

بهبود طول موج‌های بلند میدان جاذبه زمین با استفاده از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای

علیرضا آزموده اردلان^۱، روح الله کریمی^۲، نوشین مهرنگار^{۳*}

^۱استاد دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
ardalan@ut.ac.ir

^۲استادیار گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده مهندسی عمران و نقشه‌برداری - دانشگاه تفرش
rkarimy@ut.ac.ir

^۳کارشناس ارشد ژئودزی (هیدروگرافی) - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
n_mehrnegar@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت مرداد ۱۳۹۳، تاریخ تصویب بهمن ۱۳۹۴)

چکیده

اندازه‌گیری و مدلسازی میدان جاذبه بر حسب توابع پایه هارمونیک کروی یا بیضوی به واسطه تفکیک فرکانسی حاصل، همواره مورد توجه ژئودزین‌ها و ژئوفیزیک‌دانان بوده است. در این مقاله، بر اساس تعریف ژئوئید گوس-لیستینگ با استفاده از تکنیک‌های ماهواره‌ای، روشی برای بهبود مدل‌های ژئوپتانسیلی ارائه گردیده که آن را بر مبنای مراحل محاسباتی می‌توان بصورت ذیل خلاصه نمود: (۱) محاسبه ژئوئید و پتانسیل آن در دریا بر مبنای مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و مدل‌های ژئوپتانسیلی در طی یک فرایند بهینه‌سازی کمترین مربعات. (۲) تبدیل پتانسیل ژئوئید به پتانسیل روی بیضوی رفرانس از طریق فرمول برونز، (۳) تعیین شبکه‌ای منظم از پتانسیل جاذبه روی بیضوی در کل جهان که بخش آب‌های آن از مرحله قبل و بخش خشکی‌ها از طریق بسط ژئوپتانسیلی حاصل شده است. (۴) حذف بایاس توپوگرافی ناشی از محاسبه پتانسیل بر روی بیضوی در خشکی‌ها (۵) تعیین ضرائب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه متناظر با تراکم فضائی شبکه ایجاد شده از طریق یک روش تلفیق از آنالیز فوریه و کمترین مربعات. به عنوان مطالعه موردی، الگوریتم یاد شده برای بهبود ضرائب تا درجه و مرتبه ۹۰ مدل ژئوپتانسیلی ترکیبی EGM08 و مدل ژئوپتانسیلی ماهواره‌ای go_cons_gcf_2_dir مورد استفاده قرار گرفت. نتایج حاصل از مقایسه مدل‌ها با مدل جدید متناظر در ۲۷۰ نقطه GPS/Leveling در ایران بهبودی در حدود ۶ سانتیمتر برای هر دو مدل، و در ۷۵ نقطه GPS/Leveling در فنلاند بهبودی در حدود ۱ سانتیمتر برای EGM08 و بهبودی در حدود ۳ سانتیمتر برای go_cons_gcf_2_dir را نشان می‌دهد. همچنین مقایسه مدل‌ها با مدل جدید متناظر در ۶۰۰ نقطه ثقلی در سراسر دنیا، نشان می‌دهد که مدل جدید نسبت به دو مدل دیگر بهبودی در حدود ۰/۳ میلی‌گال را دارا می‌باشد.

واژگان کلیدی: مدل ژئوپتانسیلی، ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، توپوگرافی دینامیکی متوسط، ارتفاع ژئوئید، آنالیز فوریه

۱- مقدمه

نیروی جاذبه، به عنوان یکی از چهار نیروی بنیادی طبیعت [۲۰۱]، از منابع مهم اطلاعات در ژئودزی، ژئوفیزیک، و بطور کلی علوم زمین و فضا به حساب می آید. مدلسازی میدان جاذبه بر حسب هارمونیکهای کروی یا بیضوی، به واسطه تفکیک فرکانسی حاصل می تواند در مقاصد ژئودزی، اکتشافی، و ژئوفیزیکی مفید واقع گردد. امروزه مشاهدات ماهواره های ثقل سنجی، امکان برآورد دقیق طول موجهای بلند تا متوسط را میسر ساخته است [۳]. برآورد فرکانس های متوسط و کوتاه مستلزم داشتن مشاهدات زمینی است.

ارتفاع سنجی ماهواره ای^۱ با امکان پایش سطح آبهای جهان، امکان تعیین سطح متوسط دریاها را با دقت بالا فراهم آورده است [۴]. تبدیل سطح متوسط دریا به ژئوئید، با در اختیار داشتن توپوگرافی دینامیکی متوسط (MDT)^۲، راهی جدید در دستیابی به اطلاعات ثقلی در پهنه گسترده آبهای جهان است. به عنوان نمونه هایی از فعالیتهای علمی انجام گرفته در این راستا می توان به [۱۰-۵] اشاره کرد.

روشهای تعیین "توپوگرافی دینامیکی متوسط" یا همان "جدائی ژئوئید از سطح متوسط دریا" را می توان در دو دسته (۱) روشهای هیدرو دینامیکی بر مبنای اطلاعات مربوط به جریانهای سطحی، تفاوت شوری، دما، و سایر عوامل غیر جاذبه ای بوجود آورنده جدائی ژئوئید از سطح متوسط دریا و (۲) روشهای ژئودتیکی از طریق تلفیق مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای و مدل های ژئوتانسیلی تقسیم بندی نمود. روشهای هیدرو دینامیکی هر چند دارای مزیت برخوردار از جزئیات محلی می باشند، اما مواجه با مشکلات عدم پوشش جهانی و سختی تأمین داده های مرزی لازمند [۱۱-۱۴]. در مقابل در روشهای ژئودتیکی، توپوگرافی دینامیکی متوسط، مستقیماً با استفاده از مدل های ثقلی و اطلاع از سطح متوسط دریا بدست آمده و بدین لحاظ عاری از مشکلات روشهای هیدرو دینامیکی است. تنها نقطه ضعف روشهای ژئودتیکی در حال حاضر، شاید قدرت تفکیک کمتر آنها در مقایسه با روشهای هیدرو دینامیکی باشد [۱۵-۱۸].

هدف این تحقیق، امکان سنجی استفاده از روش ژئودتیکی ارائه شده در [۱۹] برای تعیین توپوگرافی دینامیکی متوسط به عنوان ملاکی جهت بهبود مدل های ژئوتانسیلی است. بدین خاطر ابتدا در بخش ۲ به معرفی روش [۱۹] پرداخته و سپس در بخش ۳، تلفیق روش فوریه و کمترین مربعات در تعیین ضرائب ژئوتانسیلی ارائه خواهد شد. بخش ۴ به جزئیات محاسباتی، و نهایتاً بخش ۵ به ارائه نتایج حاصل اختصاص داده شده است.

۲- تعیین توپوگرافی دینامیکی متوسط از طریق یک روش بهینه یابی

سطح متوسط دریاها (MSS)^۳ در صورت عدم وجود اثرات غیر جاذبه ای، مانند شوری، دما، و جریان های دریایی، بیانگر سطح هم پتانسیل مینا یا همان ژئوئید است. بدین خاطر، گاوس و لیستینگ [۲۱ و ۲۲] ژئوئید را سطح هم پتانسیلی نامیدند که به صورت کمترین مربعات به سطح متوسط دریاها برازش می یابد. کریمی و اردلان [۱۹] بر اساس این تعریف، روش ژئودتیکی جدیدی برای محاسبه توپوگرافی دینامیکی متوسط ارائه نموده اند که در اینجا به اختصار ارائه خواهد شد. با توجه به شکل ۱ و تعریف گاوس-لیستینگ، برای نقاط $i = 1, 2, \dots, P$ واقع بر ژئوئید به مختصات $(\varphi_i, \lambda_i, h_i = H_i - H_i)$ می توان مسئله بهینه یابی ذیل را تشکیل داد:

$$\begin{cases} f_1(H_1, H_2) = W_{p_1}(\varphi_1, \lambda_1, h_1 - H_1) - W_{p_2}(\varphi_2, \lambda_2, h_2 - H_2) = 0 \\ f_2(H_1, H_3) = W_{p_2}(\varphi_2, \lambda_2, h_2 - H_2) - W_{p_3}(\varphi_3, \lambda_3, h_3 - H_3) = 0 \\ \vdots \\ f_{p-1}(H_1, H_p) = W_{p_{p-1}}(\varphi_{p-1}, \lambda_{p-1}, h_{p-1} - H_{p-1}) - W_{p_p}(\varphi_p, \lambda_p, h_p - H_p) = 0 \end{cases}$$

(۱)

معادلات اول قیودی هستند که برای نقاط واقع بر ژئوئید به عنوان یک سطح هم پتانسیل صادق بوده و تابع هدف باعث می گردد تا نقاط واقع بر این سطح هم-پتانسیل در نزدیکترین فاصله به نقاط نظیر آنها بروی MSS به مختصات $(\varphi_i, \lambda_i, h_i)$ واقع گردند.

^۳ Mean Sea Surface

^۱ Satellite altimetry
^۲ Mean Dynamic Topography

$$W(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm}(\phi, r) \cos m\lambda + B_{nm}(\phi, r) \sin m\lambda \quad (4)$$

فرم گسترده جمع‌های فوق تا درجه و مرتبه محدود n_{\max} به صورت ذیل است:

$$W(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{R} [(A_{00} + A_{10} + A_{20} + \dots + A_{n_{\max}0}) \cos 0\lambda + (A_{11} + A_{21} + A_{31} + \dots + A_{n_{\max}1}) \cos 1\lambda + \dots + A_{n_{\max}n_{\max}} \cos n_{\max} \lambda + (B_{00} + B_{10} + B_{20} + \dots + B_{n_{\max}0}) \sin 0\lambda + (B_{11} + B_{21} + B_{31} + \dots + B_{n_{\max}1}) \sin 1\lambda + \dots + B_{n_{\max}n_{\max}} \sin n_{\max} \lambda] \quad (5)$$

با در نظر گرفتن دو تعریف ذیل:

$$B_m^* = \sum_{n=m}^{n_{\max}} B_{nm} \quad (6)$$

$$A_m^* = \sum_{n=m}^{n_{\max}} A_{nm}$$

رابطه (۵) را می‌توان بصورت ذیل بازنویسی نمود:

$$W(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}} A_n^* \cos n\lambda + B_n^* \sin n\lambda \right) \quad (7)$$

رابطه (۷) تبدیل فوریه تا فرکانس n_{\max} بوده که ضرائب آنرا با توجه به ارتوگونالیته توابع سینوسی و کسینوسی در بازه $[0, 2\pi]$ می‌توان بصورت ذیل بدست آورد:

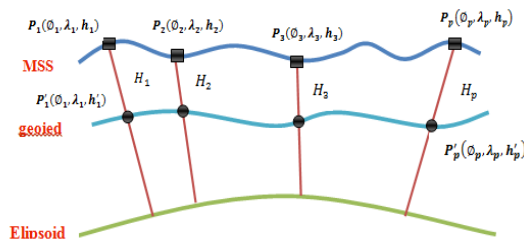
$$A_m^* = \frac{R}{GM} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} W(\phi, \lambda, r) \cos m\lambda d\lambda, \quad (m = 0, 1, \dots, n_{\max})$$

$$B_m^* = \frac{R}{GM} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} W(\phi, \lambda, r) \sin m\lambda d\lambda, \quad (m = 0, 1, \dots, n_{\max}) \quad (8)$$

با گسسته‌سازی انتگرال‌های بالا داریم:

$$A_m^*(\phi_i) = \frac{R}{GM} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N W(\phi_i, \lambda_j, r_{ij}) \cos m\lambda_j \Delta\lambda$$

$$B_m^*(\phi_i) = \frac{R}{GM} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N W(\phi_i, \lambda_j, r_{ij}) \sin m\lambda_j \Delta\lambda \quad (9)$$



شکل ۱- بیضوی مبنا، سطح متوسط دریا (MSS)، و ژئوئید

با انتخاب مدل‌های ژئوپتانسیلی به عنوان مدل میدان، امکان استفاده از روابط (۱) به روش نیوتن-لاگرانژ [۲۰] برای تعیین ژئوئید و توپوگرافی سطح دریا بصورت همزمان فراهم می‌گردد. برای اطلاع از جزئیات مطالعه [۱۹] پیشنهاد می‌گردد. این روش در مقایسه با روشهای ژئودتیکی دیگر دارای دو مزیت ذیل است:

(۱) مسئله مستقیماً بر مبنای تعریف ژئوئید گاوس-لیستینگ [۲۱ و ۲۲] پایه‌گذاری شده است.

(۲) پتانسیل ژئوئید، ژئوئید، و MDT بطور همزمان و سازگار با یکدیگر محاسبه می‌گردند.

استفاده از ژئوئید بدست آمده از این روش بهینه‌یابی، پس از تبدیل به پتانسیل بر روی بیضوی از طریق فرمول برونز، در بهبود مدل‌های ژئوپتانسیلی هدف غائی این تحقیق می‌باشد. اما برای نیل بدین هدف پیشتر لازم است روشی برای تعیین ضرائب ژئوپتانسیلی ارائه نماییم، که موضوع بخش آتی است.

۳- بکارگیری آنالیز فوریه و کمترین مربعات در محاسبه ضرائب ژئوپتانسیلی

بسط پتانسیل جاذبه به ضرائب هارمونیک‌های کروی به شرح ذیل است:

$$W(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi) \quad (2)$$

حال اگر تغییر متغیر ذیل را در نظر بگیریم:

$$B_{nm}(\phi, r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} S_{nm} P_{nm}(\sin \phi)$$

$$A_{nm}(\phi, r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} C_{nm} P_{nm}(\sin \phi) \quad (3)$$

رابطه (۳) بصورت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (13)$$

که در آن

$$\mathbf{l} = \left[A_m^*(\phi_1) \ A_m^*(\phi_2) \ \dots \ A_m^*(\phi_p) \ B_m^*(\phi_1) \ B_m^*(\phi_2) \ \dots \ B_m^*(\phi_p) \right]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_1) & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_1) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_1) \\ \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_2) & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_2) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_p) & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_p) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_p) \\ \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_1) & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_1) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_1) \\ \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_2) & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_2) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_p) & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_p) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \left[C_{m,m} \ C_{m+1,m} \ \dots \ C_{n_{\max},m} \ S_{m,m} \ S_{m+1,m} \ \dots \ S_{n_{\max},m} \right]^T \quad (14)$$

جواب منحصر به فرد دستگاه معادلات فوق برای تعیین C_{mm} و S_{mm} نیازمند پتانسیل در $n_{\max} + 1$ عرض مختلف و داشتن پتانسیل در عرض‌های بیشتر موجب ایجاد درجه آزادی و امکان برآورد ضرائب هارمونیک‌های کروی به روش کمتری مربعات خواهد شد از معادلات ذیل خواهد شد [24].

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (15)$$

رابطه (15) نمی‌تواند منجر به جواب صحیحی بدون دخالت وزن گردد. چرا که فاصله نقاط دارای پتانسیل در عرض‌های جغرافیائی مختلف یکسان نبوده و با افزایش عرض به سمت قطبین فاصله نقاط کم می‌گردد. لذا لازم است از یک ماتریس وزن قطری بصورت ذیل در محاسبه $\hat{\mathbf{x}}$ استفاده نمود.

$$P = \text{diag}(\cos^2 \phi_1 \ \cos^2 \phi_2 \ \dots \ \cos^2 \phi_{n+1} \ , \dots \ \cos^2 \phi_p) \quad (16)$$

اعمال این وزن منجر به طی رابطه ذیل منجر به برآورد صحیحی برای محاسبه $\hat{\mathbf{x}}$ خواهد شد.

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (17)$$

یعنی با داشتن پتانسیل بر روی شبکه‌ای منظم در کل زمین می‌توان A_m^* و B_m^* را محاسبه نمود. از طرف دیگر با قرار دادن روابط (3) در روابط بالا داریم:

$$B_m^*(\phi_i) = \sum_{n=m}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r_i}\right)^{n+1} S_{nm} P_{nm}(\sin \phi_i) \quad (10)$$

$$A_m^*(\phi_i) = \sum_{n=m}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r_i}\right)^{n+1} C_{nm} P_{nm}(\sin \phi_i)$$

از آنجائی که سمت چپ روابط (10) تابعی از ϕ و طرف راست تابعی از ϕ و r می‌باشد، این تساوی‌ها تنها زمانی برقرار خواهند بود که یا r ثابت بوده و یا r تابعی از ϕ باشد. بنابراین برای برقراری تساوی‌ها بایستی نقاط دارای پتانسیل معلوم روی کره یا بیضوی دورانی باشند. در حالت اخیر r تابعی از ϕ خواهد بود. در اینجا با توجه به نحوه مدلسازی میدان در دریا، حالت دوم، یعنی پتانسیل بر روی بیضوی را در نظر گرفته و لذا روابط (10) را بصورت ذیل باز نویسی می‌کنیم.

$$A_m^*(\phi) = \left[\left(\frac{R}{r(\phi)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi) \ \dots \ \left(\frac{R}{r(\phi)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi) \right] \begin{bmatrix} C_{m,m} \\ C_{m+1,m} \\ \vdots \\ C_{n_{\max},m} \end{bmatrix}$$

$$B_m^*(\phi, r) = \left[\left(\frac{R}{r(\phi)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi) \ \dots \ \left(\frac{R}{r(\phi)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi) \right] \begin{bmatrix} S_{m,m} \\ S_{m+1,m} \\ \vdots \\ S_{n_{\max},m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

با تکرار بالا برای نقاط در عرض‌های مختلف به معادلات ذیل خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix} A_m^*(\phi_1) \\ A_m^*(\phi_2) \\ \vdots \\ A_m^*(\phi_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_1) & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_1) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_1) \\ \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_2) & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_2) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_p) & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_p) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m,m} \\ C_{m+1,m} \\ \vdots \\ C_{n_{\max},m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_m^*(\phi_1) \\ B_m^*(\phi_2) \\ \vdots \\ B_m^*(\phi_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_1) & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_1) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_1)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_1) \\ \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_2) & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_2) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_2)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+1} P_{m,m}(\sin \phi_p) & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{m+2} P_{m+1,m}(\sin \phi_p) & \dots & \left(\frac{R}{r(\phi_p)}\right)^{n_{\max}+1} P_{n_{\max},m}(\sin \phi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{m,m} \\ S_{m+1,m} \\ \vdots \\ S_{n_{\max},m} \end{bmatrix} \quad (12)$$

یا

$$N = -\delta w / \frac{\sqrt{b^2 + e^2}}{\sqrt{b^2 + e^2 \sin^2 \varphi}} \times \left[-\frac{gm}{b^2 + e^2} \omega^2 \left(\frac{6b^2 + e^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{b}{e} \right) - 3be + e^2 - 3e}{3b^2 + e^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{b}{e} \right) - 3be} \right) \right] \times [3 \sin^2 \varphi + 1 + \omega^2 b \cos^2 \varphi] \quad (18)$$

که در آن

$$dw = W_0 - W_{x_0} \quad (19)$$

W_0 پتانسیل ژئوئید و W_{x_0} پتانسیل بر روی بیضوی است. برای جزئیات مربوط به نحوه محاسبه این فرمول برونز و دقت آن مطالعه [۲۵] توصیه می‌گردد. برای پتانسیل ژئوئید از مقدار $62636856.56 \text{ m}^2/\text{s}^2$ استفاده شده است که از نتایج این تحقیق می‌باشد. در فرمول برنز $\omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ و $gm = 3986004.415 \times 10^8$ به ترتیب سرعت دورانی زاویه‌ای و ثابت جهانی جاذبه زمین و a و b به ترتیب نصف قطر اطول و قصر بیضوی مرجع، $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ خروج از مرکزیت بیضوی است. بر اساس محاسبه یک مقدار جدید برای پتانسیل ژئوئید یک بیضوی جدید با پارامترهای $a = 6378136.516 \text{ m}$ و $b = 6356751.780 \text{ m}$ حاصل شده و ارتفاع ژئوئید نسبت به آن بدست می‌آید.

برای ایجاد شبکه‌ای منظم از پتانسیل ثقل روی بیضوی مرجع برای پتانسیل بر روی بیضوی در خشکی‌ها از مدل‌های ژئوپتانسیل نام برده شده استفاده گردید. از آنجائی که استفاده از این مدل‌ها بر روی بیضوی در خشکی‌ها منجر به بروز بایاس توپوگرافی می‌گردد، برای حذف این اثر از رابطه ذیل استفاده گردید [۲۶].

$$W_{90}^c(\eta_0, \lambda, \varphi) = W_{90}(\eta_0, \lambda, \varphi) - \delta W \quad (20)$$

که در آن W_{90}^c پتانسیل ثقل تصحیح شده بر روی بیضوی و δW تصحیح بایاس توپوگرافی ناشی از بسط تا درجه و مرتبه ۹۰ بوده که از فرمول ذیل محاسبه می‌گردد:

$$\delta W = 2\pi G \sigma \left(H^2 + \frac{2H^3}{3R} \right) \quad (21)$$

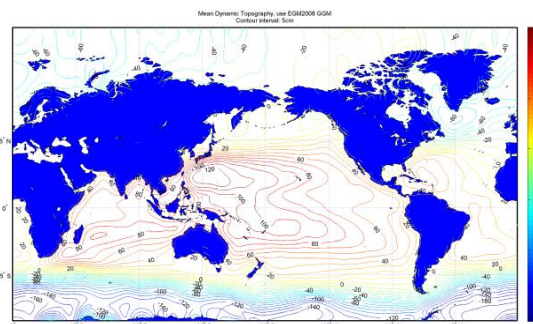
در رابطه (۲۱)، σ چگالی جرم توپوگرافی، H و ارتفاع توپوگرافی بالای نقطه محاسبه روی سطح بیضوی است. برای محاسبه δW از چگالی جرم توپوگرافی ثابت $\sigma = 2760 \text{ kg/m}^3$ و ثابت جهانی نیوتن با مقدار

فرمول فوق خاتمه دهنده روابط لازم برای تعیین ضرائب ژئوپتانسیلی است. در بخش‌های آتی نتایج عددی حاصل ارائه خواهند شد.

۴- بررسی عددی روش ارائه شده

سطح متوسط دریا برای محاسبه توپوگرافی دینامیکی متوسط (MDT) در این تحقیق مدل DTU10MSS می‌باشد، که حاصل تلفیق داده‌های مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌های Geosat, ENVISAT, ERS2, ERS1, Topex/Poseidon, Jason و GFO است. قدرت تفکیک مکانی این مدل ۱ دقیقه و دقت آن حدود ۵ سانتی‌متر است [۶].

توپوگرافی دینامیکی متوسط با قدرت تفکیک مکانی ۱ درجه در ۱ درجه به روش ذکر شده در بخش ۲ با استفاده از سطح متوسط دریای ذکر شده و مدل ژئوپتانسیلی ترکیبی EGM08 و مدل ژئوپتانسیلی ماهواره‌ای go_cons_gcf_2_dir تا درجه و مرتبه ۹۰ در گستره آب‌های جهان محاسبه گردید. MDT حاصل با استفاده از مشاهدات ارتفاع‌سنجی و مدل ژئوپتانسیلی EGM08 ذکر شده در شکل (۲) نمایش داده شده است. از آنجائیکه نمایش MDT حاصل با استفاده از مشاهدات ارتفاع‌سنجی و مدل ژئوپتانسیلی go_cons_gcf_2_dir بسیار متشابه با مدل EGM08 می‌باشد، از نمایش آن خودداری شده است.



شکل ۲- توپوگرافی دینامیک متوسط حاصل از روش بهینه‌یابی ذکر شده در بخش ۲ با استفاده از DTU10MSS و EGM08

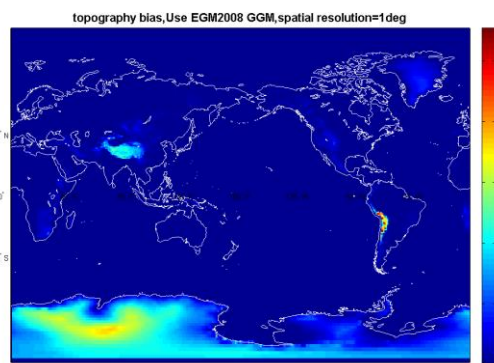
از تفاضل سطح متوسط دریاها و توپوگرافی دینامیک متوسط بدست آمده، ارتفاع ژئوئید در دریاها حاصل گردیده، و با استفاده از فرمول برنز بیضوی به پتانسیل جاذبه برای مدل‌سازی میدان جاذبه تبدیل گردید. برای این تبدیل از فرمول برونز ذیل استفاده شد

پتانسیل بدست آمده روی سطح بیضوی شامل پتانسیل جاذبی و پتانسیل گرینز از مرکز است که تنها ترم اول آن یعنی پتانسیل جاذبی (W_g) هارمونیک بوده و قابل استفاده در مدل سازی ضرایب ژئوپتانسیلی به روش فوریه می باشد. بنابراین قبل از بکارگیری روش فوریه لازم است میزان پتانسیل گرینز از مرکز (W_c) از روی پتانسیل ثقل روی سطح بیضوی برداشته شود:

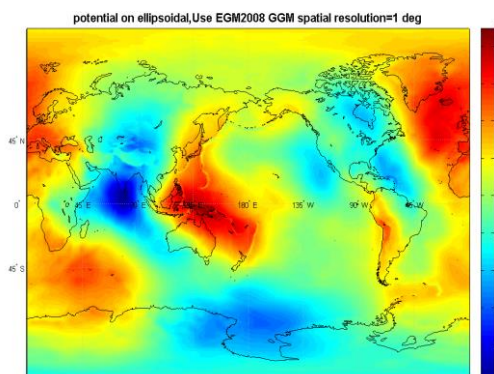
$$W_c = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi \quad (22)$$

پس از تفاضل پتانسیل گرینز از مرکز از شبکه پتانسیل ثقل روی بیضوی مرجع با بکارگیری آنالیز فوریه، مدل جدیدی از ضرایب هارمونیک کروی تا درجه و مرتبه ۹۰ بدست آمده که در واقع جایگزینی برای مدل ژئوپتانسیلی ورودی در انجام محاسبات می باشند. جهت بررسی دقت روش ارائه شده در بهبود ضرایب ژئوپتانسیلی، از مشاهدات ثقلی مطلق در ۶۰۰ نقطه جهان تهیه شده توسط سازمان BGI (شکل ۵)، ۲۷۰ نقطه GPS/Leveling در ایران (شکل ۶) و ۷۵ نقطه GPS/Leveling در فنلاند (شکل ۷) بهره گرفته شده است. مقایسه اختلاف شتاب ثقل حاصل از مدل های EGM08 و go_cons_gcf_2_dir با مدل جدید متناظر تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۶۰۰ نقطه مطلق گراویتی BGI به ترتیب در جداول ۱ و ۲ آمده است.

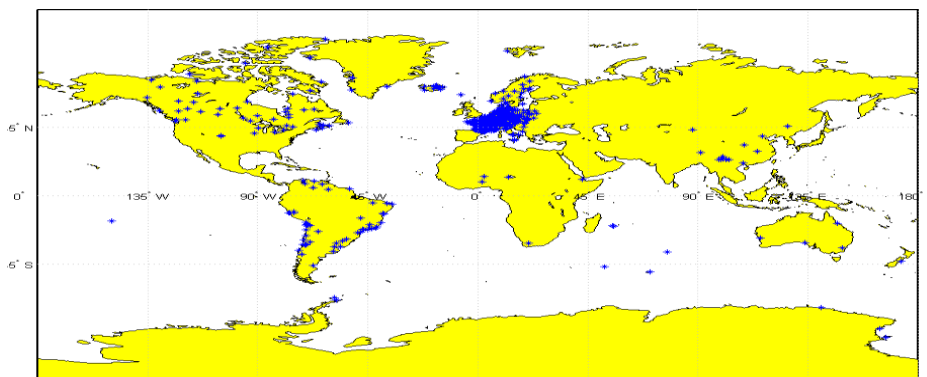
برای $G = 6.67384 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ استفاده گردید. برای محاسبه H به ارتفاع ارتومتریک حاصل از SRTM30 و GTOPO30، ارتفاع ژئوئید حاصل از DTU10MSS اضافه گردید. لازم به ذکر است که SRTM30 حاوی ارتفاع ارتومتریک بین عرض جغرافیائی ۶۰- تا ۹۰ و GTOPO30 حاوی همین اطلاع در محدوده عرض جغرافیائی ۶۰- تا ۹۰- است. شکل های (۳) و (۴) به ترتیب نشان دهنده مقادیر بایاس توپوگرافی و پتانسیل جاذبه تصحیح شده (W_{90}^c) روی سطح بیضوی مرجع، حاصل از مدل ژئوپتانسیلی EGM08 تا درجه و مرتبه ۹۰ می باشند.



شکل ۳- بایاس توپوگرافی محاسبه شده



شکل ۴- پتانسیل جاذبه تصحیح شده روی بیضوی رفرنس



شکل ۵- نقشه پراکندگی ۶۰۰ نقطه مطلق گراویتی تهیه شده توسط سازمان BGI

جدول ۱- مقایسهٔ اختلاف شتاب ثقل حاصل از مدل ژئوپتانسیلی EGM08 و مدل جدید تا درجه و مرتبهٔ ۹۰ در ۶۰۰ نقطهٔ مطلق گراویتی BGI (واحدها بر حسب میلی گال می باشد).

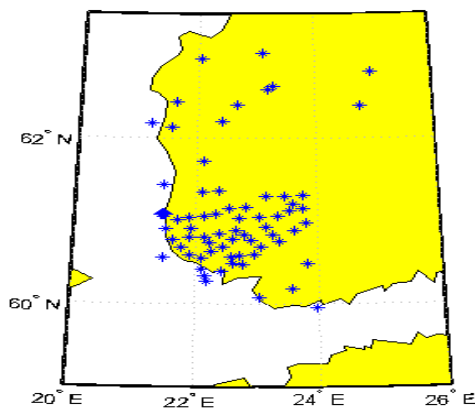
$dg(mgal)$	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$g_{EGM08} - g_{Absolute\ gravity}$	-150.205	189.563	-5.142	38.963	38.970
$g_{New\ model} - g_{Absolute\ gravity}$	-150.652	189.304	-5.062	38.640	38.621

جدول ۲- مقایسهٔ اختلاف شتاب ثقل حاصل از مدل ژئوپتانسیلی go_cons_gcf_2_dir و مدل جدید تا درجه و مرتبهٔ ۹۰ در ۶۰۰ نقطهٔ مطلق گراویتی BGI (واحدها بر حسب میلی گال می باشد).

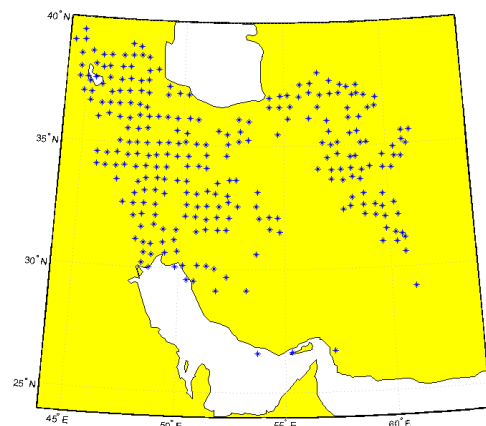
$dg(mgal)$	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$g_{co_cons} - g_{Absolute\ gravity}$	-193.964	179.833	-4.656	41.750	42.011
$g_{New\ model} - g_{Absolute\ gravity}$	-192.563	183.205	-4.215	41.431	41.644

مدل دقت خوبی در فنلاند دارد. همچنین از جداول ۵ و ۶ دیده می شود که مدل جدید در ایران بهبودی در حدود ۶ سانتی متر و در فنلاند بهبودی در حدود ۳ سانتی متر دارد. علت افزایش دقت در فنلاند برای مدل go_cons_gcf_2_dir این است که این مدل جهانی، تنها ماهواره‌ای بوده و داده‌های زمینی در آن نقشی ندارند. به منظور بررسی سهم ضرایب در بهبود نتایج حاصل از محاسبات ارتفاع ژئوئید با استفاده از مدل جدید، در چند مرحله ضرایب موردنظر از مدل جدید به جای ضرایب متناظر مدل EGM08 قرار گرفته و ارتفاع ژئوئید تا درجه و مرتبه ۹۰ محاسبه شده است. نتایج این محاسبات بر روی مدل EGM08 در جداول ۷ و ۸ آمده است. این تست برای مدل go_cons_gcf_2_dir نیز انجام شده‌اند که به دلیل نتایج کاملاً مشابه از ارائه آنها صرفنظر شد.

همان گونه که در جداول ۱ و ۲ مشاهده می شود، بهبودی در حدود ۰/۴ میلی گال در نتایج گراویتی برای هر دو مدل حاصل شده است. به عنوان یک تست دیگر، ارتفاعات ژئوئید محاسبه شده توسط مدل‌های EGM08 و go_cons_gcf_2_dir و مدل جدید متناظر با نقاط GPS/Leveling در ۲۷۰ نقطه در ایران و ۷۵ نقطه در فنلاند مقایسه شده است. نتایج این مقایسه در جداول ۳ و ۴ برای مدل EGM08 و در جداول ۵ و ۶ برای مدل go_cons_gcf_2_dir آورده شده است. همان طور که در جداول ۳ و ۴ مشاهده می شود مدل جدید در ایران بهبودی در حدود ۶ سانتی متر و در فنلاند بهبودی در حدود یک سانتی متر دارد. علت اینکه در فنلاند بهبود کمی حاصل شده است این است که داده های گرانی فنلاند در تولید مدل جهانی EGM08 شرکت کرده و این



شکل ۷- نقشهٔ پراکندگی ۷۵ نقطهٔ GPS/Leveling در فنلاند



شکل ۶- نقشهٔ پراکندگی ۲۷۰ نقطهٔ GPS/Leveling در ایران

جدول ۳- مقایسه ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل ژئوپتانسیلی EGM08 و مدل جدید تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۲۷۰ نقطه GPS/Leveling در ایران (واحدها بر حسب متر می باشد)

$dN(m)$	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$N_{EGM08} - N_{GPS/Leveling}$	-2.918	2.838	-0.730	1.338	1.524
$N_{New\ model} - N_{GPS/Leveling}$	-2.811	2.905	-0.648	1.316	1.468

جدول ۴- مقایسه ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل ژئوپتانسیلی EGM08 و مدل جدید تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۷۵ نقطه GPS/Leveling در فنلاند (واحدها بر حسب متر می باشد)

$dN(m)$	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$N_{EGM08} - N_{GPS/Leveling}$	-1.068	0.603	-0.131	0.380	0.402
$N_{New\ model} - N_{GPS/Leveling}$	-1.040	0.610	-0.117	0.372	0.389

جدول ۵- مقایسه ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل ژئوپتانسیلی go_cons_gcf_2_dir و مدل جدید تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۲۷۰ نقطه GPS/Leveling در ایران (واحدها بر حسب متر می باشد)

$dN(m)$	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$N_{go_cons} - N_{GPS/Leveling}$	-2.993	2.903	-0.741	1.345	1.535
$N_{New\ model} - N_{GPS/Leveling}$	-2.845	2.763	-0.661	1.321	1.477

جدول ۶- مقایسه ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل ژئوپتانسیلی go_cons_gcf_2_dir و مدل جدید تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۷۵ نقطه GPS/Leveling در فنلاند (واحدها بر حسب متر می باشد)

$dN(m)$	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$N_{go_cons} - N_{GPS/Leveling}$	-1.098	0.601	0.138	0.394	0.417
$N_{New\ model} - N_{GPS/Leveling}$	-1.038	0.622	0.119	0.375	0.393

جدول ۷- مقایسه ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل ژئوپتانسیلی EGM08 و مدل تغییر یافته با جایگذاری ضرایب متناظر از مدل جدید با آن، تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۲۷۰ نقطه GPS/Leveling در ایران (واحدها بر حسب متر می باشد).

$dN(m)$	Enhanced coefficients	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$N_{EGM08} - N_{GPS/Leveling}$	-	-2.918	2.838	-0.730	1.338	1.524
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{20}	-2.924	2.840	-0.730	1.337	1.524
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 2, 3$ $m = 0 : n$	-2.924	2.838	-0.722	1.334	1.517
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 10$ $m = 0 : n$	-2.929	2.829	-0.732	1.336	1.524
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 30$ $m = 0 : n$	-2.840	2.897	-0.678	1.329	1.492
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 60$ $m = 0 : n$	-2.838	2.914	-0.653	1.318	1.471
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 90$ $m = 0 : n$	-2.811	2.905	-0.648	1.316	1.468

جدول ۸- مقایسه ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل ژئوپتانسیلی EGM08 و مدل تغییر یافته با جایگذاری ضرایب متناظر از مدل جدید با آن، تا درجه و مرتبه ۹۰ در ۷۵ نقطه GPS/Leveling در فنلاند (واحدها بر حسب متر می باشد)

$dN(m)$	Enhanced coefficients	Min.	Max.	Mean	STD	RMS
$N_{EGM08} - N_{GPS/Leveling}$	-	-1.068	0.603	-0.131	0.380	0.402
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{20}	-1.016	0.651	-0.082	0.379	0.388
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 2$ $m = 0, 1, 2,$	-1.007	0.667	-0.071	0.379	0.386
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 2, 3$ $m = 0 : n$	-0.968	0.709	-0.027	0.380	0.381
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 10$ $m = 0 : n$	-1.019	0.664	-0.075	0.382	0.389
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 30$ $m = 0 : n$	-1.027	0.632	-0.092	0.378	0.390
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 60$ $m = 0 : n$	-1.029	0.606	-0.110	0.374	0.390
$N_{enhanced\ model} - N_{GPS/Leveling}$	C_{nm}, S_{nm} $n = 0 : 90$ $m = 0 : n$	-1.040	0.610	-0.117	0.372	0.389

همانگونه که در جداول ۷ و ۸ مشاهده می شود، بیشترین تأثیر ضرایب برای مدل جهانی EGM08 در ایران ضرائب تا درجه و مرتبه ۹۰ و در فنلاند تا درجه و مرتبه ۳ می باشد، و این بدان معنی است که تأثیر ضرایب در بهبود نتایج به مکان جغرافیایی منطقه مورد تست بستگی دارد.

۵- نتیجه گیری و پیشنهادات

نتایج بدست آمده از مقایسه مدل ژئوپتانسیلی EGM08 و go_cons_gcf_2_dir با مدل جدید نشان می دهد، روش ارائه شده در این تحقیق به عنوان فیلتری جهت بهبود مدل های ژئوپتانسیلی عمل می نماید که می تواند بهبودی در حدود ۶ سانتیمتر در ایران ایجاد نماید. این بهبود در فنلاند برای مدل EGM08 حدود یک سانتی متر و برای مدل go_cons_gcf_2_dir حدود ۳ سانتی متر می باشد. علت اینکه این بهبود در فنلاند برای مدل

go_cons_gcf_2_dir بیشتر از مدل EGM08 می باشد این داده های گرانی فنلاند در تولید مدل EGM08 شرکت کرده و این مدل در آنجا دارای دقت زیادی می باشد. در محاسبه شتاب ثقل نیز برای هر دو مدل بهبودی در حدود ۰/۳ میلی گال در سطح جهانی با استفاده از مدل جدید حاصل شده است. نتایج بررسی ها نشان می دهد با افزایش درجه و مرتبه مدل های ژئوپتانسیلی سهم ضرایب در بهبود نتایج حاصل از محاسبه ارتفاع ژئوئید بیشتر بوده و لذا می توان ادعا کرد روش ارائه شده دقت مدل های ژئوپتانسیل جهانی را در فرکانسهای بالا بهبود می دهد. بنابراین اعمال آن بر روی کلیه مدل های ژئوپتانسیل جهانی توصیه می گردد. همچنین نتایج نشان می دهد که سهم ضرایب مختلف در بهبود نتایج می تواند به محل بستگی داشته باشد.

مراجع

- [1] Davies P (1986) The Forces of Nature, Cambridge Univ. Press, 2nd ed.
- [2] Padmanabhan T (1998) After The First Three Minutes: The Story of Our Universe, Cambridge Univ. Press

- [3] Vanicek P (1973) Gravimetric satellite Geodesy, UNB Univ.
- [4] Anzenhofer M, Shum CK, Rentsh M (1999) Coastal altimetry and applications, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science of the Ohio State University, Columbus Ohio, Report No.464.
- [5] Sandwell DT, Smith WHF (1997) Marine Gravity Anomaly from Geosat and ERS-1 Satellite Altimetry, *J. Geophys. Res.* 102, 10039- 10054.
- [6] Andersen O B, Knudsen P (1998) Global marine gravity field from the ERS-1 and geosat geodetic mission altimetry, *Journal of Geophysical Research C: Oceans*, 103(3334), 8129-8137.
- [7] Hwang C, Hsu H, Jang R (2002) Global mean sea surface and marine gravity anomaly from multi-satellite altimetry, Applications of deflection-geoid and inverse vening meinesz formulae, *Journal of Geodesy*, 76(8), 407-418.
- [8] Tziavos IN, Forsberg R (1998) Combined satellite altimetry and shipborne gravimetry data processing, *Mar Geod* 21, 299-317.
- [9] Hwang C, Kao E, Parsons B (1998) Global derivation of marine gravity anomalies from seasat, geosat, ERS-1 and TOPEX/Poseidon altimeter data, *Geophysical Journal International*, 134(2), 449-459.
- [10] Hwang C, Parsons B (1996) An optimal procedure for deriving marine gravity from multisatellite altimetry, *Geophysical Journal International*, 125(3), 705-718.
- [11] Levitus S (1982) Climatological atlas of the world ocean. NOAA Professional Paper 13, Rockville, MD: U.S. Dept. of Commerce
- [12] Rio MH, Schaeffer P, Hernandez F, Lemoine JM (2005) The estimation of the ocean Mean Dynamic Topography through the combination of altimetric data, in-situ measurements and GRACE geoid: from global to regional studies. Proceedings of the GOCINA International Workshop, Luxembourg.
- [13] Semtner AJ, Chervin RM (1992) Ocean general circulation from a global eddy-resolving model. *J Geophys Res* 97:5493–5550.
- [14] Stammer D, Tokmakian RT, Semtner A, Wunsch C (1996) How well does a 1/4° global circulation model simulate the large-scale oceanic observations? *J Geophys Res* 101:25779–25881
- [15] Blinken R, Koch AR (2001) Geoid and sea surface topography derived from ERS-1 altimeter data the adjoint method. *Stud Geophys Geod* 45:235–250
- [16] Ekman M, Mäkinen J (1996) Mean sea surface topography in the Baltic Sea and its transition area to the North Sea: a geodetic solution and comparisons with oceanographic models. *J Geophys Res* 101(C5):11,993–11,999.
- [17] Andersen OB, Knudsen P (2009) DNSC08 Mean Sea Surface and Mean Dynamic Topography models. *J.Geophys Res* 114: C11001. doi:10.1029/2008JC005179.
- [18] Barzaghi R, Tselfes N, Tziavos IN, Vergos GS (2009) Geoid and high resolution sea surface topography modeling in the Mediterranean from gravimetry, altimetry and GOCE data: evaluation by simulation. *J Geodesy* 83:751–772.
- [19] Karimi R, Ardalan AA (2010) An alternative direct method towards mean dynamic topography computations. *Ocean dynamics*, 60: 555–562.
- [20] Bertsekas DP (1999) Nonlinear programming, 2nd edn. AthenaScientific, Nashua. Listing JB (1873) Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Göttingen.
- [21] Listing JB (1873) Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Göttingen.
- [22] Gauss CF (1828) Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen
- [23] Ardalan AA (2000) High-resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collection of linearized observational of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. PhD dissertation, Department of Geodesy and Geoinformatics, Stuttgart University, Stuttgart.
- [24] Ardalan AA, Karimi R (2006) On the application of FFT and Wavelet Transform in gravity field modeling, European Geosciences Union.
- [25] Ardalan AA, Grafarend EW (2001) Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies, *J. Geodesy*, 75, 544-552.
- [26] Ardalan AA, Karimi R (2013) On the application of one-step inversion of gravity data, *Studia Geophysica et Geodaetica*, 57: 401-425.