

## ارائه روشی مبتنی بر یادگیری گروهی برای بهبود نتایج حاصل از فاکتورگیری ماتریس نامنفی (NMF)

سعید قلی نژاد<sup>۱\*</sup>، روزبه شاد<sup>۲</sup>، هادی صدوقی یزدی<sup>۳</sup>، مرجان قائمی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری سنجش از دور - گروه نقشه برداری - دانشکده عمران و حمل و نقل - دانشگاه اصفهان  
saeid.gholinejad@trn.ui.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد  
r.shad@um.ac.ir  
mghaemi270@gmail.com

<sup>۳</sup> استاد گروه مهندسی کامپیوتر - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد  
h-sadoghi@um.ac.ir

(تاریخ دریافت فروردین ۱۳۹۶، تاریخ تصویب خرداد ۱۳۹۷)

### چکیده

به تازگی روش‌های تجزیه‌ی طیفی تصاویر فراطیفی، به‌عنوان ابزاری قدرتمند در شناسایی عوارض موجود در پیکسل‌های مختلط، به‌طور گسترده‌ای مورد اقبال پژوهشگران قرار گرفته‌اند. از میان الگوریتم‌های ارائه‌شده برای تجزیه‌ی طیفی تصاویر فراطیفی، فاکتورگیری ماتریس نامنفی (NMF) به علت اعمال قید نامنفی بودن بر فراوانی‌های حاصل از تجزیه‌ی طیفی و همچنین استخراج هم‌زمان طیف و فراوانی اعضای خالص، بیش از سایر روش‌ها مورد توجه قرار گرفته است. علیرغم این توانایی‌ها، NMF به علت داشتن تابع هدف نامحدب دارای جواب‌های محلی فراوانی است که در مطالعات مختلف با افزودن قیدهایی به تابع هزینه‌ی آن، تلاش‌هایی برای دستیابی به نتایج بهینه‌ی سراسری صورت پذیرفته است. با این حال، روش‌های بر مبنای NMF همچنان دارای جواب‌های محلی هستند. در پژوهش حاضر با استفاده از یک روش تکراری و با تکیه بر تئوری یادگیری گروهی و ترکیب وزن‌دار نتایج به‌دست‌آمده از تکرارهای مختلف الگوریتم تجزیه-ی طیفی L1/2-NMF، فرآیند استخراج طیف‌ها و فراوانی‌های حاصل از این الگوریتم بهبود یافته است. روش پیشنهادی روشی غیرپارامتریک و از نظر ریاضی روشن است که می‌توان فرآیند پیشنهادی در آن را به الگوریتم‌های پیشرفته‌تری از تجزیه‌ی طیفی تعمیم داد. روش پیشنهادی بر روی داده‌های مختلف مصنوعی و واقعی اجرا گردیده است. نتایج حاصل از آزمایش‌های موجود در این پژوهش، بر روی هر دو دسته از داده‌های فراطیفی، حاکی از کارایی این روش نسبت به روش‌های مشهور در شناسایی عوارض موجود در پیکسل‌های مختلط است.

**واژگان کلیدی:** تجزیه‌ی طیفی، تصاویر فراطیفی، فاکتورگیری ماتریس نامنفی (NMF)، یادگیری گروهی

\* نویسنده رابط

## ۱- مقدمه

تصاویر فراطیفی با شامل شدن تعداد بسیاری از باندهای باریک در گستره‌ی وسیعی از طیف الکترومغناطیس، اطلاعات مهمی در تعیین عوارض موجود بر روی سطح زمین برای استفاده در کاربردهای مختلف سنجش‌ازدور فراهم می‌کنند. وجود پیکسل‌های مختلط در این تصاویر به دلایلی از جمله تفکیک‌پذیری مکانی پایین سنجنده، اختلاط مواد در سطح میکروسکوپی و پدیده‌ی چندمسیری، شناسایی عوارض موجود در آن‌ها را به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد [۱]. بر این اساس روش‌های تجزیه‌ی طیفی برای شناسایی ماهیت این پیکسل‌های مختلط مورد استفاده قرار می‌گیرند. تجزیه‌ی طیفی فرآیندی است که در طی آن طیف اجزای خالص<sup>۱</sup> تصویر (کلاس‌های پوششی) و میزان فراوانی<sup>۲</sup> آن‌ها در هر پیکسل مشخص می‌گردد.

در چند دهه‌ی گذشته روش‌های مختلفی برای تجزیه‌ی تصاویر فراطیفی ارائه شده است که دسته‌ای از الگوریتم‌ها بر پایه‌ی مدل اختلاط خطی بازتاب‌ها و دسته‌ای دیگر بر پایه اختلاط غیرخطی در تصویر می‌باشند. مدل اختلاط طیفی خطی ساده‌ترین و پرکاربردترین مدل مورد استفاده برای تشریح پیکسل‌های مختلط در مباحث تجزیه‌ی طیفی است. در این مدل، اختلاط در سطح بزرگ‌مقیاس اتفاق می‌افتد و عامل ایجاد پیکسل‌های مختلط، ضعف سنجنده است [۱]. اما در مدل اختلاط غیرخطی، ایجاد پیکسل‌های مختلط در تصویر به چندمسیری نور بازتاب یا در مواردی اختلاط مواد خالص در صحنه نسبت داده می‌شود [۲]. از آنجاکه معمولاً تأثیر سنجنده بیشتر در نظر گرفته می‌شود و آنچه به‌عنوان اختلاط روی می‌دهد بیشتر به دلیل مشکلات سنجنده و تفکیک‌پذیری پایین آن است، معمولاً از مدل اختلاط خطی و روش‌های بر مبنای آن در تجزیه‌ی طیفی استفاده می‌شود. بر اساس این مدل، سهم هر کلاس پوششی از هر پیکسل تصویر فراطیفی متناسب با مساحت آن کلاس پوششی بر روی زمین است. روش‌های تجزیه‌ی طیفی خطی به سه دسته کلی روش‌های آماری، روش‌های

هندسی و روش‌های بر مبنای رگرسیون تنک<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند [۱]. روش‌های هندسی، که شامل روش‌هایی مانند PPI<sup>۴</sup> [۳]، VCA<sup>۵</sup> [۴] و N-FINDR [۵] است، بر اساس برخی ویژگی‌های هندسی مدل اختلاط خطی روی داده‌های فراطیفی عمل می‌کنند. روش‌های بر مبنای رگرسیون تنک نیز روش‌های نیمه نظارت‌شده‌ای هستند که نیاز به طیف‌های کتابخانه‌ی طیفی دارند و هدف آن‌ها صرفاً تخمین مقادیر فراوانی در تصویر می‌باشد [۶].

اما در بسیاری از موارد واقعی در اختلاط طیفی، منابع ناشناخته هستند و در تصویر پیکسل خالص وجود ندارد. در این موارد روش‌های آماری مطرح می‌گردند. از این دسته روش‌ها می‌توان به روش‌های ICA<sup>۶</sup> [۷]، BPSS<sup>۷</sup> [۸] و NMF<sup>۸</sup> [۹] اشاره کرد. ICA از فرض استقلال بین فراوانی‌ها استفاده می‌کند و منابع مستقل را از مشاهدات مخلوط بیرون می‌کشد. در روش BPSS که بر پایه‌ی قانون بیز است، ایده اصلی فرموله کردن هر دانشی در مورد سیگنال‌های منبع و ضرایب اختلاط با تخصیص توزیع‌های پیشین به آن‌ها می‌باشد. همچنین برای حل مشکلات موجود در این دو روش، روشی با ترکیب آن‌ها در [۱۰] برای تصاویر فراطیفی تهیه‌شده از سطح ماه ارائه شد.

به دلیل فرض نامنفی بودن مقادیر طیف اعضای خالص و مقادیر فراوانی، روش NMF به‌طور گسترده‌ای مورد توجه پژوهشگران تجزیه‌ی طیفی قرار گرفته است. NMF می‌تواند بدون فرض وجود پیکسل‌های خالص در تصویر اجرا شود و همچنین می‌تواند به‌طور هم‌زمان طیف اعضای خالص و فراوانی آن‌ها در هر پیکسل از تصویر را نتیجه دهد.

علیرغم کارایی NMF در حل مسائل تجزیه‌ی طیفی، به دلیل داشتن تابع هدف غیرمحدب دارای جواب‌های محلی فراوانی است. از این‌رو در مطالعات مختلف با افزودن قیودی به تابع هدف NMF استاندارد، تلاش‌هایی برای بهبود و سوق دادن نتایج آن به سمت بهینه‌ی سراسری انجام گرفته است.

<sup>۳</sup> Sparse Regression Based Algorithms

<sup>۴</sup> Pixel Purity Index

<sup>۵</sup> Vertex Component Analysis

<sup>۶</sup> Independent Component Analysis

<sup>۷</sup> Bayesian Positive Source Separation

<sup>۸</sup> Non negative Matrix Factorization

<sup>۱</sup> Endmember

<sup>۲</sup> Abundance

یک الگوریتم تجزیه‌ی طیفی به عنوان یک فرآیند تصادفی در نظر گرفته شود و تابع توزیع جواب مسئله موجود نباشد، می‌توان از یک تابع توزیع کمکی برای تخمین تابع توزیع واقعی (و ناشناخته) جواب‌های تجزیه‌ی طیفی استفاده کرد. میزان نزدیکی تابع توزیع پیشنهادی به تابع توزیع واقعی جواب‌ها برابر با وزن جواب‌ها خواهد بود. آنگاه به‌وسیله ترکیب وزن‌دار جواب‌های حاصل از تکرارهای مختلف، جواب‌های نهایی تجزیه‌ی طیفی به دست خواهد آمد. به بیان روشن‌تر، در هر الگوریتم با جواب بهینه‌ی محلی، برای دستیابی به جوابی بهینه‌تر کافی است آن را در چندین تکرار اجرا کرد و به هر تکرار وزنی اختصاص داد. ترکیب وزن‌دار نتایج هر تکرار به وسیله‌ی وزن‌های به دست آمده از هر تکرار جوابی بهینه‌تر نسبت به هر تکرار خواهد بود.

بسیاری از روش‌های ارائه‌شده در تجزیه‌ی طیفی روش‌هایی پارامتریک هستند که یافتن مقادیر بهینه برای این پارامترها خود می‌تواند به چالشی جداگانه تبدیل شود. هدف اساسی مقاله حاضر این است که توان یادگیری گروهی در بهبود نتایج تجزیه‌ی طیفی، با توجه به سادگی و عدم نیاز به پارامترهای خاص نمایش داده شود. بدین منظور الگوریتم شناخته‌شده‌ی  $L_{1/2}$ -NMF در چندین مرحله تکرار می‌گردد و هرکدام از این تکرارها به میزان شناسایی یک عضو خالص که از وجود آن در صحنه آگاهی وجود دارد، وزن دهی می‌شوند. این عضو خالص را عضو خالص اولیه می‌نامیم و دقت شناسایی آن را به دقت شناسایی سایر اعضای خالص و فراوانی‌های متناظر با آن‌ها تعمیم می‌دهیم. معیار دقت شناسایی پارامتر SAD است که در بخش ۲ تشریح خواهد شد. در نتیجه با ترکیب وزن‌دار طیف‌ها و فراوانی‌های به‌دست‌آمده از تکرارهای مختلف، ماتریس طیف‌ها و ماتریس فراوانی ترکیب‌شده به دست خواهد آمد.

در ادامه در بخش ۲ تئوری و ریاضیات مربوط به روش پیشنهادی و معیارهای ارزیابی تشریح خواهد شد. در بخش ۳ نتایج پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی داده‌های فراطیفی مصنوعی و داده‌ی فراطیفی واقعی بررسی می‌گردند. در نهایت نتیجه‌گیری از مقاله حاضر در بخش ۴ صورت خواهد گرفت.

Miao و همکاران [۱۱] در پژوهشی با افزودن قید کمترین حجم پوسته<sup>۱</sup> به تابع هدف NMF، ترکیبی از روش‌های آماری و هندسی را ارائه دادند. Liu و همکاران نیز در پژوهشی با قیددار کردن NMF به بهبود تجزیه‌ی طیفی همت گماردند [۱۲]. در روش مذکور تفکیک فراوانی‌ها و هموارسازی فراوانی‌ها به‌عنوان دو قید به تابع هدف NMF افزوده شد. قید تفکیک فراوانی‌ها با هدف کمینه کردن اطلاعات مشترک در بین توزیع فراوانی اعضای خالص مختلف با استفاده از تابعی بر مبنای دیورژانس Kulback-Liebler به مسئله اضافه گردید. قید هموارسازی فراوانی نیز بر این حقیقت استوار است که فراوانی‌ها در تصویر فراطیفی آرام و یکنواخت تغییر می‌کنند و تغییرات ناگهانی به‌ندرت در آن‌ها دیده می‌شود. برای اعمال این قید در پژوهش مذکور از روابط مکانی بین پیکسل‌ها استفاده گردید.

Qian و همکاران نیز روشی تحت عنوان  $L_{1/2}$ -NMF ارائه دادند که در این روش قید تنگی<sup>۲</sup> با استفاده از نرم  $L_{1/2}$  برای اعمال تنگی بر فراوانی‌های حاصل از NMF استفاده گردید [۱۳]. همچنین در پژوهشی دیگر برای کاهش حساسیت به نویز  $L_{1/2}$ -NMF ساختاری گرافی برای فضای داده‌ها در نظر گرفته شد [۱۴]. روش R-CoNMF نیز توسط Li و همکاران ارائه گردید که در آن نرم ترکیبی  $L_{1/2}$  برای اعمال تنگی بر تابع هدف NMF تحمیل گردید [۱۵]. این الگوریتم از طیف‌های به‌دست‌آمده از الگوریتم‌های با فرض وجود پیکسل خالص (به عنوان طیف‌های اولیه) نیز استفاده می‌کند و بر این اساس نرم فروبینیوس اختلاف طیف‌های حاصل با طیف‌های اولیه را وارد تابع هدف می‌کند.

علیرغم تمامی پژوهش‌های صورت‌گرفته در این زمینه، وجود کمینه‌های محلی در روش‌های تجزیه‌ی طیفی آماری، همچنان نتایج حاصل از آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. برای کاهش تأثیر این مسئله، در مقاله حاضر فرآیند نیمه نظارت‌شده‌ای بر اساس تئوری یادگیری گروهی<sup>۳</sup> ارائه شده است که در آن ترکیبی از خروجی‌های موجود از چندین تکرار از الگوریتم تجزیه‌ی طیفی برای رسیدن به جوابی بهینه‌تر استفاده می‌گردد. اگر هر تکرار از

<sup>۱</sup> Minimum Volume Simplex

<sup>۲</sup> Sparsness

<sup>۳</sup> Ensemble Learning

## ۲- تجزیه‌ی طیفی خطی

### ۱-۲- مدل اختلاط طیفی خطی (LMM)

مدل اختلاط خطی<sup>۱</sup> رایج‌ترین و معمول‌ترین مدل مورد استفاده در بحث تجزیه‌ی طیفی می‌باشد. در این مدل فرض بر آن است که بین تابش‌های رسیده به سنجنده فعل و انفعالی صورت نمی‌گیرد و آنچه باعث ترکیب تابش‌های رسیده به سنجنده می‌شود مربوط به مشکلات سنجنده می‌باشد؛ به عبارتی LMM زمانی معتبر است که اعضای خالص به شکل بخش‌های جداگانه فرض شوند. در این مدل طیف هر پیکسل به صورت ترکیب خطی از طیف اجزای سازنده آن در نظر گرفته می‌شود. با فرض اینکه تصویری با  $L$  باند طیفی و  $N$  پیکسل داشته باشیم به طور ریاضی مدل LMM به شکل رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$X = MS + n \quad (1)$$

که در رابطه فوق  $X \in R^{L \times N}$  ماتریس داده‌ها،  $M \in R^{L \times P}$  ماتریس طیف اعضای خالص و  $S \in R^{P \times N}$  ماتریس فراوانی متناظر با اعضای خالص است.  $P$  نیز تعداد اعضای خالص موجود در تصویر می‌باشد. دو قید اساسی نامنفی بودن<sup>۲</sup> (ANC) و جمع برابر یک<sup>۳</sup> (ASC) نیز به ترتیب مطابق با روابط (۲) و (۳) بر این مدل اعمال می‌گردد.

$$S \geq 0 \quad M \geq 0 \quad (2)$$

$$\sum s_{ij} = 1 \quad (3)$$

### ۲-۲- فاکتورگیری ماتریس نامنفی (NMF) به

#### همراه قید تنگی $L_{1/2}$

ماتریس  $X \in R^{L \times N}$  که ماتریس داده‌هاست و عدد صحیحی مثل  $k \leq \min(L, N)$  را در نظر گرفته می‌شود. هدف NMF تعیین ماتریس‌های  $M$  و  $S$  به نحوی است که تابع هدف زیر کمینه گردد.

$$f(M, S) = \frac{1}{2} \|X - MS\|_F^2 \quad (4)$$

$$S.T. \quad M \geq 0, S \geq 0$$

در رابطه فوق  $M \in R^{L \times k}$  و  $S \in R^{k \times N}$  و  $k$  رنک ماتریس  $M$  می‌باشد. همچنین  $\|\cdot\|_F$  نرم فروبینیوس<sup>۴</sup> است که از طریق رابطه (۵) به دست می‌آید.

$$\|X\|_F = \sqrt{\text{trace}(X^T X)} \quad (5)$$

همان‌طور که در بخش پیش ذکر شد، یکی از قیود مورد استفاده در مباحث تصاویر فراطیفی قید تنگی می‌باشد که به طور معمول بر روی فراوانی‌های حاصل از تجزیه‌ی طیفی اعمال می‌گردد. اساس این قید بر این حقیقت استوار است که معمولاً در تصاویر فراطیفی تعداد اعضای خالص بسیار کمتر از تعداد باندهای تصویر می‌باشد [۶]. در نتیجه این مسئله، نرم‌های مختلفی برای اعمال تنگی بر فراوانی‌ها به تابع هزینه NMF اعمال می‌گردد که نرم  $L_q$  برای ماتریسی مثل  $S$  به شکل رابطه (۶) به دست می‌آید.

$$\|S\|_q = \left( \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N s_{ij}^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6)$$

در رابطه فوق  $s_{ij}$  درایه سطر  $i$  و ستون  $j$  از ماتریس فراوانی می‌باشد. با توجه به آنچه گفته شد، در روش  $L_{1/2}$ -NMF که اساس روش پیشنهادی در این پژوهش است، از نرم  $L_{1/2}$  استفاده می‌گردد. در نتیجه اعمال این نرم، تابع هدف  $L_{1/2}$ -NMF به شکل زیر خواهد بود:

$$f(M, S) = \frac{1}{2} \|X - MS\|_F^2 + \lambda \|S\|_{1/2} \quad (7)$$

در پژوهش حاضر با توجه به اینکه ماتریس طیف‌ها نیز می‌تواند تنگ باشد [۱۶]، قید تنگی را بر روی ماتریس مذکور نیز اعمال می‌کنیم که در نتیجه تابع هدف نهایی به شکل رابطه (۸) خواهد بود.

$$f(M, S) = \frac{1}{2} \|X - MS\|_F^2 + \lambda_1 \|S\|_{1/2} + \lambda_2 \|M\|_{1/2} \quad (8)$$

در رابطه اخیر پارامترهای  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  پارامترهای تنظیم‌کننده میزان تأثیر ترم‌های اعمال تنگی هستند.

### ۳-۲- تئوری یادگیری گروهی

استفاده از یادگیری گروهی به صورت یک فرآیند تکراری، می‌تواند در بهینه‌کردن نتایج الگوریتم‌هایی که

<sup>۱</sup> Linear Mixture Model

<sup>۲</sup> Abundance Non negativity Constraint

<sup>۳</sup> Abundance Sum to one Constraint

<sup>۴</sup> Frobenius

$$\begin{aligned}
 E(\theta|x) &= \int \theta w(\theta|x_1, \dots, x_n) q(\theta|x_1, \dots, x_n) d\theta \\
 &= \int \theta w(\theta|x_1, \dots, x_n) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\theta - \theta_i) \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^n \theta w(\theta|x_1, \dots, x_n) \delta(\theta - \theta_i) d\theta \\
 &= \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^n \theta_i w(\theta_i|x_1, \dots, x_n) \delta(\theta - \theta_i) d\theta \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i w(\theta_i|x_1, \dots, x_n) \int \delta(\theta - \theta_i) d\theta \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i w(\theta_i|x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum \theta_i W(\theta_i|x_i)}{\sum W(\theta_i|x_i)}
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

به عبارتی میانگین وزن دار خروجی‌های حاصل از هر تکرار، می‌تواند جوابی نزدیک به جواب بهینه‌ی سراسری تولید کند.

#### ۲-۴- روش پیشنهادی EL1/2-NMF

وجود اطلاعات اولیه در مورد صحنه‌ی برداشت‌شده در تصویربرداری فراطیفی انکارناپذیر است. به عبارتی همواره اطلاعات اولیه‌ای در مورد صحنه برداشت‌شده قبل از هرگونه پردازش موجود می‌باشد. یکی از این اطلاعات آگاهی تقریبی از پوشش اراضی در تصویر مدنظر است. به بیان روشن‌تر در هر صحنه تعدادی از اعضای خالص شناخته‌شده هستند [۱۷]. وجود این اعضای خالص شناخته‌شده می‌توانند در پردازش‌های مختلف مفید باشند. از این‌رو در روش پیشنهادی، به‌گونه‌ای که در ادامه توضیح داده خواهد شد، وجود یک عضو خالص مشخص در تصویر فراطیفی به‌عنوان اطلاعات اولیه وارد پردازش می‌شود. همان‌طور که در بخش ۱ گفته شد، این عضو خالص پژوهش‌گر عضو خالص اولیه نامیده می‌شود.

تجزیه‌ی طیفی را به‌صورت یک فرآیند تصادفی در نظر می‌گیریم که  $M$  و  $S$  خروجی‌های آن هستند. در روش پیشنهادی طبق تئوری یادگیری گروهی ذکرشده در بخش قبل، ابتدا الگوریتم  $L_{1/2}$ -NMF به تعداد دلخواه تکرار می‌شود. سپس هرکدام از تکرارها به‌وسیله پارامتر SAD و با استفاده از طیف عضو خالص اولیه وزن‌دهی می‌شوند؛ به عبارتی دقت استخراج طیف عضو خالص اولیه به‌عنوان وزن آن تکرار در نظر گرفته می‌شود. اگر PE طیف واقعی عضو خالص اولیه و  $PE_i$  طیف استخراج‌شده عضو خالص

جواب بهینه‌ی محلی فراوان دارند نقش اساسی داشته باشد. در این بخش مباحث ریاضی یادگیری گروهی مطرح و اثبات می‌شود و چگونگی رسیدن به جواب بهینه با انجام یک پروسه‌ی تکراری روشن می‌گردد.

اگر  $f(\theta|x)$  تابع توزیع  $\theta$  یعنی خروجی فرآیند تصادفی  $x$  باشد، در  $n$  بار اجرای  $x$  تابع توزیع  $\theta$  به شرط این  $n$  بار اجرا به‌صورت  $f(\theta|x_1, \dots, x_n)$  خواهد بود. امید ریاضی  $\theta$  به‌صورت رابطه (۹) قابل محاسبه است.

$$E(\theta) = \int \theta f(\theta|x_1, \dots, x_n) d\theta \tag{۹}$$

تابع توزیع  $f$ ، تابع توزیع واقعی  $\theta$  می‌باشد. مسئله‌ای که وجود دارد این است که این تابع توزیع ناشناخته است. بنابراین می‌توان تابع توزیعی همانند  $q$  تعریف کرد و به‌وسیله آن توزیع واقعی  $\theta$  را تخمین زد. تابع توزیع انتخاب  $\theta$  با توجه به داده‌های یادگیر به‌صورت  $q(\theta|x_1, \dots, x_n)$  تعریف می‌شود. در نتیجه امید ریاضی  $\theta$  به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 E(\theta|x) &= \int \theta \frac{f(\theta|x_1, \dots, x_n)}{q(\theta|x_1, \dots, x_n)} q(\theta|x_1, \dots, x_n) d\theta \\
 &= \int \theta f(\theta|x_1, \dots, x_n) d\theta
 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

تابعی مثل  $W$  به‌عنوان تابع وزن به شکل رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

$$w(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{f(\theta|x_1, \dots, x_n)}{q(\theta|x_1, \dots, x_n)} \tag{۱۱}$$

در نتیجه امید ریاضی  $\theta$  به شکل زیر خواهد بود:

$$E(\theta|x) = \int \theta w(\theta|x_1, \dots, x_n) q(\theta|x_1, \dots, x_n) d\theta \tag{۱۲}$$

تابع توزیع  $q$  می‌تواند تابعی دلخواه باشد. از این‌رو به‌طور دلخواه این تابع را تابع ضربه به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$q(\theta|x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\theta - \theta_i) \tag{۱۳}$$

در نتیجه برای امید ریاضی  $\theta$  اثبات می‌شود که:

گردیده است. اگر  $S_{ik}$  مقدار فراوانی واقعی برای پیکسل  $i$  ام در نقشه فراوانی مربوط به عضو خالص  $k$  ام و  $\hat{S}_{ik}$  مقدار فراوانی تخمین زده شده برای همان پیکسل و مقدار  $N$  تعداد پیکسل‌های تصویر باشد، آنگاه  $RMSE_k$  که مقدار خطا برای نقشه فراوانی تولید شده از عضو خالص  $k$  ام است از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$RMSE_k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_{ik} - \hat{S}_{ik})^2} \quad (19)$$

### ۳-۱- ارزیابی بر روی داده‌های فراطیفی مصنوعی

در این بخش کارایی روش پیشنهادی  $EL_{1/2}$ -NMF با استفاده از داده‌های فراطیفی مصنوعی که به‌وسیله طیف‌های موجود در کتابخانه‌ی طیفی USGS ساخته شده‌اند، ارزیابی می‌گردد. نقشه‌های فراوانی در این مقاله با استفاده از روش پیشنهادی در [۴] ساخته شده‌اند که فراوانی‌ها از توزیع دیریکله<sup>۲</sup> تبعیت می‌کنند. تصاویر فراطیفی مصنوعی مورد استفاده در این بخش به‌وسیله‌ی مقادیر مختلف تعداد اعضای خالص و نویز ساخته شدند تا تأثیر هر کدام از این عوامل در نتیجه‌گیری مشخص گردد. مقادیر اعضای خالص برای این داده‌ها  $P = \{3, 6, 9, 12, 15\}$  انتخاب گردیدند. همچنین مقادیر نویز  $SNR (dB) = \{25, 40, 50\}$  برای اعمال نویز در نظر گرفته شدند. نتایج حاصل از آزمایش بر روی داده‌های فراطیفی مصنوعی با الگوریتم‌های مختلف در جدول ۱ نمایش داده شده است.

در جدول مذکور، مقدار میانگین SAD ارائه گردیده است. این مقدار از میانگین‌گیری مقدار SAD برای طیف‌های مختلف به‌دست آمده است. در این جدول مقادیر کمتر که حاکی از دقت بیشتر است، برجسته شده‌اند. همان‌طور که در این جدول مشخص شده است، در اغلب موارد دقت روش پیشنهادی  $EL_{1/2}$ -NMF بهتر از نتیجه به‌دست آمده از سایر روش‌هاست. الگوریتم  $L_{1/2}$ -NMF از ۱۵ حالت مختلف از داده‌ها صرفاً در ۴ حالت بهتر و در ۲ حالت همانند الگوریتم  $EL_{1/2}$ -NMF عمل کرده است. همچنین الگوریتم R-CoNMF در تمامی حالات ضعیف‌تر از عملکرد دو الگوریتم دیگر بوده است.

اولیه از تکرار  $i$  باشد، آنگاه پارامتر SAD که معیاری برای میزان شباهت بین دو طیف مذکور است از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$SAD = \cos^{-1} \left( \frac{PE^T \cdot PE_i}{\|PE\| \cdot \|PE_i\|} \right) \quad (15)$$

در رابطه فوق  $SAD_i$  مقدار پارامتر SAD برای تکرار  $i$  می‌باشد. بدیهی است که هرچه میزان SAD کوچک‌تر باشد و به عبارتی طیف استخراج شده به طیف واقعی نزدیک‌تر باشد، وزن آن تکرار بیشتر خواهد بود. بنابراین وزن تکرار  $i$  ام را به‌صورت معکوس  $SAD_i$  در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$W_i = \frac{1}{SAD_i} \quad (16)$$

در نهایت با ترکیب وزن دار ماتریس طیف‌ها و فراوانی‌های به‌دست آمده از تکرارهای مختلف، ماتریس طیف نهایی و ماتریس فراوانی نهایی به شکل زیر خواهند بود:

$$M_{Final} = \frac{\sum_{i=1}^T W_i M_i}{\sum_{i=1}^T W_i} \quad (17)$$

$$S_{Final} = \frac{\sum_{i=1}^T W_i S_i}{\sum_{i=1}^T W_i} \quad (18)$$

### ۳- آزمایش‌ها و نتایج

در این بخش نتایج حاصل از آزمایش‌های انجام شده با استفاده از داده‌های فراطیفی مصنوعی و فراطیفی واقعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از دو الگوریتم مشهور  $L_{1/2}$ -NMF و R-CoNMF که در مقدمه توضیح داده شدند مقایسه می‌گردد.

برای ارزیابی نتایج حاصل در این مقاله، از دو متریک بسیار متداول در پژوهش‌های تجزیه‌ی طیفی استفاده شده است. اولین متریک، SAD می‌باشد که در بخش قبل به آن پرداخته شد. این پارامتر علاوه بر وزن دهی به هر تکرار از الگوریتم تجزیه‌ی طیفی، می‌تواند به‌عنوان معیاری برای تعیین صحت کلی روش پیشنهادی نیز به کار رود. علاوه بر آن پارامتر خطای جذر میانگین مربعات<sup>۱</sup> (RMSE) نیز برای تعیین صحت فراوانی‌های به‌دست آمده، استفاده

<sup>۲</sup> Dirichlet distribution

<sup>۱</sup> Root Mean Square Error

جدول ۲- مقادیر RMSE به دست آمده برای نقشه های فراوانی استخراج شده از الگوریتم های مختلف

P	SNR (dB)	L <sub>1/2</sub> -NMF	R-CoNMF	EL <sub>1/2</sub> -NMF
3	25	0.9715	<b>0.8453</b>	0.9696
	40	0.9826	<b>0.6903</b>	0.8181
	50	0.9885	0.2074	<b>0.0644</b>
6	25	0.808	0.8652	<b>0.7894</b>
	40	0.9325	0.8828	<b>0.5815</b>
	50	0.9189	<b>0.7156</b>	1.0181
9	25	0.9419	<b>0.7008</b>	0.8399
	40	0.9321	<b>0.8019</b>	0.8776
	50	0.877	<b>0.8354</b>	0.8887
12	25	0.8501	<b>0.7299</b>	0.8457
	40	0.9319	<b>0.7783</b>	0.8806
	50	0.9924	<b>0.787</b>	0.9929
15	25	0.8268	<b>0.7481</b>	0.7728
	40	0.9627	0.8323	<b>0.818</b>
	50	0.9949	<b>0.8678</b>	0.9311

جدول ۱- مقادیر میانگین SAD به دست آمده برای طیف های استخراج شده از الگوریتم های مختلف

P	SNR (dB)	L <sub>1/2</sub> -NMF	R-CoNMF	EL <sub>1/2</sub> -NMF
3	25	0.0146	0.208	<b>0.0135</b>
	40	0.002	0.31	<b>0.0017</b>
	50	0.0004	0.235	<b>0.0003</b>
6	25	0.0254	0.1999	<b>0.0246</b>
	40	0.0027	0.1643	<b>0.0025</b>
	50	<b>0.0008</b>	0.1529	<b>0.0008</b>
9	25	0.0706	0.3508	<b>0.0666</b>
	40	<b>0.0082</b>	0.1867	0.0086
	50	0.002	0.1972	<b>0.0019</b>
12	25	0.1379	0.4552	<b>0.1145</b>
	40	<b>0.0214</b>	0.1603	0.0215
	50	<b>0.0052</b>	0.1499	<b>0.0052</b>
15	25	0.1708	0.564	<b>0.1623</b>
	40	<b>0.029</b>	0.1603	0.0298
	50	<b>0.0075</b>	0.1165	0.0076

### ۲-۳- ارزیابی بر روی داده های فراطیفی واقعی

در این بخش برای ارزیابی روش پیشنهادی از مجموعه داده فراطیفی واقعی Cuprite که توسط سنجنده AVIRIS اخذ شده است، استفاده گردیده است. این داده که از مشهورترین مجموعه داده های مورد استفاده در پردازش تصاویر فراطیفی به شمار می آید، در سال ۱۹۹۷ از صحرای نوادا در ایالات متحده برداشت شد. داده ی مذکور شامل ۲۲۴ باند با قدرت تفکیک مکانی ۲۰ متر و قدرت تفکیک طیفی ۱۰ نانومتر می باشد و محدوده ی طیفی این مجموعه داده از ۰/۴ تا ۲/۵ میکرومتر است. این داده ی فراطیفی به دلیل شامل شدن مواد معدنی و رخداد تلفیق طیفی شدید، در مباحث تجزیه ی طیفی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. زیرمجموعه ای از این داده با ابعاد ۱۰۱×۱۰۱ پیکسل برای ارزیابی نتایج در این بخش از آزمایش ها مورد استفاده قرار گرفته است. باندهای ۱، ۲، ۱۰۴-۱۱۳، ۱۴۸-۱۶۷ و ۲۲۱-۲۲۴ این تصویر باندهای جذب آب و باندهایی با SNR پایین هستند و در نتیجه در پردازش های تجزیه ی طیفی از داده حذف شده و تعداد باندها به ۱۸۸ باند کاهش خواهد یافت. باند سی ام از مجموعه داده ی Cuprite به طور نمونه در شکل ۱ نمایش داده شده است. تعداد ۹ عضو خالص موجود در این تصویر با استفاده از روش HySime [۱۸] تعیین گردیده است.

نتایج به دست آمده از ارزیابی نقشه های فراوانی حاصل از الگوریتم های مختلف نیز در جدول ۲ نمایش داده شده است. همان طور که ذکر شد، معیار ارزیابی این نقشه ها پارامتر RMSE می باشد.

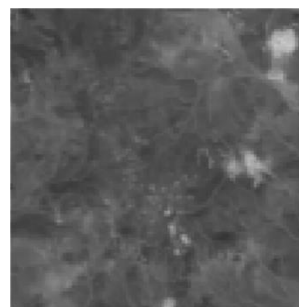
در جدول ۲ نیز مقادیر دقیق تر برجسته شده اند. همان طور که در این جدول مشخص شده است، به طور کل صحت نقشه های فراوانی حاصل از روش R-CoNMF بهتر از دو روش دیگر بوده است. اما در این قسمت دو نکته اساسی وجود دارد. نکته اول این است که روش پیشنهادی روشی ساده تر نسبت به R-CoNMF به حساب می آید. از طرفی می توان تئوری یادگیری گروهی را بر روی نتایج به دست آمده از الگوریتم R-CoNMF اجرا کرد. با این حال با توجه به سنگین شدن هزینه محاسبات از لحاظ زمانی، اجرای یادگیری گروهی بر روی نتایج L<sub>1/2</sub>-NMF ترجیح داده شده است. با این حال در مواردی صحت روش پیشنهادی بهتر از R-CoNMF بوده است. نکته ی دیگر این است که روش پیشنهادی در تمامی موارد بهتر از روش L<sub>1/2</sub>-NMF نتیجه داده است. همچنین برای ارزیابی بهتر بایستی RMSE و SAD را در کنار هم نگاه کرد.

در نتیجه به طور کل با ارزیابی دو جدول ۱ و ۲، روش پیشنهادی EL<sub>1/2</sub>-NMF با توجه به صحت خوب در استخراج طیف ها و فراوانی ها نسبت به دیگر روش ها مناسب تر به نظر می رسد. از طرفی توانایی یادگیری گروهی در بهبود جواب های محلی تجزیه ی طیفی روشن می گردد.

در نتیجه نمی‌توان آنالیزی برای مقادیر فراوانی در داده‌های فراطیفی واقعی ارائه داد. با این حال نقشه‌های فراوانی استخراج شده با استفاده از روش پیشنهادی برای بررسی کیفی کارایی آن، در شکل ۳ نمایش داده شده است.

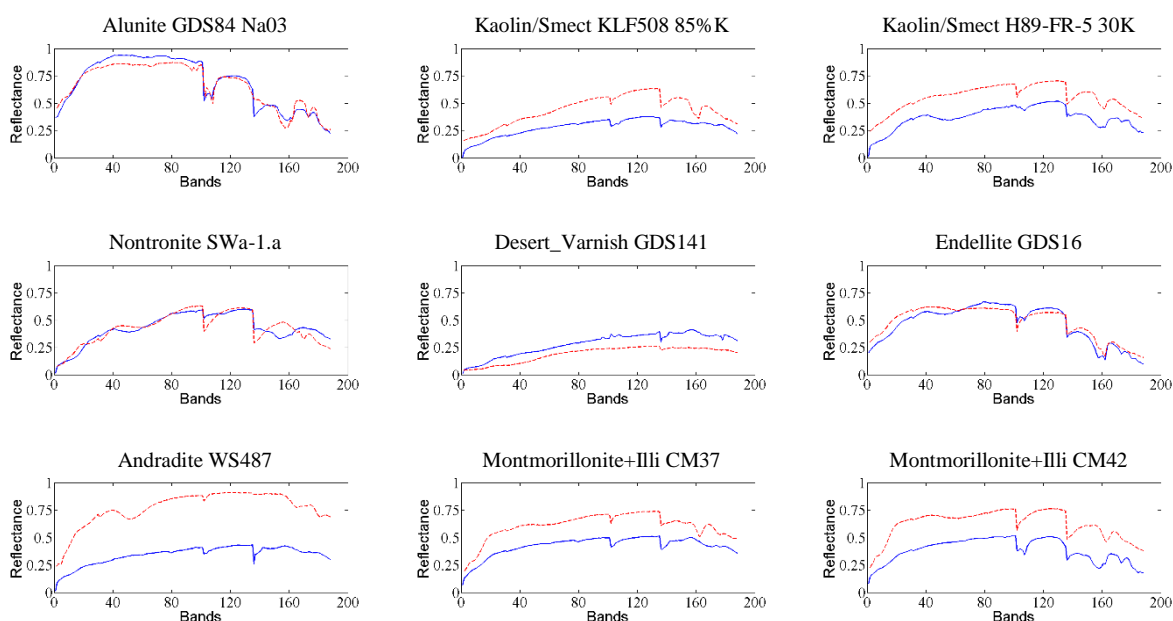
جدول ۳- مقایسه‌ی کارایی الگوریتم‌های مختلف در استخراج طیف اعضای خالص از داده Cuprite بر اساس پارامتر SAD

نام ماده	روش		
	L <sub>1/2</sub> -NMF	R-CoNMF	EL <sub>1/2</sub> -NMF
Alunite GDS84 Na03	0.0768	0.0811	<b>0.068</b>
Kaolin/Smect KLF508 85%K	<b>0.081</b>	0.1889	0.0902
Endellite GDS16	0.1108	<b>0.0843</b>	0.1025
Nontronite SWa-1.a	0.1272	0.1874	<b>0.1242</b>
Desert Varnish GDS141	0.0886	0.1863	<b>0.0789</b>
Montmorillonite+Illite CM37	0.0698	0.1082	<b>0.0636</b>
Kaolin/Smect H89-FR-5 30K	<b>0.0861</b>	0.1246	0.091
Montmorillonite+Illite CM42	0.1099	0.1218	<b>0.1027</b>
Andradite WS487	0.0935	0.1032	<b>0.0797</b>
Average SAD	0.0937	0.1318	<b>0.089</b>



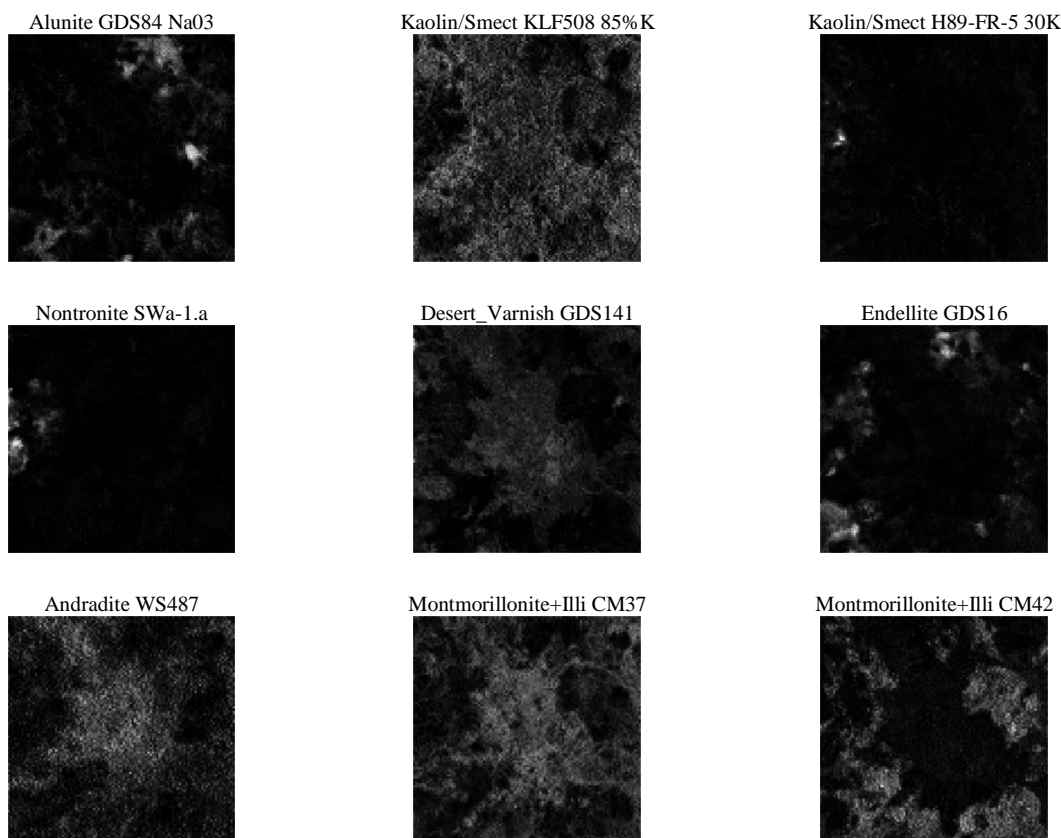
شکل ۱- باند سی‌ام از مجموعه داده Cuprite

نتایج حاصل از ارزیابی روش‌های مختلف در استخراج طیف اعضای خالص موجود در داده Cuprite در جدول ۳ نمایش داده شده است. همان‌طور که در جدول مذکور مشاهده می‌گردد، روش پیشنهادی EL<sub>1/2</sub>-NMF در اکثر موارد دقت بیشتری در استخراج طیف اعضای خالص داشته است. همچنین در جدول ۳ مقدار Average SAD از میانگین‌گیری مقادیر SAD برای اعضای خالص مختلف به دست آمده است. کمتر بودن مقدار Average SAD برای روش EL<sub>1/2</sub>-NMF نسبت به سایر روش‌ها نیز می‌تواند شاخص دیگری برای نشان دادن کارایی این روش باشد. طیف اعضای خالص مختلف استخراج شده توسط الگوریتم EL<sub>1/2</sub>-NMF از مجموعه داده‌ی Cuprite در کنار طیف‌های مرجع در شکل ۲ نمایش داده شده است. از آنجاکه برای هیچ داده‌ی فراطیفی واقعی نقشه‌ی مرجعی به‌منظور بررسی کمی صحت فراوانی‌ها وجود ندارد،



شکل ۲- طیف اعضای خالص استخراج شده از الگوریتم EL<sub>1/2</sub>-NMF برای مجموعه داده Cuprite (نمودار آبی‌رنگ) در مقایسه با طیف‌های مرجع (نمودارهای قرمز رنگ)





شکل ۳- نقشه‌های فراوانی استخراج شده از الگوریتم  $EL_{1/2}$ -NMF برای مجموعه داده Cuprite

#### ۴- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

روش‌های بر مبنای NMF بسیار مورد توجه پژوهشگران تجزیه‌ی طیفی تصاویر فراطیفی قرار گرفته‌اند. وجود هندسه غیرمحدب در تابع هدف NMF و در نتیجه کمینه‌های محلی فراوان، صحت روش‌های مذکور را به‌طور اساسی تحت تأثیر قرار داده است. در این مقاله روشی بر مبنای روش  $L_{1/2}$ -NMF و با استفاده از یادگیری گروهی تحت عنوان  $EL_{1/2}$ -NMF برای بهبود تجزیه‌ی طیفی تصاویر فراطیفی ارائه گردید. در این روش فرآیندی تکراری از تجزیه‌ی طیفی تصاویر فراطیفی مطرح شد. طی این فرآیند نتایج حاصل از تجزیه‌ی طیفی در هر تکرار

وزن‌دهی شده و با ترکیب آن‌ها نتیجه‌ای بهینه حاصل گردید. آزمایش‌های انجام شده در این پژوهش حاکی از کارایی روش پیشنهادی در بهبود تجزیه‌ی طیفی تصاویر فراطیفی بود. هدف اساسی این پژوهش مطرح نمودن چگونگی استفاده از یادگیری گروهی در تجزیه‌ی طیفی بود که در دل این مسئله نحوه‌ی وزن‌دهی به تکرارهای مختلف تجزیه‌ی طیفی نهفته بود. باین‌حال در کارهای آتی روش‌های دیگر وزن‌دهی می‌تواند در بهبود نتایج کارآمد باشد. از طرفی جایگزین نمودن روش‌های دیگر تجزیه‌ی طیفی به‌جای  $L_{1/2}$ -NMF نیز می‌تواند مبنای پژوهش‌های آتی قرار گیرد.

#### مراجع

- [1] J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader and J. Chanussot, "Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," J. Sel.Topics Appl.Earth Observ. Remote Sens., vol. 5, no. 2, pp. 354–379, 2012.
- [2] R. Heylen, M. Parente and P. Gader, "A Review of Nonlinear Hyperspectral Unmixing Methods," J. Sel.Topics Appl.Earth Observ. Remote Sens., vol. 7, no. 6, pp. 1844-1868, 2014.
- [3] C.-I. Chang and A. Plaza, "A Fast Iterative Algorithm for Implementation of Pixel Purity Index," IEEE Geosci. Remote Sens. Lett., vol. 3, no. 1, pp. 63-67, 2006.
- [4] J.M.P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens, vol. 43, no. 4, pp. 898–910, 2005.

- [5] M. E. Winter, "N-FINDR: an algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data," Proc. SPIE 3753, Imaging Spectrometry V, pp. 266-275, 1999.
- [6] M. D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias and A. Plaza, "Sparse Unmixing of Hyperspectral Data," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 49, no. 6, pp. 2014-2039, 2011.
- [7] A. Hyvärinen and E. Oja, "Independent Component Analysis: Algorithms and Applications," Neural Netw., vol. 13, pp. 411-430, 2000.
- [8] S. Moussaoui, D. Brie, C. Carteret and A. M. Djafari, "Application of Bayesian non-negative source separation to mixture analysis in spectroscopy," 24th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, pp. 237-244, 2004.
- [9] V. P. Pauca, J. Piper and R. J. Plemmons, "Nonnegative Matrix Factorization for Spectral Data Analysis," Linear Algebra and its Applications, vol. 416, no. 1, pp. 29-47, 2006.
- [10] S. Moussaoui, H. Hauksdottir, F. Schmidt, C. Jutten, J. Chanussot, D. Brie, S. Doute and J. . A. Benediktsson, "On the decomposition of Mars hyperspectral data by ICA and Bayesian positive source separation," Neurocomputing, vol. 71, pp. 2194-2208, 2008.
- [11] L. Miao and H. Qi, "Endmember Extraction From Highly Mixed Data Using Minimum Volume Constrained Nonnegative Matrix Factorization," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 45, no. 3, pp. 765-777, 2007.
- [12] X. Liu, W. Xia, B. Wang and L. Zhang, "An Approach Based on Constrained Nonnegative Matrix Factorization to Unmix Hyperspectral Data," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 49, pp. 757-772, 2011.
- [13] Y. Qian, S. Jia, J. Zhou and A. Robles-Kelly, "Hyperspectral Unmixing via L1/2 Sparsity-Constrained Nonnegative Matrix Factorization," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 49, no. 11, pp. 4282-4297, 2011.
- [14] X. Lu, H. Wu, Y. Yuan, P. Yan and X. Li, "Manifold Regularized Sparse NMF for Hyperspectral Unmixing," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 51, no. 5, pp. 2815-2826, 2013.
- [15] J. Li, J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza and L. Liu, "Robust Collaborative Nonnegative Matrix Factorization for Hyperspectral Unmixing," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 54, no. 10, pp. 6076-6090, 2016.
- [16] R. Rajabi and H. Ghassemian, "Spectral Unmixing of Hyperspectral Imagery Using Multilayer NMF," IEEE Geosci. Remote Sens. Lett., vol. 12, no. 1, pp. 38-42, 2015.
- [17] W. Tang, Z. Shi, Y. Wu and C. Zhang, "Sparse Unmixing of Hyperspectral Data Using Spectral A Priori Information," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 53, no. 2, pp. 770-783, 2015.
- [18] J. M. Bioucas-Dias and J. M. P. Nascimento, "Hyperspectral Subspace Identification," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 46, no. 8, pp. 2435-2445, 2008.