مبنا را می‌توان گونه‌ای از یک شبکه پیچیده چندقسمتی دانست [18]. زیرا مجموعه‌های غیرهمگونی از هستارها را دربردارد. در این شبکه افراد،

3 Uniform Distribution

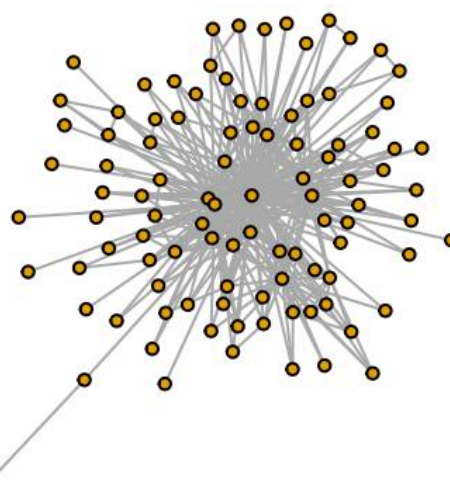
1 Genus

2 Gauss-Bonnet Theorem



شکل 9- شبکه با 100 گره، و توان متوسط 2 برای قانون توانی.

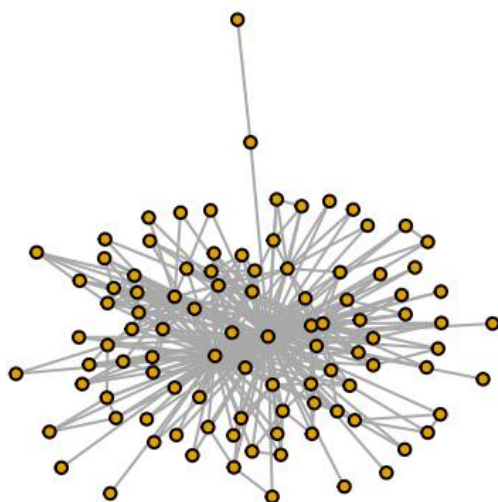
زاویه تصادفی هر گره تابع توزیع یکنواخت بطور تصادفی در بازه $[0, 2\pi]$ انتخاب شده‌اند. شعاع نیز بصورت تصادفی بر اساس قانون توانی تا حداکثر شعاع معرفی شده محاسبه شده‌اند. چون احتمال ایجاد ارتباط در شبکه‌های اجتماعی مکان‌مبنا بر اساس فاصله است، لذا با تعیین حد آستانه یک یال به گره‌هایی که فاصله آن‌ها کمتر از حد آستانه باشد وصل می‌شود. خاطرنشان می‌شود تمام برنامه‌ها و خروجی آن در نرم‌افزار R و به کمک کتابخانه igran انجام شده‌است. نتیجه چند شبکه تولید شده در اشکال 9-11 آورده شده‌است.



شکل 10- شبکه با 100 گره، و توان متوسط 2/2 برای قانون توانی.

نکته جالب در هر سه شبکه تولید شده این است که انحنای و خمیدگی هر سه شبکه منفی است. شبکه اول (شکل 9) دارای انحنای $K = -3.14$ ، شبکه دوم (شکل 10) دارای انحنای $K = -1.44$ و شبکه سوم که با متغیرهای شبیه

شبکه سوم تولید شد دارای انحنای $K = -1$ هستند. آزمایش انجام‌شده موید فرضیه تحقیق یعنی حاکمیت هندسه ناقلیدسی در شبکه اجتماعی مکان‌مبنا بزرگ است.



شکل 11- تولید مجدد شبکه با 100 گره، و توان متوسط 2/2 برای قانون توانی.

5- نتیجه‌گیری

با بروز کلان‌داده مکانی، شبکه‌های اجتماعی مکان‌مبنا و اطلاعات مکانی فراگیر، نیاز جدی به رویکردهای نوین رایانشی برای غلبه بر مشکلات و پیچیدگی‌های رخ داده بشدت حس می‌شود. چون یکی از مهمترین مشخصات اطلاعات مکانی ویژگی‌ها و تحلیل‌های هندسی است، ما در پژوهش حاضر نشان دادیم که می‌توان نسل جدید رایانش را در بستر هندسه‌های ناقلیدسی بویژه هندسه هذلولوی بررسی کرد.

در این مقاله نشان دادیم که پاره‌چینی هذلولوی و ارایه اطلاعات روی قرص پوانکاره و یا قرص بلترامی-کلاین می‌تواند برای ارایه سرویس‌های مکان‌مبنا مانند نمایش موقعیت جاری کاربر با تمرکز روی بافت موقعیت جاری کاربر در تجهیزات همراه مفید باشد. همچنین، با استدلال ریاضی بر پایه رابطه پوانکاره - اوپلر و قضیه گاوس - بونت نتیجه گرفتیم که هندسه هذلولوی، هندسه غالب و حاکم بر شبکه‌های اجتماعی مکان‌مبنا با توجه به خصوصیاتشان می‌باشد. این مهم را با تولید چندین شبکه نیز آزمودیم.

این گام، قدم نخست برای شروع استفاده از امکانات و ابزار هندسه‌های ناقلیدسی چون مسیریابی در فضای خمیده با انحنای منفی، تولید سنج‌های عمومی برای

می‌باشد. باشد که در این دنیای خمیده، قدم‌های ما استوار و مستقیم برداشته شوند.

تفسیر مجموعه داده کلان بدون بررسی جزئیات، یافت مرکزیت‌های مختلف در شبکه، خوشه‌بندی و بسیاری دیگر

مراجع

- [1] Kreveld, M. van (2020). Geometric Primitives and Algorithms. *The Geographic Information Science & Technology Body of Knowledge* (2nd Quarter 2020 Edition), John P. Wilson (ed.). DOI: 10.22224/gistbok/2020.2.6.
- [2] Panigrahi N. (2014). "Computational Geometry and Its Application to GIS", CRC Press, ISBN 13: 9781482223149.
- [3] Coxeter H. S. M. (1998): "Non-Euclidean Geometry", Sixth Edition, The Mathematical Association of America. ISBN 0883855224.
- [4] Wolfe H. E. (2014): "Introduction To Non Euclidean Geometry", Nabu Press, ISBN 13: 978-1294451495.
- [5] Hilbert D. (1950): "The Foundations of Geometry", translated by: E. I. Townsend, Illinois.
- [6] Ryan P.J. (2006): "Euclidean and Non-Euclidean Geometry An Analytic Approach", Cambridge University Press, 15th Printing.
- [7] Dunham, D. (2012): "M.C. Escher's Use of the Poincaré Models of Hyperbolic Geometry", In: Bruter, C. (eds) *Mathematics and Modern Art. Springer Proceedings in Mathematics*, vol 18. Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-642-24497-1_7.
- [8] Escher M.C. (Accessed: 2022): "Circle Limit IV", <https://mcescher.com/gallery/mathematical/#>.
- [9] Nickel, M., & Kiela, D. (2017): "Poincaré embeddings for learning hierarchical representations", *Advances in neural information processing systems*, 30.
- [10] Bronstein, M. M., Bruna, J., LeCun, Y., Szlam, A., & Vandergheynst, P. (2017): "Geometric deep learning: going beyond euclidean data", *IEEE Signal Processing Magazine*, 34(4), 18-42.
- [11] Baryshnikov Y. (Accessed; 2022): "Online Presentation", https://faculty.math.illinois.edu/~ymb/talks/m499/m499.html#.
- [12] Stahl S. (2008): "A Gateway to Modern Geometry: The Poincaré Half-plane", Jones and Bartlett Publishers, ISBN 9780763753818.
- [13] Gullberg J. (1997): "Mathematics From the Birth of Numbers", Norton, ISBN 978-0-393-04002-9.
- [14] Aggarwal C.C. (2011): "Social Network Data Analytics", Springer Verlag, ISBN: 978-1-4419-8462-3.
- [15] Popescu-Pampu P. (2016): "What is the Genus?", Springer Verlag, ISBN 978-3-319-423.
- [16] Coxeter H. S. M. (1973): "Poincaré's Proof of Euler's Formula", Ch. 9 in *Regular Polytopes*, 3rd ed. New York: Dover, pp. 165-172.
- [17] Do Carmo M. (1976): "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice Hall.
- [18] Kumar, Hradesh & Kumar, Sanjeev. (2015): "Investigating Social Network as Complex Network and Dynamics of User Activities", *International Journal of Computer Applications*, 125(7), 13-18. 10.5120/ijca2015905952.
- [19] Gao, H., Tang, J., Liu, H. (2012): "Exploring social-historical ties on location-based social networks", In: *Proceedings of the Sixth International Conference on Weblogs and Social Media*.