

ارائه روشی نوین برای تعیین تانسور گرادیان جاذبه با استفاده از مشاهدات

ارتفاعسنجی ماهواره‌ای

مطالعه موردی: خلیج فارس

عبدالرضا صفری^۱، محمدعلی شریفی^۲، هادی امین^{۳*}، اسماعیل فروغی^۳

^۱دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

asafari@ut.ac.ir

^۲استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

sharifi@ut.ac.ir

^۳دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی - گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

{amin_hadi, e.foroughi}@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت اسفند ۱۳۹۱، تاریخ تصویب شهریور ۱۳۹۲)

چکیده

با ظهور ارتفاعسنجی ماهواره‌ای در سال ۱۹۷۳، پنجره جدیدی در مطالعات و تحقیقات اقیانوسی و دریایی و علوم مرتبط با زمین گشوده شد. در این میان پیشرفت و بلوغ تکنولوژی حسگرها و انجام مأموریت‌های مختلف ارتفاعسنجی ماهواره‌ای در سال‌های اخیر، تحولی شگرف در علم ژئودزی و مبحث مدل‌سازی میدان ثقل زمین ایجاد کرد. ارتفاعسنجی ماهواره‌ای منبع عظیمی از اطلاعات جهت تعیین ژئوئید با دقت و رزولوشن مکانی بالا را در اختیار قرار می‌دهد. اطلاعات این روش جایگزین بسیار مناسبی برای داده‌های ثقل دریایی در مدل‌سازی فرکانس بالای میدان ثقل زمین در مناطق دریایی به‌شمار می‌رود. مشاهدات ثقل دریایی بدلیل تأثیرات محیطی همواره سطح نویز بالایی را با خود به‌همراه دارند. همچنین با استفاده از این مشاهدات نمی‌توان فرکانس‌های بالای میدان ثقل زمین را در پوشش جهانی مدل‌سازی کرد. تانسور گرادیان جاذبه به‌عنوان مشتقات مکانی مرتبه دوم پتانسیل جاذبه از فضا، اطلاعات بیشتری را نسبت به سایر اندازه‌گیری‌های میدان ثقل زمین نظیر آنومالی جاذبه در اختیار قرار می‌دهد. بنابراین در این مقاله یک روش جدید برای تعیین تانسور گرادیان جاذبه در سطح دریا براساس ارتفاعسنجی ماهواره‌ای و دو روش مدل‌سازی بر مبنای توابع پایه شعاعی و اسپیلاین‌های هارمونیک معرفی شده است.

به‌منظور بررسی موردی روش‌های ارائه شده، تانسور گرادیان جاذبه در منطقه خلیج فارس بر مبنای مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای تعیین و نتایج آن ارائه شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده برای تانسور گرادیان جاذبه، مشخص می‌شود که مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی نتایج بهتری را نسبت به مدل‌سازی بر مبنای توابع اسپیلاین هارمونیک به‌همراه خواهد داشت.

واژگان کلیدی: ارتفاعسنجی ماهواره‌ای، ژئوئید، تانسور گرادیان جاذبه، توابع پایه شعاعی، آنومالی جاذبه، اسپیلاین‌های هارمونیک.

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

گروه‌های مختلفی از سیستم‌های پایه برای مدل‌سازی محلی پیشنهاد شده است. از جمله این سیستم‌های محلی می‌توان به مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی کروی^۱ اشاره کرد. توابع پایه شعاعی کروی (SRBF) به‌طور وسیع در مدل‌سازی میدان ثقل مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله کارهای انجام شده در خصوص مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی می‌توان به کارهای انجام شده توسط (بیرهامر، ۱۹۷۶[۱]؛ سانکل، ۱۹۸۱[۲]؛ ورمیر، ۱۹۸۲[۳]، ۱۹۸۳[۴]، ۱۹۸۴[۵]، ۱۹۹۵[۶]؛ فریدن و روتر، ۱۹۸۳[۷]؛ شرنینگ، ۱۹۸۶[۸]؛ بالها و همکاران، ۱۹۸۶[۹]؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۷[۱۰]؛ مارچنکو، ۱۹۹۸[۱۱]؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۸[۱۲]؛ مارچنکو و همکاران، ۲۰۰۱[۱۳]؛ هولسچنیدر و همکاران، ۲۰۰۳[۱۴]؛ ایگر و همکاران، ۲۰۰۴[۱۵]؛ اشمیت و همکاران، ۲۰۰۴[۱۶]، ۲۰۰۵[۱۷]، ۲۰۰۷[۱۸]؛ چمبودوت و همکاران، ۲۰۰۵[۱۹] و کلیس و ویتور، ۲۰۰۷[۲۰]) اشاره نمود.

مدل‌سازی میدان جاذبه زمین نیازمند مشاهدات جاذبه زمینی، دریایی، هوایی و فضایی می‌باشد[۲۱]. مشاهدات جاذبه دریایی به‌خاطر عواملی همچون نوسان‌ها و شتاب‌های حرکت کشتی و نیز خطاهای دستگاهی که در محیط دریا بیش از خشکی است دقت کمی دارد و به‌علاوه با توجه به وسعت دریاها و سرعت کم کشتی‌ها، داده‌های جمع‌آوری شده در این روش دارای مشکل عدم هم‌زمانی بوده و در اختیار داشتن یک پوشش جهانی از داده‌های اقیانوسی را امری بسیار زمان‌بر و شاید از نظر اقتصادی غیرممکن می‌سازد[۲۲]. از این‌رو تلاش در جهت افزایش مشاهدات جاذبه دریایی و همچنین افزایش پوشش این داده‌ها و نیز یافتن راه‌حل‌های جایگزین به‌منظور تأمین مشاهدات گرانی مورد نیاز، از موضوعات روز در تحقیقات ژئودزی و ژئوفیزیک جهانی به‌شمار می‌رود. یکی از اساسی‌ترین موضوعات در اندازه‌گیری داده‌های جاذبه، ثبات دستگاه در طول زمان مشاهده است و از آنجا که انجام مشاهدات گرانی در دریا بر روی سکوی

متحرک (کشتی) صورت می‌گیرد، لذا خطاهای متعددی وارد داده‌های جاذبه دریایی می‌شود. این خطاها عمدتاً عبارتند از: (۱) خطاهای دستگاهی (۲) خطای دریافت (۳) خطا در تصحیح اتووش ناشی از حرکت کشتی (۴) خطا در تصحیح شتاب‌های عمودی (۵) خطا در تصحیح شتاب‌های افقی. در این راستا تلاش‌هایی جهت یافتن تصحیحات لازم برای حذف این خطاها صورت گرفته است که از جمله آن‌ها می‌توان به تحقیقات (دهلینگر و همکاران، ۱۹۶۶[۲۳]؛ تالوانی، ۱۹۷۰[۲۴] و هریسون، ۱۹۶۰[۲۵]) اشاره کرد.

با پرتاب اولین ماهواره ارتفاعسنجی به‌نام اسکای لب^۲ در سال ۱۹۷۳ و به‌دنبال آن پرتاب دیگر ماهواره‌های ارتفاعسنجی (GEOS3 در سال ۱۹۷۵، SEASAT1 در ۱۹۷۸، EOSAT در ۱۹۸۵، ERS1 در ۱۹۹۱، TOPEX/POSEIDON در ۱۹۹۲ و JASON1 در ۲۰۰۲)، پنجره جدیدی در مطالعات اقیانوسی و دریایی گشوده شد. ارتفاعسنجی ماهواره‌ای^۳ منبع جدیدی از اطلاعات برای تعیین ژئوئید در سطح دریا ایجاد می‌کند. کمیت مشاهداتی تمامی ماهواره‌های ارتفاعسنجی، ارتفاع ماهواره از سطح لحظه‌ای آب دریا می‌باشد که با اعمال تصحیحات لازم، این فاصله به فاصله تصحیح شده ماهواره تا سطح لحظه‌ای آب دریا تبدیل می‌گردد. با ثبت مختصات ماهواره توسط سیستم تعیین موقعیت جهانی^۴ و در نتیجه معلوم بودن ارتفاع ماهواره از سطح بیضوی مرجع، می‌توان ارتفاع سطح لحظه‌ای آب از بیضوی مرجع را به‌دست آورد. بدلیل اینکه سطح آب دریا به‌خاطر تغییرات جزرومدی دارای رفتار تناوبی است، بنابراین با به کارگیری روش آنالیز هارمونیک می‌توان از سطح لحظه‌ای آب دریا به سطح متوسط آب دریا^۵ رسید. ژئوئید به‌عنوان یک سطح هم‌پتانسیل از میدان ثقل زمین، به بهترین نحو بر سطح متوسط آب دریا منطبق است. اما این دو سطح همواره دارای یک میزان اختلاف می‌باشند که میزان این جدایی توپوگرافی سطح دریا^۶ نامیده می‌شود. بنابراین با

^۲ SKYLAB

^۳ Satellite Altimetry

^۴ Global Positioning System(GPS)

^۵ Mean Sea Level(MSL)

^۶ Sea Surface Topography(SST)

^۱ Spherical Radial Base Functions

درخواست برای داده‌های پتانسیل جاذبه باقیمانده محاسبه شده، تعیین می‌گردد. در مرحله بعد پارامترهای محاسبه شده برای توابع پایه شعاعی جهت تعیین پتانسیل باقیمانده به کار می‌رود.

در مدل‌سازی با استفاده از بسط کرنلی اسپیلاین‌های هارمونیک، تعیین پارامتر پایداری بهینه و شعاع بهینه برای کرهٔ بیرهامر، از اهمیت بالایی برخوردار است که نحوهٔ تعیین این پارامترها توضیح داده می‌شود.

نهایتاً با اعمال اپراتور گرادین جاذبه به پتانسیل جاذبه تولید شده توسط هر دو روش مدل‌سازی (مدل‌سازی بر مبنای توابع پایه شعاعی کروی و بر مبنای اسپیلاین‌های هارمونیک)، مؤلفه‌های تانسور گرادین جاذبه در منطقه مورد مطالعه تولید می‌گردد.

۲- تعیین سطح متوسط دریا (MSL) با استفاده از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای

کمیت مشاهداتی تمامی ماهواره‌های ارتفاع‌سنجی، ارتفاع ماهواره تا سطح آب می‌باشد. این ماهواره‌ها با ارسال پالس الکترومغناطیس، موج بازگشتی از سطح دریا را دریافت کرده و با ثبت سرعت رفت و برگشت امواج، فاصلهٔ ماهواره تا سطح آب را بعنوان خروجی در اختیار قرار می‌دهند. این فاصله پس از اعمال تصحیحات محیطی و دستگاهی به فاصلهٔ تصحیح شدهٔ ماهواره تا سطح لحظه‌ای آب تبدیل می‌گردد که در اصطلاح به آن دامنهٔ تصحیح شده^۱ گفته می‌شود [۲۲]. برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر در مورد تصحیحات لازم به [۳۸] مراجعه شود. در تمامی ماهواره‌های ارتفاع‌سنجی، موقعیت ماهواره در مدار توسط سامانه تعیین موقعیت ماهواره‌ای قابل ارائه می‌باشد. بنابراین با داشتن ارتفاع ماهواره از سطح بیضوی مرجع، با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان به ارتفاع سطح لحظه‌ای آب از بیضوی مرجع رسید:

$$SSH(\lambda, \varphi) = H^{sat}(\lambda, \varphi) - h(\lambda, \varphi) \quad (1)$$

انجام مشاهدات و محاسبات خاص مربوط به روش‌های مختلف تعیین توپوگرافی سطح دریا (SST)، می‌تواند ژئوئید را با دقت بالایی از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای به دست آورد. اندازه‌گیری‌های ماهواره‌ای ارتفاع‌سنجی دارای دقتی در حد سانتیمتر می‌باشند که در مناطق ساحلی این دقت به دسیمتر کاهش پیدا می‌کند (برای جزئیات بیشتر در مورد دقت مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای منبع [۲۶] را ملاحظه فرمائید). این چنین دقتی در فضای هندسی برابر است با میکروگال در فضای جاذبه. بنابراین داده‌های ارتفاع‌سنجی منبع نسبتاً دقیقی برای کارهای میدان جاذبه است.

از جمله کارهای صورت گرفته در راستای مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای می‌توان به تحقیقات (سندول و اسمیت، ۱۹۹۷ [۲۷]؛ آندرسن و نادسن، ۱۹۹۸ [۲۸]؛ ونگ و هسوجانگ، ۲۰۰۲ [۲۹]؛ زیوس و فارزبرگ، ۱۹۹۸ [۳۰]؛ ونگ و همکاران، ۱۹۹۸ [۳۱]؛ ونگ و پارسونز، ۱۹۹۶ [۳۲]؛ صفری و اردلان، ۱۳۸۲ [۳۳]؛ صفری و همکاران، ۲۰۰۵ [۳۴]؛ آندرسن و نادسن، ۲۰۰۰ [۳۵]؛ صفری و همکاران، ۱۳۸۷ [۳۶]؛ سندول و اسمیت، ۲۰۰۹ [۳۷]) اشاره کرد.

در این مقاله پس از محاسبهٔ ارتفاعات ژئوئید در منطقهٔ مورد نظر براساس مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، با به‌کارگیری عکس فرمول برونز بیضوی در نقاط مورد نظر، شبکهٔ منظمی از مقادیر ارتفاع ژئوئید که از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای به دست آمده‌اند، به شبکهٔ منظمی از مقادیر پتانسیل واقعی میدان ثقل زمین بر روی سطح هم پتانسیل مرجع تبدیل می‌شود.

در این مقاله از کرنل دوقطبی شعاعی و توابع اسپیلاین هارمونیک برای مدل‌سازی محلی میدان ثقل استفاده شده است. در مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی کروی از ترکیب خطی این توابع استفاده می‌شود، لذا تعیین تعداد این توابع، ضرایب بسط (یا پارامتر مقیاس) و انتخاب بهینه مراکز آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. جهت مدل‌سازی با استفاده از توابع پایه شعاعی ابتدا شبکه‌ای منظم از توابع پایه در منطقه مورد مطالعه در نظر گرفته می‌شود، سپس با استفاده از روش کمترین مربعات پهنای باند و مراکز بهینه توابع تعیین می‌شود. تعداد تکرار بر اساس دقت مورد

^۱ Corrected Range

که در آن SSH فاصله سطح لحظه‌ای آب دریا تا سطح بیضوی مرجع می‌باشد که توسط ماهواره در اختیار ما قرار می‌گیرد، و نیز با استفاده از آنالیز مؤلفه‌های جزر و مدی می‌توان سطح متوسط آب دریا را بدست آورد. رابطه زیر بیانگر نحوه محاسبه MSL با استفاده از مدل‌سازی مؤلفه‌های جزرومدی به روش آنالیز هماهنگ می‌باشد [۲۲]:

(۲)

$$h^{ell}(\lambda, \varphi, t) = MSL(\lambda, \varphi) + \sum_{k=1}^n [A_k(\lambda, \varphi) \cos \omega_k t + B_k(\lambda, \varphi) \sin \omega_k t]$$

که در آن h^{ell} ارتفاع سطح لحظه‌ای آب دریا از بیضوی مرجع، در نقطه‌ای با طول و عرض جغرافیایی (λ, φ) و در زمان t می‌باشد، و $A_k(\lambda, \varphi)$ و $B_k(\lambda, \varphi)$ ضرایب جزرومدی (کمیت‌های مجهول)، n تعداد مؤلفه‌های جزرومدی و ω_k سرعت زاویه‌ای مؤلفه k -ام جزرومد می‌باشد. بخش مستقل از زمان در آنالیز طیفی مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای، سطح متوسط دریا است که با حذف جزء وابسته به زمان یا دینامیک از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای قابل محاسبه است [۳۹].

۳- تبدیل سطح متوسط دریا به پتانسیل ثقل بر روی سطح هم‌پتانسیل مرجع

در مدل‌سازی میدان ثقل در دریا با استفاده از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای، اولین مرحله تعیین سطح متوسط دریا است. ژئوئید یک سطح هم‌پتانسیل از میدان ثقل زمین است که بهترین شکل ممکن سطح متوسط آب‌های آزاد را تقریب می‌زند. اختلاف بین سطح ژئوئید و سطح متوسط آب‌های آزاد، توپوگرافی سطح دریا (SST) نامیده می‌شود. این اختلاف ناشی از عوامل غیرجاذبی از جمله جریان‌های دریایی، تغییر غلظت و شوری آب، باد و اثرات ناشی از اجرام خارج از زمین می‌باشد. بنابراین ارتفاع ژئوئید در مناطق دریایی از طریق مشاهده و مدل‌سازی عوامل بوجود آورنده SST با به‌کارگیری رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد [۳۴ و ۴۰]:

$$N(\lambda, \varphi) = MSL(\lambda, \varphi) - SST(\lambda, \varphi) \quad (۳)$$

روش‌های متفاوتی برای تعیین توپوگرافی سطح دریا وجود دارد که یکی از آن‌ها استفاده از اطلاعات اقیانوس‌شناسی است. روش اقیانوسی بر اساس مشاهده و اندازه‌گیری کمیت‌هایی همچون سرعت و جهت بادهای سطحی، فشار، دما، شوری و چگالی در اعماق مختلف دریاها استوار است.

فرمول برونز به‌عنوان رابطه انتقال از فضای پتانسیل به فضای هندسی جهت تبدیل آنومالی پتانسیل (اختلاف پتانسیل ثقل واقعی از پتانسیل مرجع در یک نقطه) بر روی سطح بیضوی مرجع به ارتفاع ژئوئید مورد استفاده قرار می‌گیرد. رابطه زیر نشان‌دهنده این انتقال می‌باشد [۴۱]:

$$N = \frac{-dw(x_0)}{\nabla_N w(x_0)} + O(dw(x_0)^2) \quad (۴)$$

که در آن N ارتفاع ژئوئید در یک نقطه معین بوده و $dw(x_0)$ آنومالی پتانسیل بر روی سطح بیضوی مرجع می‌باشد. بنابراین طبق رابطه ۵ با استفاده از عکس فرمول برونز می‌توان شبکه منظمی از مقادیر ارتفاع ژئوئید که از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای به شیوه یاد شده به‌دست آمده‌اند را به شبکه منظمی از مقادیر آنومالی پتانسیل میدان ثقل زمین بر روی سطح هم‌پتانسیل مرجع تبدیل کرد.

$$w(x_0) = -\nabla_N w(x_0) \times N \quad (۵)$$

و سپس با اضافه کردن پتانسیل ژئوئید W_0 به رابطه ۵، می‌توان پتانسیل ثقل واقعی بر روی سطح هم‌پتانسیل رفرانس ($W(x_0)$) را از رابطه زیر بدست آورد:

$$T(x_0) = W_0 + dw(x_0) \quad (۶)$$

در [۳۳ و ۴۱] انواع میدان‌های رفرانس مختلفی که می‌توانند سطوح هم‌پتانسیل رفرانس از نوع کره یا بیضوی را تولید کنند آورده شده است. طبق تحقیقات به‌عمل آمده توسط اردلان و گرافارند [۴۱] درمورد دقت فرمول‌های برونز محاسبه شده، مشاهده می‌شود که فرمول‌های برونز محاسبه شده بر اساس میدان‌های مرجع

ارتفاعات ژئوئید نسبت به سطح هم‌پتانسیل مرجع در این میدان برابر با صفر است (شرط گوس) [۴۲]. بنابراین در این تحقیق از میدان مرجع سومگلیانا- پیزتی و فرمول برونز ارائه شده در این میدان استفاده می‌شود. عکس فرمول برونز بیضوی در میدان مرجع سومگلیانا- پیزتی به شکل رابطه ۷ می‌باشد.

$$N = -\frac{\sqrt{b^2 + e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{b^2 + e^2}} \left[-\frac{gm}{b^2 + e^2} + \omega^2 b \cos^2 \varphi + \frac{\frac{1}{6} \omega^2 a^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \left(\frac{6b}{e^2} \operatorname{arc cot} \left(\frac{b}{e} \right) - \frac{6b^2 + 4e^2}{e(b^2 + e^2)} \right)}{\left(3 \frac{b^2}{e^2} + 1 \right) \operatorname{arc cot} \left(\frac{b}{e} \right) - 3 \frac{b}{e}} \right]^{-1} dw(x_0) \quad (7)$$

i. حذف اثرات ناشی از مدل ژئوپتانسیل جهانی بر حسب ضرایب هارمونیک بیضوی تا درجه و مرتبه ۲۴۰ از روی $W(x_0)$ تولید شده بر روی بیضوی مرجع

ii. حذف اثر میدان گریز از مرکز از روی پتانسیل $W(x_0)$ تولید شده بر روی بیضوی مرجع به منظور تأمین شرط ۱، بسط به سری هارمونیک‌های بیضوی میدان مرجع تا درجه و مرتبه ۲۴۰ محاسبه شده و اثر آن از روی پتانسیل واقعی تولید شده بر روی بیضوی مرجع ($W(x_0)$) برداشته می‌شود. رابطه زیر این بسط را نشان می‌دهد [۴۳]:

$$W(\lambda, \varphi, u) = \frac{gm}{a} \sum_{n=0}^{240} \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m|} \left(i \frac{u}{\varepsilon} \right)}{Q_{n|m|} \left(i \frac{b}{\varepsilon} \right)} e_{nm}(\lambda, \varphi) \quad (8)$$

در این رابطه:

$$e_{nm}(\lambda, \varphi) = P_{n|m|}(\sin \varphi) \begin{cases} \cos m\lambda & \forall m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda & \forall m < 0 \end{cases}$$

$$u_{nm} e_{nm}(\lambda, \varphi) = P_{n|m|}(\sin \varphi) \begin{cases} C_{nm}^e \cos m\lambda & \forall m \geq 0 \\ S_{nm}^e \sin |m|\lambda & \forall m < 0 \end{cases}$$

مختلف تا جملات غیر درجه دو می‌توانند ارتفاع ژئوئید به دقت سانتیمتر را تضمین نمایند. این در حالیست که فرمول برونز مربوط به میدان سومگلیانا- پیزتی حتی با در نظر گرفتن فقط ترم خطی فرمول، دقتی در حد میلیمتر را برای محاسبه ارتفاع ژئوئید فراهم می‌کند. علاوه بر این فرمول برونز محاسبه شده بر اساس میدان مرجع سومگلیانا- پیزتی بگونه‌ای است که مقدار متوسط جهانی

۴- تعیین مقادیر پتانسیل جاذبه باقیمانده

هدف از انجام این تحقیق تعیین تانسور گرادیان جاذبه و مقادیر پتانسیل بر روی سطح دریا می‌باشد. با داشتن مقادیر پتانسیل جاذبه تفاضلی هارمونیک بر روی سطح بیضوی، می‌توان مقادیر پتانسیل جاذبه را در فضای خارجی بیضوی به دست آورد. این عمل در ژئودزی انتقال به سمت بالا^۱ نامیده می‌شود [۴۳]. برای بدست آوردن مقادیر تانسور گرادیان جاذبه و پتانسیل جاذبه بر روی سطح دریا مسأله مقدار مرزی دیریخله با مقادیر مرزی بر روی سطح بیضوی مرجع در میدان مورد نظر حل می‌شود. مسأله مقدار مرزی دیریخله جواب خاصی از معادله دیفرانسیل لاپلاس در سیستم مختصات بیضوی است. بنابراین مسأله مقدار مرزی دیریخله تنها برای کمیت‌های هارمونیک صادق می‌باشد.

به منظور استفاده از مقادیر پتانسیل تولید شده بر روی سطح بیضوی رفرانس به عنوان مقادیر مرزی در حل مسأله مقدار مرزی دیریخله، این مقادیر باید دو شرط را برقرار کنند: (۱) مقادیر مرزی مورد نظر بر روی بیضوی یک کمیت هارمونیک باشند و (۲) بدلیل انجام مدل‌سازی محلی، اثر میدان مرجع از روی مقادیر موجود بر روی سطح بیضوی برداشته شود. بنابراین طی مراحل زیر پتانسیل ثقل بر روی سطح بیضوی مرجع را به پتانسیل جاذبه تفاضلی هارمونیک تبدیل می‌کنیم:

^۱ Upward Continuation

همگرا می‌گردند [۱۱]. بنابراین زمینه تئوری بسط T به سری توابع غیرمتعامد وجود دارد.

$$T(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Psi_i(P) \quad (10)$$

در رابطه ۱۰، α_i ها ضرایب بسط (ضرایب مقیاس) هستند. کره بیرهامر σ_B کره‌ای به شعاع R بوده که به طور کامل در داخل توپوگرافی زمین قرار دارد. دسته‌ای از توابع Ψ_n ، توابع پایه شعاعی کروی هستند که دارای نمایشی به شکل زیرند:

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \psi_k \left(\frac{R}{|x|} \right)^{k+1} P_k \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) \quad (11)$$

که در آن ψ_k ضرایب لژاندر و P_k چندجمله‌ای‌های لژاندر تا درجه k ، $y \in \sigma_B^{int}$ (فضای داخلی کره بیرهامر) و $x \in \sigma_B^{ext}$ (فضای خارجی کره بیرهامر) می‌باشد. فاصله $d = R - |y|$ را عمق تابع پایه شعاعی کروی می‌نامند [۴۴]. شکل یا عمق هر تابع میزان فرورفتگی آن را در کره بیرهامر تعیین می‌کند، هرچه میزان این فرورفتگی بیشتر باشد توابع شکل نرم‌تری خواهند داشت و تأثیر آن‌ها برای طول موج‌های بلند است و برعکس، توابع با عمق کمتر دارای شکل تیزتری بوده و تنها نماینده طول موج‌های کوتاه از فضای مدل خواهند بود [۴۵].

علاوه بر پارامترهای مقیاس و شکل توابع پایه کروی، موقعیت قرارگرفتن این توابع در یک شبکه نقش مهمی برای مدل‌سازی بهینه میدان ثقل زمین دارد. بنابراین مجهولات اصلی در مدل‌سازی میدان ثقل زمین عبارتند از پارامتر مقیاس و شکل و موقعیت مسطحاتی توابع پایه که مراکز توابع پایه شعاعی نامیده می‌شوند. توابع پایه شعاعی کروی در حالی می‌توانند نمایش مناسبی از آنومالی پتانسیل سطح زمین ارائه دهند که پارامترهای معرف آن‌ها بدرستی انتخاب شوند.

در رابطه ۱۰ درجه بسط بی‌نهایت بوده و از نظر عددی محاسبه آن امکان‌پذیر نیست. بنابراین یکی از مشکلاتی که در مدل‌سازی با استفاده از رابطه ۱۰ با آن مواجه هستیم تعیین درجه حداکثر بسط و یا به عبارت دیگر تعیین تعداد توابع پایه شعاعی برای مدل‌سازی در منطقه است. به همین دلیل رابطه ۱۰ را باید به

در روابط فوق (λ, φ, u) مختصات ژاکوبی بیضوی، $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ثابت جهانی جاذبه^۲، M جرم زمین ($GM = 3986004.415 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$)، a نیم قطر اطول بیضوی مرجع، Q_{nm} توابع وابسته لژاندر نوع دوم، P_{nm} توابع وابسته لژاندر نوع اول و S_{nm}^e و C_{nm}^e ضرایب هارمونیک بیضوی مدل ژئوپتانسیل می‌باشند. برای جزئیات بیشتر به [۴۳] مراجعه شود. برای حذف اثر میدان گریز از مرکز نیز، پتانسیل گریز از مرکز در هر نقطه از رابطه زیر محاسبه شده و مقدار آن از روی مقادیر پتانسیل ثقل تولید شده بر روی سطح بیضوی مرجع برداشته می‌شود:

$$W_c(\lambda, \varphi) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \varphi \quad (9)$$

که $\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rad/sec}$ معرف سرعت زاویه‌ای دوران زمین و ε خروج از مرکزیت خطی بیضوی مرجع می‌باشد.

با حذف اثر میدان مرجع تا درجه و مرتبه ۲۴۰ به علاوه میدان گریز از مرکز از روی مقادیر پتانسیل ثقل واقعی بدست آمده بر روی سطح بیضوی مرجع، مقادیر پتانسیل باقیمانده $dw(x_0)$ بر روی این سطح به دست می‌آیند که این مقادیر برقرار کننده شرط لاپلاس در فضای خارجی بیضوی مرجع می‌باشد.

۵- مدل‌سازی پتانسیل توسط توابع پایه دو قطبی‌های شعاعی

توابع پایه شعاعی^۳، توابع پایه‌ای هستند که در فضای محلی بکار می‌روند. بدین معنی که بیشتر انرژی آن‌ها در مناطق محلی صحیح بوده و در آنجا قابل استفاده‌اند. بر اساس قضیه رونگه-کراروپ برای تابع هارمونیک در خارج سطح زمین و در بی‌نهایت منظم T ، دنباله توابع Ψ_n که در خارج σ_B (کره بیرهامر) هارمونیک بوده و در بی‌نهایت منظم هستند، وجود دارند که به تابع T در روی و خارج سطح کمکی \tilde{T} (با انحنای بی‌نهایت) به‌طور یکنواخت

^۲ Universal Gravitational Constant

^۳ Radial Base Function (RBF)

ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای استفاده کنیم. فرم تحلیلی این کرنل به صورت زیر است:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2} (2\chi_{n+1} + \chi_n) \quad (14)$$

$$\chi_n = \left(\left| y \right| \frac{\partial}{\partial |y|} \right)^n \frac{1}{|x - y|} \quad (15)$$

و ضرایب لژاندر این توابع به صورت زیر آمده است [۲۰]:

$$\psi_k = \frac{2k+1}{4\pi R^3} k^n |y|^k \quad (16)$$

دو پارامتر $|y|$ (عمق توابع پایه) و مرتبه n شکل این کرنل را تعیین می‌کند، نتیجه نمایش طیف این کرنل در ۳ عمق مختلف و با مرتبه یکسان در شکل ۱ نمایش داده شده است. همانطور که در شکل ملاحظه می‌گردد عمق‌های کمتر فرکانس‌های بالاتر و طیف‌های گسترده‌تر را پوشش می‌دهد [۲۰].

ازای یک درجه حداکثر بسط M قطع کرد. بنابراین رابطه ۱۰ به شکل زیر در مدل‌سازی میدان ثقل زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

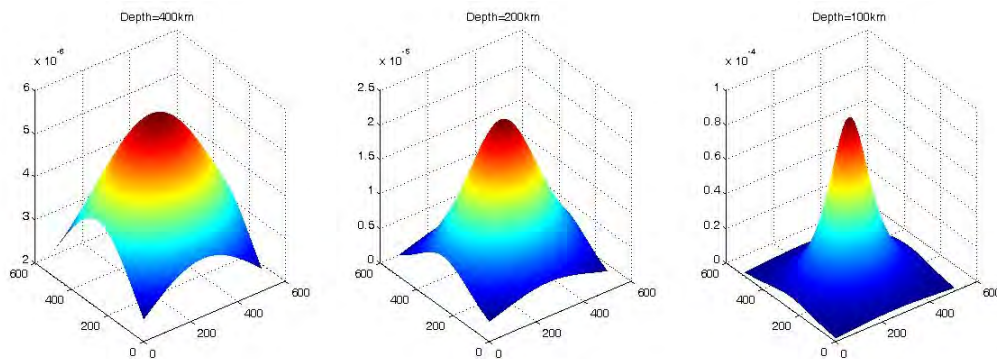
$$T(P) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \Psi_i(P) \quad (12)$$

ارتباط بین آنومالی پتانسیل T و سایر تابع‌های میدان ثقل نظیر آنومالی جاذبه و نوسان جاذبه را می‌توان به صورت زیر نوشت [۴۶]:

$$\Delta g = -\frac{2}{r} T - \frac{\partial T}{\partial r} \quad (13)$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}$$

که پس از مدل‌سازی T می‌توان آن‌ها را محاسبه کرد. رفتار توابع پایه در فضای طیفی با انتخاب کرنل و ضرایب لژاندر آن‌ها تعیین می‌گردد. کرنل‌های زیادی به عنوان RBFها در مدل‌سازی تابع‌های میدان ثقل زمین می‌تواند استفاده شود، در این تحقیق قصد داریم از کرنل ویولت پواسن برای مدل‌سازی میدان پتانسیل حاصل از



شکل ۱۰- نمایش عمق‌های مختلف کرنل

قبلی ارائه شده، تمامی این پارامترها به طور همزمان قابلیت جابجایی دارند و همین امر باعث می‌شود تا تعداد بسیار کمی از توابع پایه (حدود ۵٪ از تعداد مشاهدات) برای مدل‌سازی مورد استفاده قرار بگیرد. این روش به صورت تکراری همه پارامترهای مورد نیاز برای مدل‌سازی میدان ثقل را به‌طور اتوماتیک تعیین می‌کند، معیار توقف در این روش دستیابی به دقت مورد نیاز برای انحراف معیار نقاط کنترل است.

در مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه کروی باید پارامترهای مدل نظیر مراکز بهینه توابع، ضرایب مقیاس و شکل را تعیین کرد. برای تعیین مقادیر بهینه این پارامترها در این تحقیق از روش کمترین مربعات^۴ استفاده کرده‌ایم. در این روش بر خلاف کارهای

^۴ Least Square (LS)

۶- مدل‌سازی پتانسیل توسط اسپیلاین‌های هارمونیک

پس از حذف اثر پتانسیل ثقل رفرانس تا درجه و مرتبه ۲۴۰ و اثر پتانسیل گریز از مرکز، مقادیر پتانسیل باقیمانده بر روی سطح بیضوی مرجع (مرز مسأله مقدار مرزی) به‌دست می‌آیند. مقادیر گسسته بدست آمده برقرار کننده شرط لاپلاس در فضای خارجی بیضوی مرجع می‌باشند.

روش سنتی مدل‌سازی میدان ثقل، استفاده از بسط هارمونیک‌های کروی به‌عنوان توابع پایه می‌باشد. مهم-ترین ضعف روش سنتی این است که این هارمونیک‌ها دارای محمل جهانی می‌باشند و قادر به موضعی‌سازی در حوزه مکان نمی‌باشند. لذا برای مدل‌سازی محلی به فضاهایی نیاز داریم که توابع پایه آنها دارای خاصیت موضعی‌سازی ایده‌آل هم در فضای مکان و هم در فضای فرکانس باشند (البته طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، موضعی‌سازی ایده‌آل در دو حوزه مکان و فرکانس بطور همزمان امکان‌پذیر نیست و افزایش خاصیت موضعی‌سازی در حوزه مکان، موضعی‌سازی در حوزه فرکانس را کاهش می‌دهد و بالعکس [۴۷]). بنابراین به‌منظور موضعی‌سازی ایده‌آل در حوزه مکان، از اسپیلاین‌های هارمونیک جهت حل مسأله مقدار مرزی دیریکله استفاده می‌شود. رابطه ذیل درونیایی بوسیله اسپیلاین‌های هموارکننده را بیان می‌کند [۴۸]:

$$dw(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n K(x_i, y) \quad (17)$$

در این رابطه dw تابعی است که می‌خواهیم آنرا درونیایی کنیم، n تعداد داده‌های مرزی می‌باشد، α بردار ضرایب بوده که دارای n درایه متناظر با n داده مرزی می‌باشد و K کرنل بسط اسپیلاین خواهد بود. γ در رابطه فوق نشان‌دهنده فضای خارجی مرز مسأله مقدار مرزی دیریکله است که مقادیر پتانسیل باقیمانده در آن تولید می‌شود و x_i بیان‌کننده محل داده‌های مرزی بر روی سطح بیضوی مرجع می‌باشد. کرنل‌های متفاوتی جهت درونیایی به‌وسیله اسپیلاین‌های هموارکننده می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند. از جمله این کرنل‌ها می‌توان به

کرنل‌های نوع پواسن، کرنل نوع تکینه و کرنل نوع لگاریتمی اشاره کرد. برای جزئیات بیشتر در مورد این کرنل‌ها و روابط مربوط به آن‌ها به [۴۹] مراجعه شود. به‌دلیل قابلیت بالای کرنل پواسن در موضعی‌سازی مکانی [۴۷]، از این کرنل به فرم زیر استفاده شده است [۵۰]:

$$K_H(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{|x|^2 |y|^2 - R^4}{\left(|x|^2 |y|^2 - 2R^2(x \cdot y) + R^4 \right)^{3/2}} \quad (18)$$

در این رابطه R بیان‌کننده شعاع کره بیرهامر می‌باشد که مقدار بهینه این کمیت با استفاده از نسبت سیگنال به نویز [۴۷] در مدل‌سازی داده‌های مرزی بر روی سطح بیضوی مرجع، حاصل می‌شود. این نسبت برای انتخاب فیلتر بهینه در نویز برداری از یک تابع به‌کار می‌رود. بدین معنی که از بین چند فیلتر موجود برای حذف نویز تابع، فیلتری انتخاب می‌شود که نسبت سیگنال به نویز بالاتری داشته باشد. نسبت سیگنال به نویز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^N S_i^2}{\sum_{i=1}^N (S_i - \hat{S}_i)^2} \right) \quad (19)$$

در این رابطه S تابع اصلی و \hat{S} میزان برآورد شده برای آن است. در هر R خاص باید نسبت SNR محاسبه گردد. محل ماکزیمم شدن نسبت سیگنال به نویز به ازای مقادیر مختلف R ، محل شعاع کره بیرهامر بهینه خواهد بود. ضرایب منحصر بفرد α در رابطه ۱۷ از حل دستگاه معادله زیر به‌دست می‌آیند:

$$(A + \lambda I)\alpha = b \quad (20)$$

$$A = \left[\frac{1}{4\pi} \frac{|x_i|^2 |x_j|^2 - R^4}{\left(|x_i|^2 |x_j|^2 - 2R^2(x_i \cdot x_j) + R^4 \right)^{3/2}} \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

که در این رابطه b بردار مشاهدات بر روی سطح بیضوی مرجع بوده و λ پارامتر هموارسازی بهینه برای تبدیل اسپیلاین‌های درونیاب به اسپیلاین‌های

گرادیان متقارن بوده و trace آن نشان‌دهنده معادله پواسون^۶ می‌باشد:

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho \quad (22)$$

زمانی که چگالی در نقطه مورد نظر محاسبه برابر صفر باشد (در ارتفاع ماهواره GOCE این مقدار به $2.5 \times 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ می‌رسد)، این معادله به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود. بنابراین توسط معادله لاپلاس، که توضیح می‌دهد trace تانسور (مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس گرادیان) باید صفر باشد و همچنین بیان‌کننده متقارن بودن تابع می‌باشد، از ۹ مؤلفه تانسور گرادیان تنها ۵ مؤلفه مستقل خطی می‌باشند.

مؤلفه‌های تانسور دارای واحد $\frac{1}{s^2}$ می‌باشند اما به دلیل اینکه اندازه گرادیان‌ها بسیار کوچک است، واحد $\frac{1}{ns^2}$ عموماً به کار برده می‌شود. این واحد به عنوان Eotvos (Eo) شناخته می‌شود که بعد از قرن نوزدهم به افتخار فیزیکدان مجارستانی، Baron Roland Von Eotvos، نام‌گذاری شد و این واحد در سیستم SI به رسمیت شناخته نمی‌شود اما در جامعه ژئوفیزیک عموماً از این واحد استفاده می‌شود. به عنوان یک مفهوم فیزیکی از این واحد، Eo ۱ معادل گرادیان یک میدان جاذبه تولید شده توسط ۱۰ دانه ماسه در یک فاصله ۱ cm است [۵۱].

با اعمال اپراتور گرادیان جاذبه به مقادیر پتانسیل تولید شده بر روی سطح دریا، تانسور گرادیان جاذبه در تمامی نقاط مورد نظر تولید می‌شود. این اپراتورها به شکل زیر تعریف می‌شوند [۵۲]:

$$\begin{aligned} G_{\lambda\lambda} &= g_{\lambda\lambda}^{-1} D_{\lambda}^2 - \tan \varphi g_{\varphi\varphi}^{-1} D_{\varphi} + u g_{\varphi\varphi}^{-1} D_u \\ G_{\varphi\varphi} &= g_{\varphi\varphi}^{-1} D_{\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}^{-2} \varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi D_{\varphi} + u g_{\varphi\varphi}^{-1} g_{uu}^{-1} D_u \\ G_{uu} &= g_{\varphi\varphi}^{-2} \varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi D_{\varphi} - g_{\varphi\varphi}^{-2} u \varepsilon^2 \cos^2 \varphi D_u + g_{uu}^{-1} D_u^2 \\ G_{\lambda\varphi} &= g_{\lambda\lambda}^{-\frac{1}{2}} g_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^2 \tan \varphi D_{\lambda} + g_{\lambda\lambda}^{-\frac{1}{2}} g_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} D_{\varphi} D_{\lambda} \\ G_{\lambda u} &= -u \cos \varphi g_{\lambda\lambda}^{-1} g_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} D_{\lambda} + g_{\lambda\lambda}^{-\frac{1}{2}} g_{uu}^{-\frac{1}{2}} D_{\lambda} D_u \\ G_{\varphi u} &= -u g_{\lambda\lambda}^{-\frac{3}{2}} g_{uu}^{-\frac{1}{2}} D_{\varphi} + g_{\varphi\varphi}^{-\frac{3}{2}} g_{uu}^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi D_u + g_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} g_{uu}^{-\frac{1}{2}} D_{\varphi} D_u \end{aligned} \quad (23)$$

هموارکننده است (عملاً مشاهدات آلوده به خطا هستند و در این حالت درونیایی بایستی با هموارسازی جایگزین شود) [۴۹].

بنابراین با استفاده از اسپیلاین‌های هارمونیک، مقادیر پتانسیل جاذبه باقیمانده بر روی سطح دریا تولید می‌شوند. پس از اضافه کردن اثر حذف شده میدان مرجع تا درجه و مرتبه ۲۴۰ به مقادیر پتانسیل باقیمانده به دست آمده در این مرحله، مقادیر پتانسیل جاذبه واقعی در نقاط مورد نظر بر روی سطح دریا حاصل می‌شوند.

۷- تعیین تانسور گرادیان جاذبه در سطح دریا

گرادیومتری عبارت است از اندازه‌گیری مشتقات مرتبه دوم پتانسیل جاذبه V. این عمل به عنوان گرادیومتری شناخته می‌شود، چرا که گرادیان‌های مؤلفه‌های بردار شتاب ثقل اندازه‌گیری می‌شوند، گرادیان‌های جاذبه به شکل یک تانسور مرتبه دوم با ۹ مؤلفه که تانسور گرادیان جاذبه^۵ نامیده می‌شود (GGT). این تانسور (به افتخار پایه‌گذار این تئوری، Antonio Marussi) در ژئودزی با M نمایش داده می‌شود. پتانسیل جاذبه برای یک نقطه در یک میدان جاذبه به صورت میزان کاری تعریف می‌شود که لازم است بر روی واحد جرم برای آوردن جسم مورد نظر از فاصله بینهایت به نقطه مورد نظر در میدان توسط نیروی گرانشی انجام شود. این کمیت یک اسکالر است، یک تابع تانسور مرتبه صفر.

تانسور گرادیان جاذبه، M، تانسور مرتبه دوم پتانسیل جاذبه است و برای آن داریم:

$$M(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial xy} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

این تانسور در یک سیستم مختصات محلی دلخواه کارترین در نقطه دلخواه P به شکل فوق خواهد بود.

^۶ Poisson's equation

^۵ Gravitational Gradient Tensor

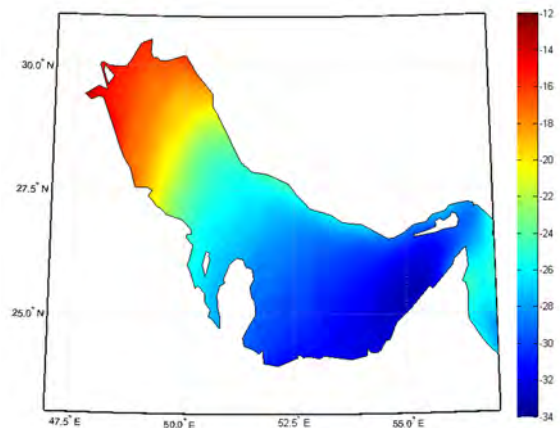
۸- آزمون عددی: منطقه خلیج فارس

برای آزمون عددی روش ارائه شده، در منطقه خلیج فارس، از داده‌های مربوط به MSL برگرفته از مدل ارتفاع-سنجی

ماهواره‌ای CSRMSS95 استفاده شد. مدل CSRMSS95 از ترکیب ۲ سال اطلاعات ماهواره TOPEX/POSEIDON، ۲ سال اطلاعات ماهواره Geosat، ۱,۷ سال اطلاعات ۳۵ روزه ماهواره ERS1 و دو دوره از اطلاعات ۱۶۸ روزه ماهواره

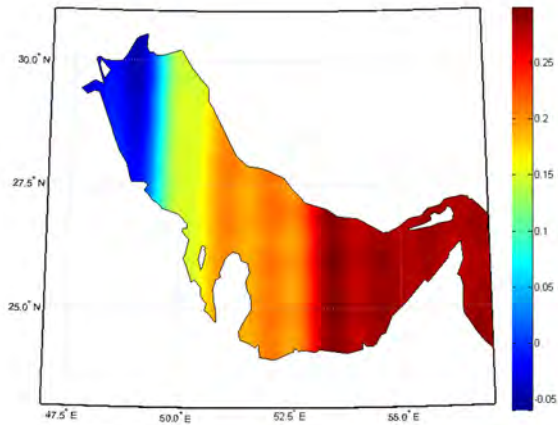
ERS1 بدست آمده است. شکل ۲ نحوه تغییرات سطح متوسط دریا در خلیج فارس را با توجه به داده‌های مدل ذکر شده نمایش می‌دهد.

دقت ژئوئید تعیین شده با استفاده از این اطلاعات در حد سانتیمتر می‌باشد که در مناطق ساحلی این دقت به دسیمتر کاهش پیدا می‌کند. این چنین دقتی در فضای هندسی، دقتی برابر با میکروگال در فضای جاذبه را نتیجه می‌دهد.



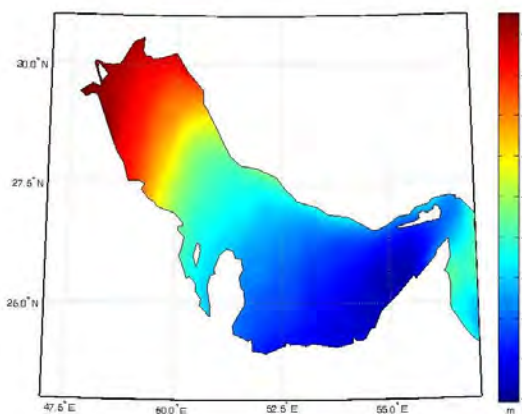
شکل ۲- تغییرات سطح متوسط دریا (MSL) در منطقه خلیج فارس براساس مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای (m)

در این تحقیق برای محاسبه توپوگرافی سطح دریا از مدل POCM-4B استفاده شد. این مدل از راه مشاهدات روزانه میدان استرس باد و مشاهدات ماهانه جریانات گرمایی سطح متوسط آب دریا از سال ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۴ به دست آمده است [۵۳] و با بسط هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بیان می‌شود [۵۴]. تغییرات توپوگرافی سطح دریا در منطقه مورد نظر با استفاده از داده‌های این مدل در شکل ۳ مشاهده می‌شود.

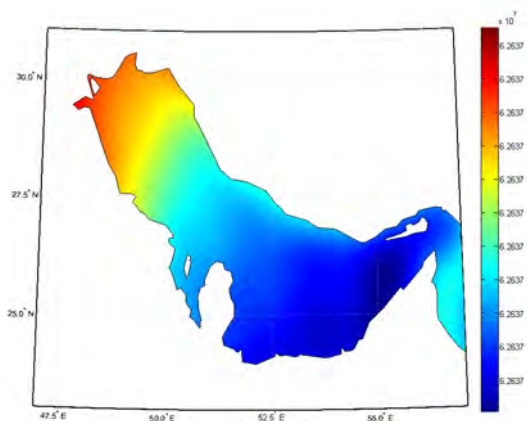


شکل ۳- تغییرات توپوگرافی سطح دریا در منطقه خلیج فارس (m)

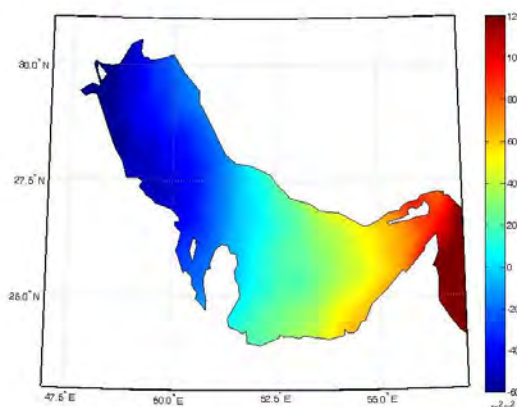
تعداد ۲۳۰۸۴ نقطه با روش ارائه شده در این تحقیق، در دسترس می‌باشد. شکل ۴ تغییرات ارتفاع ژئوئید نسبت به بیضوی مرجع در میدان سومگلیانا - پیزتی (بیضوی WGD2000) را در محدوده مورد نظر با استفاده از داده‌های ارتفاعسنجی ماهواره‌ای نمایش می‌دهد. ژئوئید محاسبه شده براساس داده‌های ارتفاعسنجی ماهواره‌ای با به کارگیری عکس فرمول برونز بیضوی به مقادیر آنومالی پتانسیل بر روی سطح بیضوی مرجع تبدیل می‌شود. تغییرات آنومالی پتانسیل به دست آمده در شکل ۵ نمایش داده شده است.



شکل ۴- نحوه تغییرات ژئوئید منطقه خلیج فارس (m)



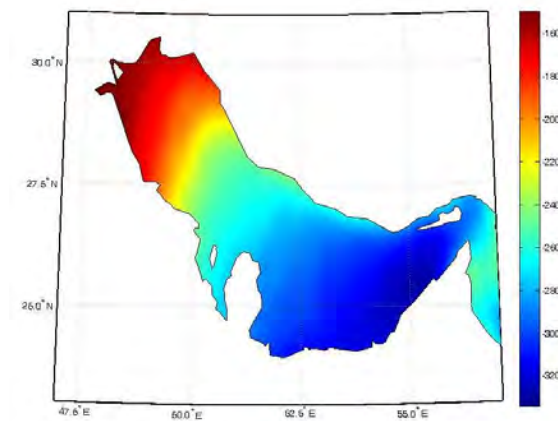
شکل ۷- اثر میدان مرجع به صورت بسط به سری هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۲۴۰ به علاوه میدان گریز از مرکز (m^2/s^2)



شکل ۸- پتانسیل باقیمانده منطقه خلیج فارس (m^2/s^2)

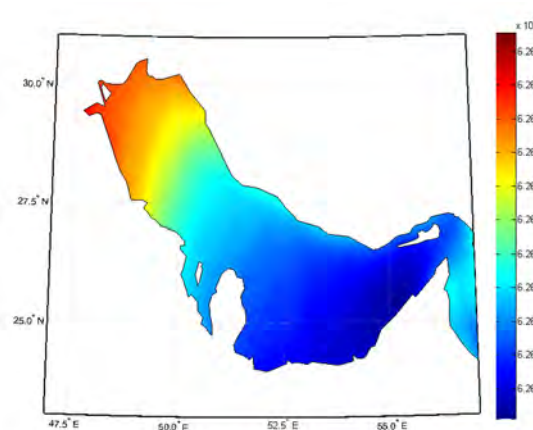
در مدل‌سازی بر مبنای توابع پایه شعاعی کروی تعداد ۱۲۱ کرنل، (۰/۵٪ تعداد مشاهدات) در یک گرید منظم به عنوان مراکز اولیه توابع پایه کروی، در نظر گرفته شد و برای توقف تکرار در این الگوریتم، دستیابی به دقت $0.07m^2/s^2$ برای انحراف معیار نقاط کنترل مورد هدف قرار گرفت. این الگوریتم برای ویولت پواسن مرتبه ۱ اجرا شد و در نهایت پس از ۳۱ تکرار نتیجه مطلوب برای نقاط کنترل حاصل گردید و پتانسیل جاذبه باقیمانده در این منطقه مدل‌سازی شد.

در مدل‌سازی بر مبنای اسپیلاین‌های هارمونیک، مقادیر پتانسیل باقیمانده به دست آمده پس از حذف اثر میدان مرجع و میدان گریز از مرکز، به عنوان مقادیر مرزی وارد مسأله مقدار مرزی دیریخله می‌شوند. مرز برای حل مسأله مقدار مرزی، سطح منظم بیضوی مرجع می‌باشد. با به‌کارگیری کرنل پواسن در حل مسأله مقدار مرزی دیریخله در فضای خارجی بیضوی، مقدار بهینه برای شعاع



شکل ۵- آنومالی پتانسیل منطقه خلیج فارس (m^2/s^2)

به‌منظور به‌دست آوردن مقادیر پتانسیل واقعی بر روی سطح بیضوی مرجع در میدان سومگلیانا-پیزتی، پتانسیل ژئوئید $W_0 = 62636855.918 m^2s^{-2}$ به آنومالی پتانسیل به‌دست آمده در مرحله قبل اضافه می‌شود. شکل ۶ نحوه تغییرات مقادیر پتانسیل ثقل واقعی در منطقه خلیج فارس را نمایش می‌دهد.



شکل ۶- تغییرات پتانسیل ثقل واقعی بر روی سطح بیضوی مرجع (m^2/s^2)

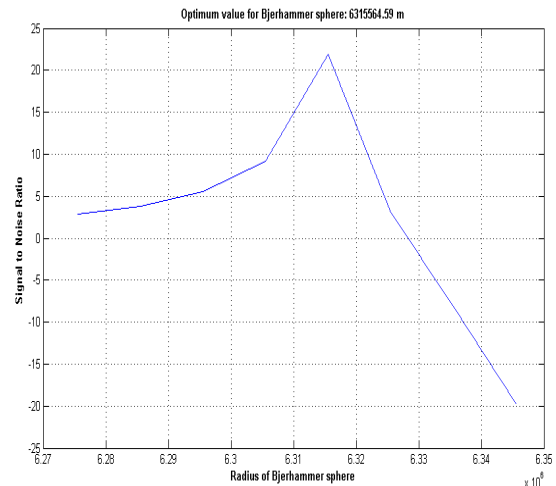
به‌منظور مدل‌سازی محلی، مقادیر پتانسیل گریز از مرکز و پتانسیل جاذبه به‌صورت بسط به سری هارمونیک-های بیضوی تا درجه و مرتبه ۲۴۰ بر اساس مدل EGM2008 محاسبه شده و از مقادیر پتانسیل ثقل واقعی حذف گردید. شکل ۷ اثر میدان مرجع تا درجه و مرتبه ۲۴۰ به علاوه اثر میدان گریز از مرکز را نشان می‌دهد. پتانسیل باقیمانده حاصل از حذف مقادیر ذکر شده از روی مقدار پتانسیل واقعی، برای مدل‌سازی توسط توابع پایه کروی (منحصرأ کرنل دوقطبی شعاعی) و اسپیلاین‌های هارمونیک در شکل ۸ نمایش داده شده است.

در نهایت با استفاده از مقادیر بهینه حاصل شده برای کمیت‌های شعاع کره بیرهامر و پارامتر پایداری، مقادیر پتانسیل باقیمانده توسط توابع اسپیلاین هارمونیک مدل-سازی شد.

در مرحله بعد به منظور رسیدن به پتانسیل جاذبه واقعی، پس از مدل‌سازی مقادیر پتانسیل باقیمانده با استفاده از اسپیلاین‌های هارمونیک و توابع پایه شعاعی، اثر میدان مرجع به صورت بسط به سری هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۲۴۰ در منطقه مورد نظر، به مقادیر پتانسیل باقیمانده به دست آمده اضافه می‌شود. ضرایب هارمونیک کروی مدل ذکر شده با استفاده از تبدیل دقیق به ضرایب هارمونیک بیضوی تبدیل می‌شوند [۵۶].

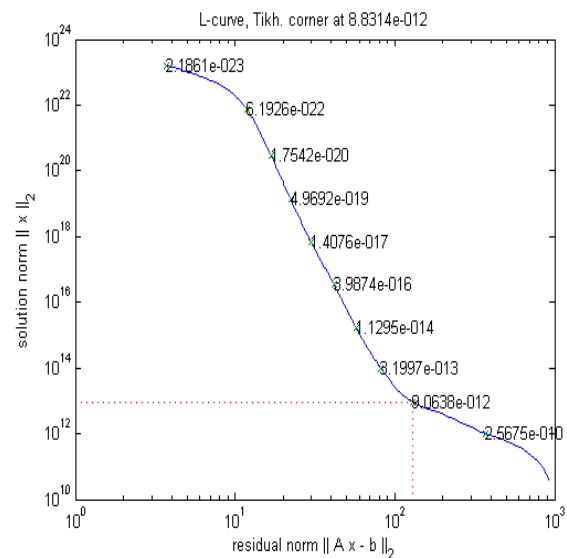
نهایتاً با اعمال اپراتور گرادیان جاذبه معرفی شده در بخش ۷ به مقادیر پتانسیل بدست آمده، ۹ مؤلفه تانسور گرادیان جاذبه در نقاط مورد نظر بدست می‌آیند. همانند پتانسیل واقعی، تانسور گرادیان جاذبه نیز به دو قسمت تقسیم می‌گردد: (۱) تانسور گرادیان جاذبه باقیمانده (۲) تانسور گرادیان جاذبه مرجع. تانسور باقیمانده ناشی از پتانسیل باقیمانده بوده و تانسور گرادیان جاذبه مرجع از پتانسیل مرجع حاصل می‌شود. شکل ۱۱ تغییرات ۹ مؤلفه مرجع تانسور گرادیان جاذبه در سطح دریا در منطقه خلیج فارس را نشان می‌دهد.

کره بیرهامر با استفاده از نسبت سیگنال به نویز برابر 6315564.59 متر به دست آمد. در شکل ۹ نحوه تغییرات شعاع کره بیرهامر در مقابل نسبت سیگنال به نویز نمایش داده شده است.

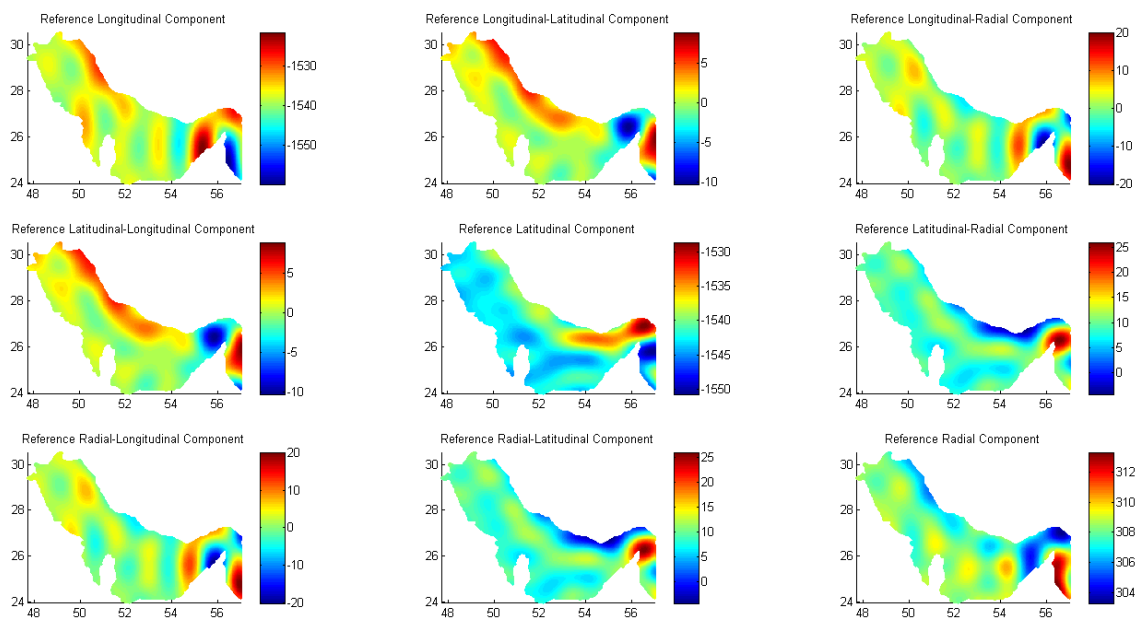


شکل ۹- نحوه تغییرات شعاع کره بیرهامر در مقابل نسبت سیگنال به نویز

به منظور تعیین پارامتر پایداری بهینه در حل دستگاه معادلات ذکر شده در رابطه ۲۰، از روش منحنی L (L-Curve) استفاده شده است. شکل ۱۰ تغییرات پارامتر پایداری بر اساس روش منحنی L برای تعیین پارامتر بهینه را نشان می‌دهد. مقدار بهینه پارامتر پایداری برابر 8.8314×10^{-12} انتخاب شده است.



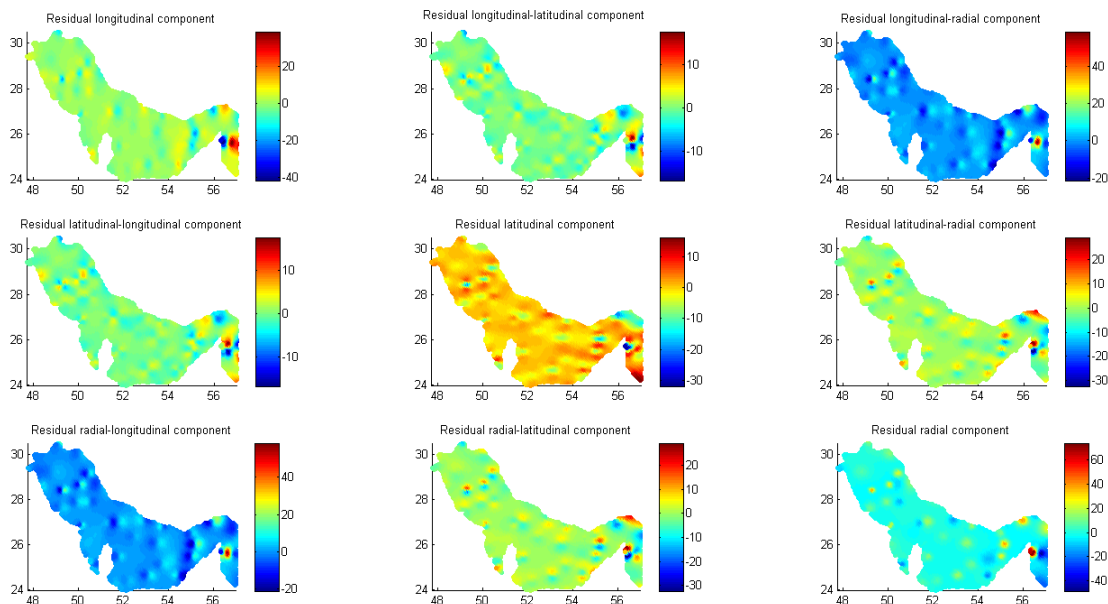
شکل ۱۰- منحنی L و پارامتر پایداری بهینه



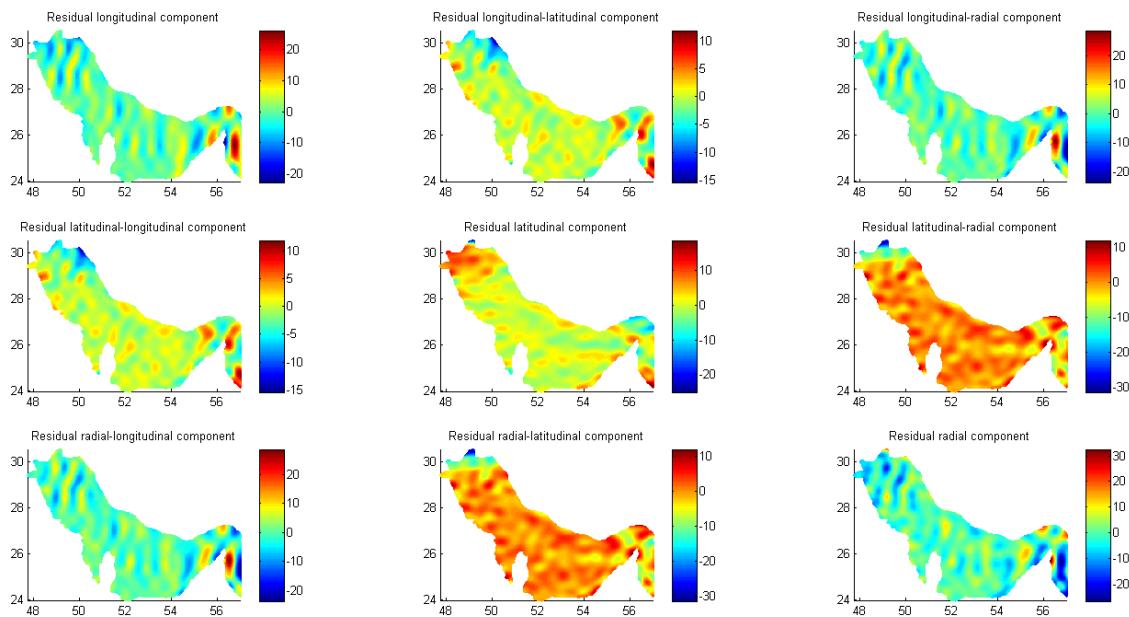
شکل ۱۱- تغییرات مؤلفه‌های مرجع تانسور گرادیان جاذبه بر روی سطح دریا در خلیج فارس (E)

درحالی‌که شکل ۱۳ مؤلفه‌های باقیمانده تانسور گرادیان جاذبه حاصل از مدل‌سازی پتانسیل باقیمانده به‌وسیله توابع اسپیلاین هارمونیک را نشان می‌دهد.

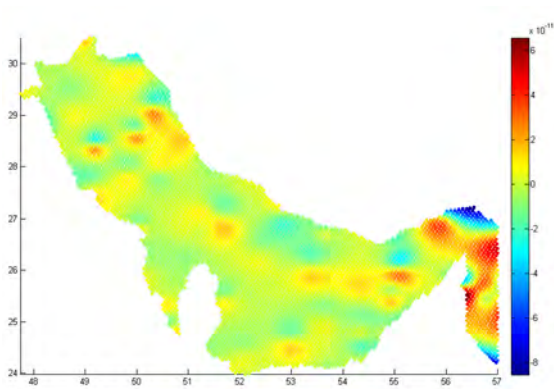
اشکال ۱۲ و ۱۳ نشان‌دهنده تغییرات مؤلفه‌های باقیمانده تانسور گرادیان جاذبه بر روی سطح دریا در منطقه مورد نظر می‌باشد. شکل ۱۲ نتایج حاصل از مدل‌سازی پتانسیل باقیمانده به‌وسیله توابع پایه شعاعی است،



شکل ۱۲- تغییرات مؤلفه‌های باقیمانده تانسور گرادیان جاذبه حاصل از مدل‌سازی پتانسیل به‌وسیله توابع پایه شعاعی در محدوده خلیج فارس (E)

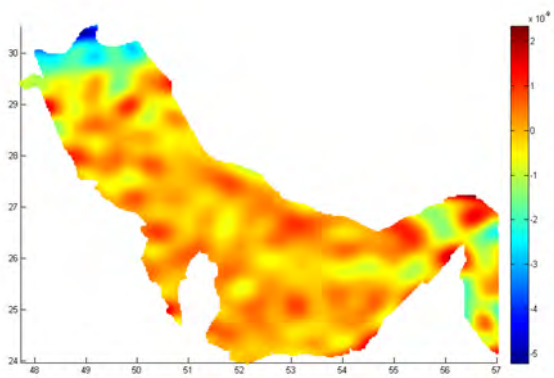


شکل ۱۳- تغییرات مؤلفه‌های باقیمانده تانسور گرادیان جاذبه حاصل از مدل‌سازی پتانسیل به‌وسیله توابع اسپیلاین هارمونیک در محدوده خلیج فارس (E)



شکل ۱۴- تغییرات trace تانسور گرادیان جاذبه حاصل از مدل‌سازی با استفاده از توابع پایه شعاعی ($1/s^2$)

همانگونه که در بخش ۷ اشاره شد، مجموع مؤلفه‌های قطر اصلی تانسور گرادیان جاذبه، برقرار کننده معادله پواسن خواهد بود. با محاسبه تانسور گرادیان جاذبه در منطقه خلیج فارس با استفاده از مدل‌سازی پتانسیل به دو روش استفاده از توابع پایه شعاعی و اسپیلاین‌های هارمونیک، مجموع عناصر قطر اصلی تانسور در دو روش مورد بررسی قرار گرفت. شکل ۱۴ نشان‌دهنده trace تانسور گرادیان جاذبه حاصل از مدل‌سازی به روش توابع پایه شعاعی می‌باشد. این کمیت برای مدل‌سازی با استفاده از توابع اسپیلاین هارمونیک در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵- تغییرات trace تانسور گرادیان جاذبه حاصل از مدل‌سازی به‌وسیله توابع اسپیلاین هارمونیک ($1/s^2$)

ماکزیمم، مینیمم، متوسط و انحراف معیار trace برای هر دو روش مدل سازی نشان داده شده است.

	Max (1/s ²)	Min (1/s ²)	Mean (1/s ²)	Std (1/s ²)
trace	2.34e-9	-5.21e-9	-1.61e-10	6.82e-10

جدول ۲- نتایج حاصل از مدل سازی به وسیله توابع اسپیلاین هارمونیک

- استفاده از داده های ارتفاع سنجی جهت محاسبه ارتفاعات ژئوئید در مناطق دریایی با دقت بالا
 - به کارگیری عکس فرمول برونز بیضوی جهت تولید آنومالی پتانسیل بر روی سطح بیضوی مرجع
 - مدل سازی محلی میدان ثقل با استفاده از داده های آنومالی پتانسیل
 - استفاده از ۰.۵٪ تعداد مشاهدات به عنوان مراکز اولیه توابع پایه شعاعی
 - تعیین پارامترهای مجهول توابع پایه شعاعی با استفاده از روش کمترین مربعات
 - مقایسه میان دوقطبی های شعاعی جهت مدل سازی آنومالی پتانسیل
- تعداد ۲۳۰۸۴ نقطه حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای به عنوان مشاهدات میدان ثقل در نظر گرفته شد و توسط کرنل دوقطبی شعاعی مرتبه اول و استفاده از روش کمترین مربعات مدل سازی شد.

نتایج trace حاصل از دو روش مدل سازی از لحاظ آماری در جداول ۱ و ۲ آورده شده است. در این جداول مقادیر

	Max (1/s ²)	Min (1/s ²)	Mean (1/s ²)	Std (1/s ²)
trace	6.58e-11	-8.55e-11	1.94e-13	1.1e-11

جدول ۱- نتایج حاصل از مدل سازی به وسیله توابع پایه شعاعی

۹- بحث و نتیجه گیری

با ظهور ارتفاع سنجی ماهواره ای و به دنبال پرتاب اولین ماهواره ای ارتفاع سنجی در سال ۱۹۷۳، مسأله تعیین ژئوئید در دریا با دقت بالا براساس مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای، که اولین مرحله در مدل سازی میدان ثقل زمین در دریا به شمار می رود، مورد توجه زیادی در بین محققان در جامعه ژئودتیک و ژئوفیزیک قرار گرفته است. در این تحقیق از دو روش مدل سازی بر مبنای توابع پایه شعاعی و توابع اسپیلاین هارمونیک برای مدل سازی محلی میدان ثقل زمین استفاده شد. با توجه به نتایج به دست آمده برای تانسور گرادیان جاذبه در منطقه خلیج فارس، این نتیجه حاصل می شود که مدل سازی میدان ثقل زمین بر مبنای توابع پایه شعاعی نتایج بهتری را نسبت به مدل سازی بر مبنای توابع اسپیلاین هارمونیک به همراه خواهد داشت. از جمله نکات قابل توجه در این مقاله در استفاده از توابع پایه شعاعی برای مدل سازی میدان ثقل زمین می توان به موارد زیر اشاره کرد:

مراجع

- [1] Bjerhammar, A., 1976, A Dirac approach to physical geodesy. Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV) 101:41-44
- [2] Sünkel, H., 1981, Point mass models and the anomalous gravitational field. Report 328, Department of Geodetic Sciences, Ohio State University, Columbus
- [3] Vermeer, M., 1982, The use of mass point models for describing the Finnish gravity field. Proc. 9th meeting of the Nordic Geodetic Commission, Gävle, Sweden.
- [4] Vermeer, M., 1983, A new SEASAT altimetric geoid for the Baltic. Finnish Geodetic Institute, Report 83:4, Helsinki
- [5] Vermeer, M., 1984, Geoid studies on Finland and the Baltic. Finnish Geodetic Institute, Report 84:3, Helsinki
- [6] Vermeer, M., 1995, Mass point geo potential modeling using fast spectral techniques; historical overview, toolbox description, numerical experiment. Manuscr Geod 20:362-378

- [7] Freeden, W., Reuter, R., 1983, Spherical harmonic splines: theoretical and computational aspects. *Meth u Verfd Math Phys* 27:79–103
- [8] Tscherning, CC., 1986, Functional methods for gravity field approximation. In: Sünkel H (ed) *Mathematical and numerical techniques in physical geodesy*, Lecture Notes in earth sciences, vol 7. Springer, Berlin, pp 3–47
- [9] Blaha, G, Blessette RP, Hadgigeorge, G 1986, Global point-mass adjustment of the oceanic geoid based on satellite altimetry. *Mar Geodesy* 10:97–129
- [10] Freeden, W., Schreiner, M., Franke, R., 1997 A Survey on spherical spline approximation. *Surv Math Ind* 7:29– 85
- [11] Marchenko, A.N., 1998, Parameterization of the Earth's Gravity field, point and line singularities. *Leviv Astronomical and Geodetic Society*, ISBN 5-7763-4604-5
- [12] Freeden, W., Gervens, T., Schreiner, M., 1998, *Constructive approximation on the sphere (with applications to geo mathematics)*. Oxford Science Publication, Oxford University Press, New York
- [13] Marchenko, A.N., Barthelmes, F., Meyer, U., Schwintzer, P., 2001 *Regional Geoid Determination: An Application to Airplane Gravity Data in the Skagerrak*. Scientific Technical Report STR01/07, GFZ.
- [14] Holschneider, M., Chambodut, A., Manda, M., 2003, From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames. *Phys Earth Planet Inter* 135:107–124
- [15] Eicker, A., Mayer-Gürr, T., Ilk KH, 2004, Global gravity field solutions from GRACE SST data and regional refinements by GOCE SGG observations. In: *Proceedings IAG international symposium gravity, geoid and space missions (GGSM2004)*, Porto, Portugal
- [16] Schmidt, M., Fabert, O., Shum, CK., Han, SC., 2004, Gravity field determination using multiresoluti on techniques. *Proceedings 2nd internationalGOCE User workshop*, ESA-ESRIN, Frascati
- [17] Schmidt, M., Kusche, J., Loon, J., Shum, CK., Han, SC., Fabert, O., 2005, Multi-resolution representation of regional gravity data. In: *Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (eds) Gravity, geoid and space missions.*, Springer, Berlin, pp 167–172
- [18] Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kusche, J., Sanchez, L., Han, SC., 2007, Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *J Geod* 81:17–38
- [19] Chambodut, A., Panet, I., Manda, M., Diament, M., Holschneider, M., Jamet, O. 2005, Wavelet frames: an alternative to spherical harmonic representation of potential fields. *Geophysics J Int* 163:875–899
- [20] Wittwer, T, 2007, *Regional gravity field modelling with radial basis functions*, PhD thesis, Publications on Geodesy 72 ISBN: 978 90 6132 315 0 ISSN 0165 1706
- [۲۱] صفری، عبدالرضا، مسئله مقدار مرزی بیضوی تعیین ژئوئید با استفاده از مشاهدات ثقلی زمینی، نجومی و ارتفاعسنجی ماهواره- ای، ۱۳۸۳، دانشگاه تهران، گروه مهندسی نقشه‌برداری
- [۲۲] عسگری، ع. ابراهیم زاده اردستانی، و. آزموده اردلان، ع. تعیین بی هنجاری هوای آزاد در سطح دریای عمان براساس مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای. *مجله فیزیک زمین و فضا*، دوره ۳۷، شماره ۴، ۱۳۹۰، صفحه ۱-۱۶
- [23] Dehlinger, P., Couch, R. W. and Gemperle, M., 1966, Surface-ship gravity measurements corrected for vertical acceleration, *J. Geophys. Res.*, 71:6017- 6023 (correction in *J. Geophys. Res.*, 72:4180).
- [24] Talwani, M., 1970, Gravity. In: A.E. Maxwell (Editor), *The Sea*, Vol. 4, part 1. Wiley- Interscience, New York, N.Y., 270-297.
- [25] Harrison, J. C., 1960, The measurement of gravity at sea, In: S.K. Runcorn (Editor), *Methods and Techniques of Modern Geophysics*. Wiley- Interscience, New York, N. P., pp. 211-229.
- [26] Anzenhofer, M., Shum, C. K., and Rentsh, M., 1999, *Coastal altimetry and applications*, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science of the Ohio State University, Columbus Ohio, Report No. 464.
- [27] Sandwell, D. T. and Smith, W. H. F., 1997, Marine Gravity Anomaly from Geosat and ERS-1 Satellite Altimetry, *J. Geophys. Res.* 102, 10039- 10054.

- [28] Andersen, O. B. and Knudsen, P., 1998, Global marine gravity field from the ERS-1 and geosat geodetic mission altimetry, *Journal of Geophysical Research C: Oceans*, 103(3334), 8129-8137.
- [29] Hwang, C., Hsu, H. and Jang, R., 2002, Global mean sea surface and marine gravity anomaly from multi-satellite altimetry: Applications of deflection-geoid and inverse vening meinesz formulae, *Journal of Geodesy*, 76(8), 407-418.
- [30] Tzivos, I. N. and Forsberg, R., 1998, Combined satellite altimetry and shipborne gravimetry data processing, *Mar Geod* 21, 299-317.
- [31] Hwang, C., Kao, E. and Parsons, B., 1998, Global derivation of marine gravity anomalies from seasat, geosat, ERS-1 and TOPEX/Poseidon altimeter data, *Geophysical Journal International*, 134(2), 449-459.
- [32] Hwang, C. and Parsons, B., 1996, An optimal procedure for deriving marine gravity from multisatellite altimetry, *Geophysical Journal International*, 125(3), 705-718.
- [۳۳] صفری، ع. آرموده اردلان، ع. ۱۳۸۲. تعیین ژئوئید محلی با استفاده از داده‌های مرزی حاصل از ثقل سنجی و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، مطالعه خاص: ژئوئید دقیق ایران. نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۸، شماره ۶، اسفند ماه ۱۳۸۳، از صفحه ۸۴۱ تا ۸۵۲
- [34] Safari, A., Ardalan A. A., and Grafarend E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran, *J.Geodyn.*, 39, 545-568.
- [35] Andersen, O. B. and Knudsen, P., 2000, The role of satellite altimetry in gravity field modelling in coastal areas, *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 25(1), 17-24.
- [۳۶] صفری، ع. حاتم، ی. شاه‌حیدری، م. تعیین ژئوئید در جزایر با استفاده از حل مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای با مرزهای ثابت، بررسی خاص: تعیین ژئوئید در جزیره قشم. مجله فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۴، شماره ۴، ۱۳۸۷، صفحه ۸۱-۱۰۴
- [37] Sandwell, D.T and Smith, W.H.F, 2009, Global marine gravity from retracked Geosat and ERS-1 altimetry: Ridge segmentation versus spreading rate. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, VOL. 114, B01411, doi:10.1029/2008JB006008, 2009
- [38] Benada, J. R., 1997, PO. DAAC Merged GDR (TOPEX-POSEIDON) Generation B User's Handbook. Version 2.0, Jet Propulsion Laboratory (JPL) D-11007, November 1996.
- [۳۹] آرموده اردلان، ع. هاشمی فراهانی، ح. آنالیز جزر و مدی جهانی و تعیین مدلی جدید برای سطح متوسط جهانی دریا بر اساس توابع پایه متعامد با استفاده از ۱۱ سال مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای توپکس-پوزایدون. نشریه دانشکده فنی، جلد ۴۰، شماره ۸، اسفندماه ۱۳۸۵، از صفحه ۱۰۱۹ تا ۱۰۳۱
- [۴۰] آرموده اردلان، ع. عرب صاحبی، ر. تعیین میدان پتانسیل ثقل محلی در دریا با استفاده از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، مطالعه خاص: تعیین میدان ثقل در جزیره قشم. نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۹، شماره ۵، دی ماه ۱۳۸۴، از صفحه ۶۳۳ تا ۶۴۴
- [41] Ardalan A. A., and Grafarend E. W., 2001, Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies, *J. Geodesy*, 75, 544-552.
- [42] Pizzetti, P. 1984, Geodesia-Sulla es pressione della gravita alla superficie del geoide supposto ellissoidico. *Atti Reale Accademia dei Lincei* 3. PP. 166-172
- [43] Ardalan, A. A., High-resolution geoid computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. Ph.D. thesis, 1999, Stuttgart University.
- [44] Tenzer, R., Klees, R. 2008, The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling. *Stud. Geophys. Geod.* 52:287-304.

- [45] Antoni, M., Keller, W., Weigelt, M., 2009, Recovery of residual GRACE-observations by radial base functions. VII. Hotine-Marussi Symposium on Theoretical Geodesy, Rome (Italy)
- [46] Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I., Wittwer, T. 2008, A data driven approach to local gravity field modeling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy* 82: 457-471.
- [47] یوسفزاده، فرزاد، مدل‌سازی محلی میدان ثقل زمین با استفاده از اسپلاین‌های هارمونیک. ۱۳۸۸، دانشگاه تهران، گروه مهندسی نقشه‌برداری.
- [48] Freeden, W, A Spline Interpolation method for solving boundary value problems of potential theory from discretely given data, *Numer. Meth. Part. Diff. Equations*, 3, 375-398. 1987.
- [49] صفری، عبدالرضا، معرفی یک روش نوین برای محاسبه سامانه‌های ارتفاعی براساس حل مسئله مقدار مرزی ژئودتیک با مرزهای ثابت. *مجله فیزیک زمین و فضا*، دوره ۳۶، شماره ۱، ۱۳۸۹، صفحه ۷۱-۸۹
- [50] Gutting, M., Multiscale Gravitational Field Modeling from Oblique Derivatives. Diploma Thesis, University of Kaiserslautern, Germany, Geomathematics Group. 2002.
- [51] Marshall M. Rogers, An Investigation into the Feasibility of using a Modern Gravity Gradient Instrument for Passive Aircraft Navigation and Terrain Avoidance. THESIS, DEPARTMENT OF THE AIR FORCE AIR UNIVERSITY, AIR FORCE INSTITUTE OF TECHNOLOGY. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 2009.
- [52] Bolling, K., and E.W. Grafarend, Ellipsoidal Spectral Properties of the earth's Gravitational Potential and its first and second Derivatives. *Journal of Geodesy* 79: 300-330, 2005.
- [53] Stammer, D., Tokmakian, R., Semtner, A., and Wunsch, C., 1996, how well does a $1/4^\circ$ global circulation model simulate large-scale ocean observation?, *Geophys. Res.*, 101, 25779-25812,
- [54] Rapp, R. H., 1998, The development of degree 360 expansion of the dynamic ocean topography of the POCM_4B global circulation model, NASA/CR-1998-206877, Goddard space flight center, Greenbelt, MD.
- [55] Milan Burša, Steve Kenyon, Jan Kouba, Zdislav Šíma, Viliam Vátrt, Vojtěch Vítek Marie Vojtíšková, The geopotential value W_0 for specifying the relativistic atomic time scale and a global vertical reference system. *J Geodesy* (2007) 81:103–110 DOI 10.1007/s00190-006-0091 3
- [56] Jekeli C., The exact transformation between ellipsoidal and spherical harmonic expansions. *Manuscripta* 13: 106-113, 1988.