

## لزوم اعمال بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی در مرحله بازگشت روش تک مرحله‌ای معکوس

امیر عبادی<sup>۱\*</sup>، علیرضا آزموده اردلان<sup>۲</sup>، روح الله کریمی<sup>۳</sup>

دانشجوی دکتری - گروه مهندسی نقشه برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران  
ebadi-a@ncc.org.ir

استاد گروه مهندسی نقشه برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران  
(قطب علمی مهندسی نقشه برداری در مقابله با سوانح طبیعی)  
ardalan@ut.ac.ir

استادیار دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه تفرش  
rkarimy@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت شهریور ۱۳۹۲، تاریخ تصویب مهر ۱۳۹۳)

### چکیده

یکی از روش‌های تعیین ژئوئید حل مساله مقدار مرزی گرانی زمین با استفاده از روش وارون‌سازی تک مرحله‌ای معکوس بر مبنای مشتقات مرتبه اول انتگرال پواسن بیضوی برای انتقال شتاب گرانی در سطح زمین به پتانسیل گرانی بر روی بیضوی مرجع است. این روش بر اساس ایجاد مشاهدات تفاضلی بر روی سطح زمین به کمک یک میدان مرجع و تبدیل آن به مجهولات تفاضلی پتانسیل گرانی بر روی بیضوی عمل می‌نماید. میدان‌های مرجع جهانی با فرض عدم وجود جرم توپوگرافی در خارج مرز آن‌ها قابل استفاده می‌باشند، اما برای استفاده از آن‌ها در داخل مرز، جایی که جرم توپوگرافی وجود دارد دچار خطا می‌شوند. در این مقاله برآورد روابط ریاضی محاسبه این خطا و لزوم اعمال آن در مرحله بازگشت روش وارون‌سازی تک مرحله‌ای معکوس ارائه شده است. صحت عملکرد روش محاسبه بایاس یاد شده با استفاده از مشاهدات گرانی واقعی در منطقه آزمونی در غرب ایران آزمایش شده است که نتایج آن موید اصلاح صورت گرفته در محاسبه اثر میدان جهانی در فضای پتانسیلی در مرحله بازگشت روش وارون‌سازی تک مرحله‌ای معکوس می‌باشد.

**واژگان کلیدی:** بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی، وارون‌سازی تک مرحله‌ای معکوس، مساله مقدار مرزی گرانی زمین، تعیین ژئوئید

\* نویسنده رابط

## ۱- مقدمه

پتانسیل گرانی زمین نقش مهمی در فعالیت‌های ژئودتیکی همچون تعیین ژئوئید و شبه ژئوئید، یکسان‌سازی دیتوم‌های ارتفاعی و مدل‌سازی میدان گرانی ایفا می‌کند. البته به‌علت آن‌که نمی‌توان پتانسیل گرانی را به‌طور مستقیم مشاهده نمود، یکی از روش‌های تعیین آن، استفاده از مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی بر مبنای تابع‌های مشاهداتی میدان گرانی مانند بردار گرانی، نرم بردار گرانی (گرانی) و دیگر مشتقات پتانسیل گرانی می‌باشد. در تعیین ژئوئید و برخی کاربردهای دیگر، در حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی باید مشاهدات به سمت پایین انتقال یابند، زیرا مشاهدات گرانی در سطح یا بالای سطح زمین هستند در حالی‌که پتانسیل گرانی را بر روی ژئوئید یا بیضوی مرجع نیاز داریم. برای محاسبه پتانسیل گرانی روی ژئوئید یا بیضوی مرجع از داده‌های گرانی می‌توان از روش‌های یک مرحله‌ای یا دو مرحله‌ای استفاده نمود. روش دو مرحله‌ای شامل دو قسمت جداگانه است: انتقال به سمت پایین گرانی و وارون‌سازی (تبدیل گرانی به پتانسیل)، درحالی‌که در روش تک مرحله‌ای مراحل ذکرشده با هم ترکیب شده و در یک مرحله انجام می‌شوند. همچنین روش‌های یک مرحله‌ای و دو مرحله‌ای می‌توانند به صورت مستقیم یا معکوس انجام شوند. معمولاً حل روش‌های تک مرحله‌ای و دو مرحله‌ای معکوس، با معادلات انتگرالی انجام می‌شود که دارای مشکلاتی از قبیل ناپایداری، خطای برش و گسسته‌سازی ناحیه انتگرال‌گیری هستند که به طور مفصل توسط Novak et al (2001), Featherstone et al. (1998), Huang (2002) و Albers and Klees (2004) بررسی شده‌اند. یکی از راه‌های کاهش خطاهای ناشی از مشکلات نامبرده شده تبدیل مشاهدات و مجهولات به مقادیر تفاضلی آن‌ها است، یعنی به جای آن‌که از مقدار مشاهدات در محاسبات استفاده شود با حذف اثر یک میدان جهانی از روی آن، از مشاهدات تفاضلی جهت رسیدن به مجهولات تفاضلی استفاده می‌گردد. اردلان در سال ۲۰۰۰ بر پایه همین تکنیک موسوم به حذف-محاسبه-بازگشت، روشی را برای محاسبه پتانسیل گرانی تفاضلی روی بیضوی مرجع با استفاده از مقادیر گرانی تفاضلی روی سطح زمین بر اساس حل معکوس مشتق اول انتگرال

پواسن بیضوی ارائه داد. سپس از این روش در اردلان-گرافارند (۲۰۰۴) برای تعیین ژئوئید ایران، اردلان و صفری (۲۰۰۵) برای تعیین بایاس دیتوم ارتفاعی ایران، صفری و همکاران (۲۰۰۵) برای تعیین ژئوئید جدید ایران، اردلان و همکاران (۲۰۱۰a) برای تعیین بایاس دیتوم ارتفاعی فنلاند، اردلان و همکاران (۲۰۱۰b) برای تعیین شبه ژئوئید جنوب‌غرب فنلاند و عبادی (۲۰۱۳) برای تعیین ژئوئید و شبه ژئوئید ایران استفاده شده است. این مقاله بر روی یک مشکل جدید در مرحله بازگشت روش تک مرحله‌ای معکوس که در اردلان (۲۰۰۰) ارائه شده است، متمرکز می‌شود. در مرحله بازگشت به محاسبه اثر میدان جهانی در فضای پتانسیلی بر روی بیضوی مرجع نیاز است. میدان‌های جهانی که بر اساس ضرائب هارمونیک ارائه می‌شوند در فضای هارمونیک خارج مرز که جرم‌های توپوگرافی حضور ندارند صادق می‌باشند، لذا برای محاسبه اثر میدان جهانی در جایی‌که جرم توپوگرافی وجود دارد شرط هارمونیک بودن فضا از بین می‌رود و محاسبه اثر میدان جهانی با استفاده از ضرائب هارمونیک دچار خطایی می‌شود که به بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی معروف است. در این مقاله به بررسی روابط ریاضی این بایاس، تعیین مقدار عددی آن و صحت عملکرد روابط ارائه شده با استفاده از داده‌های گرانی واقعی در منطقه آزمونی در غرب ایران پرداخته شده است. در بخش دوم مدل ریاضی بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی معرفی و فرمول‌های آن بیان می‌شود. بخش سوم به پیاده‌سازی عددی در منطقه آزمون و نتایج آن اختصاص دارد و در بخش آخر نتیجه‌گیری خواهد شد.

## ۲- مدل ریاضی بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی

به‌طور خلاصه پروسه تعیین ژئوئید به روش تک مرحله‌ای معکوس به‌صورت ذیل بیان می‌شود:

۱- استفاده از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه  $L$  به‌همراه اثرات جاذبه اتمسفر و میدان گریز از مرکز بیضوی برای حذف میدان ناشی از جرم‌های جهانی و ایزوستازی از کمیت‌های روی مرز.

۲- حذف اثرات جرم‌های توپوگرافی باقی مانده تا فاصله ۵۵ کیلومتری حول نقطه محاسباتی از کمیت‌های

است. همین موضوع برای کرنل پواسن بیضوی نیز صحیح است که به بخش کروی اش خیلی نزدیک است (Ardalan 2000). بنابراین کرنل اصلاح شده  $K$  را می توان از روی کرنل پواسن بیضوی به صورت زیر محاسبه نمود (Ardalan et al. 2010a)

$$K(\lambda, \varphi, \eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{m_{\lambda\lambda}}} \frac{g_{ref}^{\lambda} \partial \mathcal{P}(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \lambda} + \frac{1}{\sqrt{m_{\varphi\varphi}}} \frac{g_{ref}^{\varphi} \partial \mathcal{P}(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{m_{\eta\eta}}} \frac{g_{ref}^{\eta} \partial \mathcal{P}(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \eta} \quad (2)$$

که برای محاسبه کرنل پواسن بیضوی  $\mathcal{P}$  به Martinec and Grafarend (1997) رجوع شود. با در نظر گرفتن بردار خطا  $r$  رابطه ۱ به صورت ماتریسی با مدل Gauss-Markov استاندارد به صورت زیر نوشته می شود:

$$b + r = Ax \text{ with } E(r) = 0 \text{ and } D(r) = D(b) = \sigma^2 W^{-1} \quad (3)$$

که در آن:

$$x = [x_{ij}]_{u \times 1} = [\tilde{T}^L(\lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}, \eta_0)]_{u \times 1}$$

$$b = [b_k]_{n \times 1} = [\delta \tilde{g}^L(\lambda_k, \varphi_k, \eta_k)]_{n \times 1} \quad (4)$$

$$A = [A_{k,ij}]_{n \times u} = \left[ \frac{1}{4\pi} K(\lambda_k, \varphi_k, \eta_k; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}) \cos \varphi'_{ij} \Delta \varphi' \Delta \lambda' \right]_{n \times u}$$

در رابطه فوق  $E$  و  $D$  اپراتورهای امید ریاضی،  $b$  بردار مشاهدات،  $x$  بردار مجهولات،  $W$  ماتریس وزن و  $\sigma^2$  فاکتور واریانس اولیه هستند. در رابطه ۲،  $u = i_{max} \times j_{max}$  تعداد مجهولات است و  $n$  تعداد مشاهدات گرانی است. رابطه ۳ مدل ریاضی روش تک مرحله ای معکوس را نشان می دهد.

در مرحله ۶ شکل ۱ باید اثر پتانسیل میدان جهانی که در مرحله ۲ در فضای گرانی حذف شده بود به پتانسیل باقی مانده روی بیضوی مرجع اضافه شود.

$$W(\lambda, \varphi, \eta_0) = \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta_0) + W_L(\lambda, \varphi, \eta_0) + V^{RTM}(\lambda, \varphi, \eta_0) \quad (5)$$

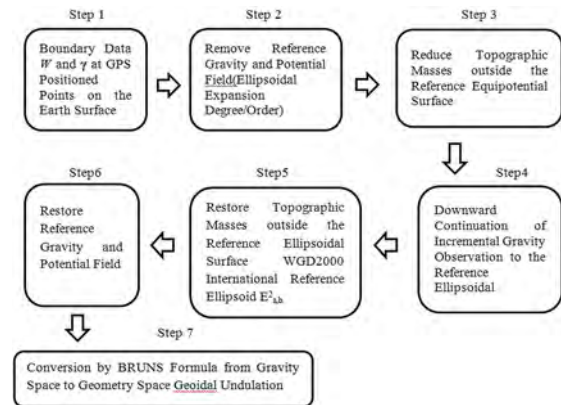
مشاهداتی روی مرز با انتگرال نیوتن (با توجه به رابطه  $\frac{\pi R}{L}$  برای درجه و مرتبه ۳۶۰ محاسبه اثر جرم توپوگرافی تا فاصله ۵۵ کیلومتری کافی است) (Lemoine, 1996) (Ardalan, 1999).

۳- انتقال به سمت پایین مشاهدات تفاضلی برای حصول پتانسیل تفاضلی در نقاط شبکه ایجاد شده بر روی بیضوی فرانس از طریق روش های پایدارسازی.

۴- بازگرداندن اثرات حذف شده (تاثیرات جهانی و محلی) به پتانسیل جاذبه تفاضلی روی سطح بیضوی فرانس و به دست آوردن پتانسیل گرانی در نقاط شبکه ایجاد شده بر روی بیضوی فرانس.

۵- استفاده از فرمول برنز برای تبدیل پتانسیل گرانی روی سطح بیضوی فرانس به ارتفاع ژئوئید.

شکل ۱ نمودار مراحل روش فوق را نشان می دهد.



شکل ۱- نمودار تعیین ژئوئید به روش تک مرحله ای معکوس توسط اردلان در سال ۲۰۰۰

بر اساس روش تک مرحله ای معکوس ارائه شده توسط اردلان ۲۰۰۰، می توان ارتباط بین شتاب گرانی تفاضلی در سطح زمین و پتانسیل گرانی تفاضلی بر روی بیضوی مرجع را به صورت زیر نوشت:

$$\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{4\pi} \iint_{E_{a,b}^z} K(\lambda, \varphi, \eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}) \cos \varphi'_{ij} \Delta \varphi' \Delta \lambda' \tilde{T}^L(\lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}, \eta_0) \quad (1)$$

که  $\Delta \lambda'$  و  $\Delta \varphi'$  عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی است که رزولوشن شبکه انتگرال گیری را با ابعاد  $i_{max} \times j_{max}$  تعریف می کند.

Huang (2002) نشان داده است که کرنل پواسن کروی باقی مانده اصلاح شده به کرنل پواسن خیلی نزدیک

بایاس ADC را می‌توان با تقریب برابر بایاس توپوگرافی در نظر گرفت (Sjoberg and Bagherbandi 2011). هم‌چنین Sjoberg(2007,2009) نشان داده است که بایاس توپوگرافی را می‌توان با جمع اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی تقریب زد. در برخی کاربردها نیاز داریم تا حد بالای بایاس توپوگرافی را بدانیم. این حد بالا که با  $L \rightarrow \infty$  اتفاق می‌افتد به صورت زیر می‌باشد (Agren 2004; Sjoberg and Bagherbandi 2011; Sjoberg(2007,2009).

$$\delta W = 2\pi G\sigma(H^2 + \frac{2H^3}{3R}) \quad (9)$$

با داشتن بایاس ADC از رابطه ۹،  $W_L^c(\lambda, \varphi, \eta_0)$  از رابطه ۶ محاسبه شده و پتانسیل گرانی تصحیح شده بر روی بیضوی مرجع به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$W^c(\lambda, \varphi, \eta_0) = \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta_0) + W_L^c(\lambda, \varphi, \eta_0) + V^{RTM}(\lambda, \varphi, \eta_0) \quad (10)$$

### ۳- پیاده‌سازی آزمون‌های عددی

جهت تعیین لزوم اعمال تصحیح یاد شده فوق به پتانسیل گرانی به دست آمده بر روی بیضوی مرجع، منطقه آزمونی در غرب ایران در محدوده  $32^\circ \sim 37^\circ$  و  $48^\circ \sim 53^\circ$  انتخاب شده است. در منطقه آزمون، ۳۶۶۹ نقطه مشاهداتی گرانی انتخاب شده است که شامل ۱۳۹۷ نقطه از شبکه جهانی BGI و ۲۱۹۸ نقطه از شبکه ترازیبی دقیق ایران و ۷۴ نقطه از شبکه درجه یک چند منظوره ایران موسوم به GLGAM می‌باشد. شکل ۲ نمایشی از پراکندگی نقاط مشاهداتی در منطقه آزمون است (نقاط آبی رنگ نقاط شبکه BGI، نقاط قرمز رنگ نقاط شبکه ترازیبی دقیق ایران، نقاط سبز رنگ نقاط شبکه چند منظوره و نقاط کنترل و چک با مثلث نشان داده شده است). هم‌چنین از ۱۸ نقطه از نقاط شبکه درجه یک چند منظوره ایران جهت کنترل نتایج استفاده شده است. از نقاط کنترل در محاسبات استفاده نشده است تا وابستگی بین نتایج و آن‌ها وجود نداشته باشد. هم‌چنین موقعیت نقاط کنترل در محل‌هایی انتخاب شده است که مشاهده کمتری وجود دارد تا بتوان دقت مدل را در بدترین حالت ممکن ارزیابی نمود. شکل ۳ نیز نمایشی از

رابطه ۵ روی بیضوی مرجع محاسبه می‌شود، یعنی  $W(\lambda, \varphi, \eta_0)$  مقدار پتانسیل نقاط بر روی بیضوی مرجع است. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد  $W_L$  از روی GGM محاسبه می‌شود ولی بخشی از آن داخل جرم‌های توپوگرافی است که در آن GGMs معتبر نیستند، بنابراین برآورد GGM روی بیضوی مرجع باعث خطای بایاس انتقال به سمت پدین تحلیلی (ADC) می‌شود (Wang 1994,1997; Sjoberg 1977,1980; Jekeli 1981; Agren 2004; Sjoberg and Bagherbandi 2011).

به عنوان نتیجه این بحث می‌توان مقدار تصحیحی برای حذف بایاس یاد شده به  $W_L(\lambda, \varphi, \eta_0)$  اعمال نمود:

$$W_L^c(\lambda, \varphi, \eta_0) = W_L(\lambda, \varphi, \eta_0) - \delta W \quad (6)$$

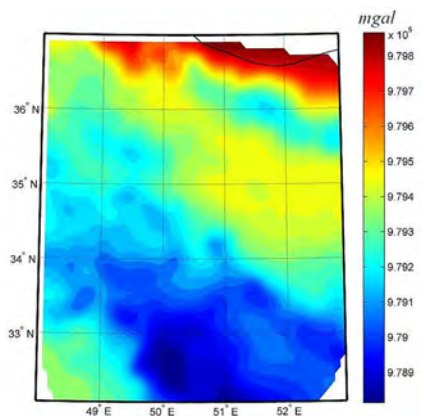
که  $W_L^c$  پتانسیل گرانی تصحیح شده روی بیضوی مرجع است که از GGM به دست می‌آید و  $\delta W$  نیز بایاس ADC است. بایاس ADC رابطه مستقیمی با چگالی جرم توپوگرافی، ماکزیمم درجه و مرتبه  $GGM(L)$  و ارتفاع توپوگرافی بالای جرم توپوگرافی داخل نقطه محاسباتی دارد. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت هرگونه افزایشی در پارامترهای یاد شده باعث افزایش بایاس ADC می‌شود. با فرض ثابت بودن چگالی جرمی،  $\delta W$  را به صورت زیر می‌توان نوشت (Sjoberg 1977, 1980; Agren 2004; Sjoberg and Bagherbandi 2011):

$$\delta W = 2\pi G\sigma \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n [(H^2)_{mn} + \frac{2(H^3)_{mn}}{3R} + \frac{n(n+1)(H^4)_{mn}}{3 \times 4 R^2} + \dots] Y_{nm} \quad (7)$$

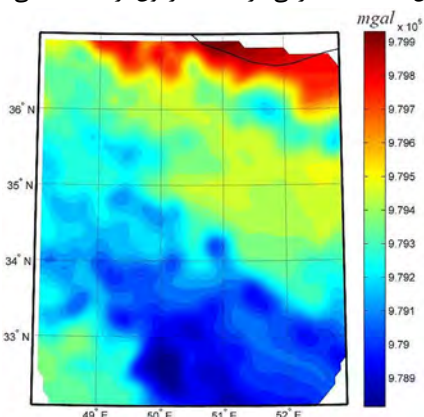
که  $\sigma$  چگالی جرم‌های توپوگرافی،  $G$  ثابت جاذبی،  $R$  شعاع متوسط زمین،  $Y_{nm}$  هارمونیک‌های کروی نرمالیزه شده کامل و  $(H^v)_{mn}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(H^v)_{mn} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} H^v Y_{nm} d\Omega \quad (8)$$

که  $H^v$  توان  $v^{\text{th}}$  ارتفاع توپوگرافی بالای جرم توپوگرافی داخل نقطه محاسباتی و  $\Omega$  دلالت بر کره یکه دارد. دو ترم اول رابطه ۷ بایاس توپوگرافی هستند که توسط Sjoberg(2007,2009) بیان شده‌اند. با توجه به این که بایاس توپوگرافی بخش غالب بایاس ADC است،

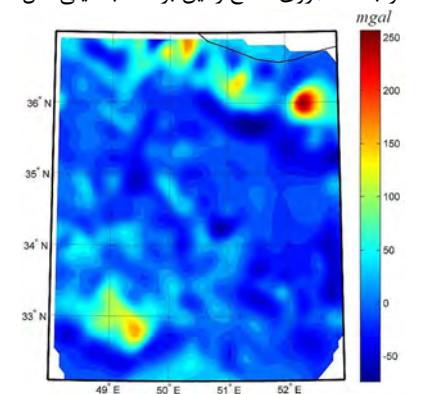


شکل ۴ - شتاب گرانی در منطقه آزمون بر حسب میلی گال



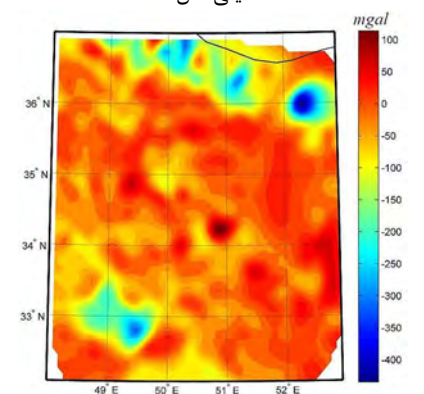
شکل ۵- شتاب گرانی بر اساس مدل (EGM2008)GGM تا درجه و

مرتبه (۳۶۰) روی سطح زمین بر حسب میلی گال



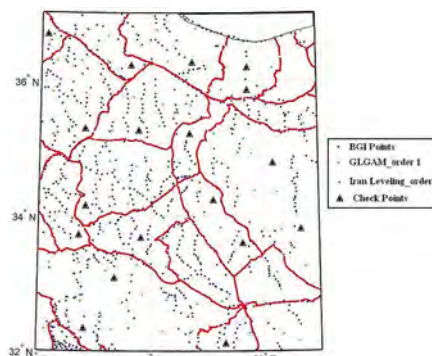
شکل ۶- اثر توپوگرافی بر روی شتاب گرانی در منطقه آزمون بر حسب

میلی گال



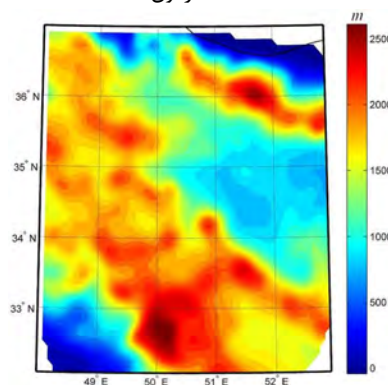
شکل ۷- شتاب گرانی باقی مانده روی سطح زمین بر حسب میلی گال

مدل ارتفاعی منطقه است. علت انتخاب منطقه آزمون در غرب ایران وجود توپوگرافی بسیار متفاوت در این ناحیه است که شامل بخشی از رشته کوههای البرز و زاگرس و مناطق کم ارتفاع مرکزی ایران و سواحل دریای خزر است که بازه تغییرات توپوگرافی از چند متر تا بلندترین منطقه ایران یعنی البرز مرکزی و زاگرس می باشد.



شکل ۲- پراکندگی ۳۶۶۹ نقطه گرانی به همراه ۱۸ نقطه چک در

منطقه آزمون



شکل ۳- ارتفاع ژئودتیک منطقه آزمون نسبت به بیضوی WGS84 بر

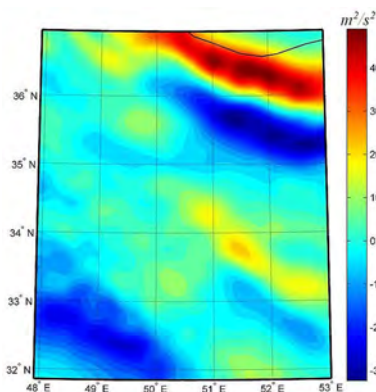
حسب متر

همان گونه که پیش تر اشاره گردید در روش تک مرحله ای معکوس با حذف اثرات جهانی و محلی میدان گرانی از روی شتاب گرانی مشاهداتی به مقدار شتاب تفاضلی گرانی بر روی سطح زمین در نقاط مشاهداتی خواهیم رسید که در اصل این مقادیر نقش بردار مشاهدات را در مدل ریاضی بر عهده خواهند داشت. شکل های ۴ الی ۷ نمایشی از مقدار شتاب گرانی مشاهداتی، شتاب گرانی بر اساس مدل جهانی، شتاب گرانی محلی ناشی از جرم های نزدیک توپوگرافی و شتاب تفاضلی گرانی می باشد.

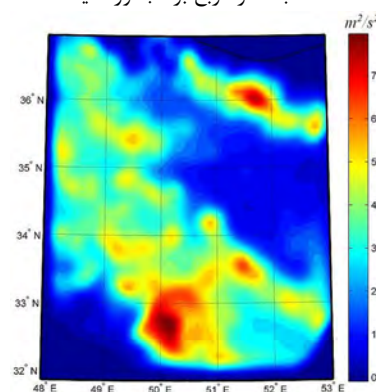
جدول ۱ مقادیر عددی شتاب گرانی، شتاب گرانی بر اساس مدل جهانی و ناشی از جرمهای توپوگرافی نزدیک و شتاب گرانی را باقیمانده را در منطقه آزمون بیان میکند.

جدول ۱- اطلاعات آماری شتاب گرانی، شتاب گرانی بر اساس مدل جهانی و ناشی از جرمهای توپوگرافی نزدیک و شتاب گرانی باقیمانده در منطقه آزمون

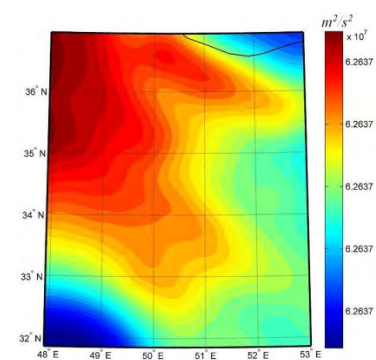
Quantity Value	Min (cm)	Max (cm)	Mean (cm)	Std (cm)
Observed Gravity	۹۷۸۸۱۱/۹۵	۹۷۹۹۵۰	۹۷۹۲۶۲/۴۹	۲۰۳/۹۶
Gravity Based on GGM model	۹۷۸۷۹۰/۱	۹۸۰۰۱۳/۵	۹۷۹۲۸۴/۳	۰/۰۰۲۱
Topography effect on Gravity	-۱۵۹/۷	۰	-۳۱/۲۶	۲۷/۹
Topography Height	-۳۲/۱۴۵	۳۱۹۴/۸	۱۴۶۸/۹	۶۰۳/۱۵



شکل ۹- اثر توپوگرافی بر روی پتانسیل گرانی در منطقه آزمون بر حسب متر مربع بر مجذور ثانیه



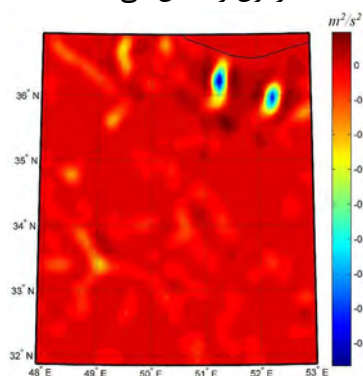
شکل ۱۰- اثر بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی (بایاس ADC) بر روی پتانسیل در منطقه آزمون بر حسب متر مربع بر مجذور ثانیه



شکل ۱۱- پتانسیل گرانی بر روی بیضوی مرجع بر حسب متر مربع بر مجذور ثانیه

محاسبات تعیین ژئوئید یک بار بدون اعمال بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی و بار دیگر با اعمال آن انجام شده است که نتایج آنها در شکل‌های شماره ۱۲ و ۱۳ ارائه شده است.

شکل ۸ پتانسیل گرانی باقی‌مانده بر روی بیضوی مرجع را نمایش می‌دهد. نکته حائز اهمیت در این شکل مقادیر به دست آمده برای پتانسیل گرانی باقی‌مانده است. همان‌طور که از شکل نیز پیداست مقدار پتانسیل گرانی باقی‌مانده بین صفر تا  $-۰/۸$  است. از آنجا که آنامولی ارتفاعی از تقسیم آنامولی پتانسیل بر شتاب گرانی نرمال حاصل می‌شود ( $N = T/\gamma$ )، نتایج حاصل در شکل ۸ معادل چند سانتی‌متر بهبود ژئوئید در منطقه است. با توجه به این که در روش تک مرحله‌ای معکوس، اثرات جهانی و محلی شتاب گرانی از روی مشاهدات حذف و پس از تبدیل آن به پتانسیل دوباره به آن اضافه می‌گردد، مقادیر به دست آمده صحت عمل کرد روش فوق را به اثبات می‌رساند. شکل‌های ۹ و ۱۰ اثر توپوگرافی (جرم‌های در فاصله نزدیک) و اثر بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی در منطقه آزمون را نشان می‌دهند.



شکل ۸- پتانسیل گرانی باقی‌مانده بر حسب متر مربع بر مجذور ثانیه

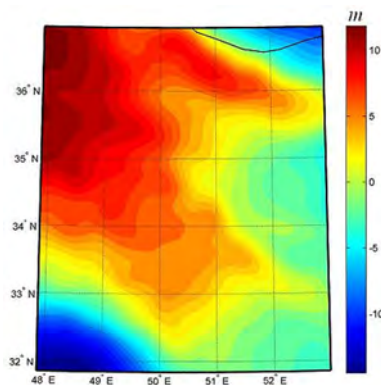
جدول ۲- اطلاعات آماری اختلاف ژئوئید حاصل از روش تک مرحله‌ای معکوس با و بدون اعمال اثر بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی و ژئوئید حاصل از مدل EGM2008 تا درجه و مرتبه ۳۶۰ با ژئوئید حاصل از نقاط GPS/Leveling

Method	Min (cm)	Max (cm)	Mean (cm)	Std (cm)	MSE (cm)
EGM2008 (Degree and Order 360)	- ۸۳/۳۷	۳۴/۱۹	- ۲۰/۰۲	۳۸/۱۰	۱۷/۷۲
Without ADC	- ۷۷/۲۷	۳۴/۰۱	-۱۹۰/۳۰	۳۷/۱۴	۱۶/۷۵
With ADC	- ۳۹/۸۰	۷۳/۵۶	۱۳/۲۴	۳۴/۱۱	۱۲/۷۴

با ملاحظه جدول شماره ۲ مشاهده می‌گردد که اعمال بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی در مرحله بازگشت روش تک مرحله‌ای معکوس در تعیین ژئوئید امری ضروری است. نتایج جدول فوق نشان می‌دهد که اعمال این بایاس در محاسبات منجر به بهبود در میانگین نتایج به مقدار ۷ سانتی‌متر شده است که در مقایسه با مقدار ژئوئید منطقه که بین ۱۰- تا ۱۰ متر تغییر می‌کند، مقدار قابل ملاحظه‌ای است. هم‌چنین انحراف معیار نتایج به دست آمده برابر ۴ سانتی‌متر و خطای میانگین مربعی برابر ۵ سانتی‌متر بهبود داشته است.

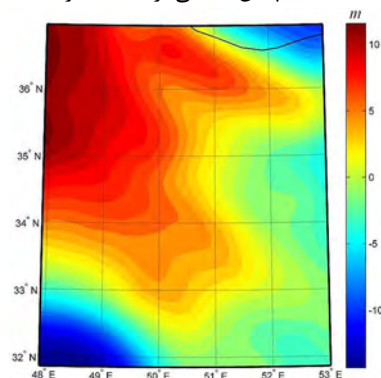
#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر اعمال بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی در مرحله بازگشت روش تک مرحله‌ای معکوس در هنگام محاسبه اثر پتانسیل میدان جهانی بررسی شد و روابط ریاضی لازم برای محاسبه این اثر ارائه گردید. سپس جهت بررسی عددی آن، در منطقه آزمونی با استفاده از مشاهدات واقعی گرانی مورد ارزیابی قرار گرفت که نتایج حاصل بیانگر بهبود ۷ سانتی‌متری میانگین، ۴ سانتی‌متری انحراف معیار و ۵ سانتی‌متری خطای میانگین مربعی است و لزوم اعمال بایاس یاد شده را تایید می‌نماید.



شکل ۱۲- ژئوئید منطقه آزمون بدون محاسبه اثر بایاس انتقال به

سمت پایین تحلیلی بر حسب متر



شکل ۱۳- ژئوئید منطقه آزمون با محاسبه اثر بایاس انتقال به سمت

پایین تحلیلی بر حسب متر

از مقایسه شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به صورت گرافیکی نتیجه خاصی ملاحظه نمی‌گردد، زیرا اثر بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی بر روی ژئوئید در حدود کمتر از چند سانتی‌متر است، اما با بررسی آماری نتایج به دست آمده اثر آن به طور واضح و مشخصی نمایان می‌گردد. در نهایت نتایج زیر حاصل از محاسبه و اعمال بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی به دست آمده است که در جدول شماره ۲ قابل مشاهده است.

## مراجع

- [1] Ågren J. (2004): The analytical continuation bias in the geoid determination using potential coefficients and terrestrial gravity data. *J Geod*, Volume 78:314–332.
- [2] Alberts B. and Klees R. (2004): A comparison of methods for the inversion of airborne gravity data. *J Geod*, Volume 78: 55-65.
- [3] Ardalan A.A. (2000): High-resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, Stuttgart University, Stuttgart.
- [4] Ardalan A.A. and Grafarend E.W. (2001): Somigliana–Pizzetti gravity: the international gravity formula accurate to the sub-nanoGal level. *J. Geod*, Volume 75: 424-437
- [5] Ardalan A.A., Grafarend E.W. and Ihde J. (2002): Molodensky potential telluroid based on a minimum-distance map. Case study: the quasi-geoid of East Germany in the World Geodetic Datum 2000. *J Geod*, Volume 76: 127-138
- [6] Ardalan A.A. and Grafarend E.W. (2004): High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid. *J Geod*, Volume 78:138–156.
- [7] Ardalan A.A. and Safari A. (2004): Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid. *Journal of Geodesy*, Volume 78: 114-123.
- [8] Ardalan A.A. and Safari A. (2005): Global height datum unification: a new approach in gravity potential space. *J Geod*, Volume 79:512–523.
- [9] Ardalan A.A., Karimi R. and Poutanen M. (2010a): A bias-free geodetic boundary-value problem approach to height datum unification. *J Geod*, Volume 84:123–134.
- [10] Ardalan A.A., Karimi R. and Bilker-Koivula M. (2010b): An overdetermined geodetic boundary-value problem approach to telluroid and quasi-geoid computations. *J Geod*, Volume 84:97–104.
- [11] Featherstone W.E., Evans J.D., Olliver J.G., 1998. A Meissl-modified Vaníček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. *J Geod* 72: 154–160
- [12] Grafarend E.W. and Ardalan A.A. (1999): World Geodetic Datum 2000. *J Geod*, Volume 73:611–623.
- [13] Huang J., 2002. Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation on gravity and the geoid. Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, The University of New Brunswick, New Brunswick.
- [14] Jekeli Ch. (1981): The downward continuation to the Earth's surface truncated spherical and ellipsoidal harmonic series of the gravity and height anomalies. Rep 323, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- [15] Karimi.R. (2010): Local Gravity Field Modeling, Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, Faculty of Engineering, Tehran University, Tehran.
- [16] Koch K.R. and Kusche J. (2002): Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *J Geod*, Volume 76:259–268.
- [17] Lemoine F.G., Smith D.E., Kunz L., Smith R., Pavlis E.C., Pavlis N.K., Klosko S.M., Chinn D.S., Torrence M.H., Williamson R.G., Cox C.M., Rachlin K.E., Wang Y.K., Kenyon S.C., Salman R., Trimmer R., Rapp R.H. and Nerem R.S. (1998): The development of the NASA and NIMA joint geopotential model. NASA, technical report No. 206861.
- [18] Lemoine F.G., Smith D.E., Rowlands D., Zuber M., Neumann G.A., Chinn D.S. and Pavlis D. (2001): An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. *J. Geophys. Res.*, 106, 23359–23376,
- [19] Martinec Z. and Grafarend E.W. (1997): Construction of Green's function to an external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution. *J Geod*, Volume 71:562–570.
- [20] Martinec Z. and Grafarend E.W. (1997a): Solution of the Stokes boundary-value problem on an ellipsoid of revolution. *Studia geoph. Et geod.* 41, 103-129.
- [21] Martinec Z. and Grafarend E.W. (1997b): Construction of Green's function to an external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution. *Journal of Geodesy*, Volume 71, 562-570.



- [22] Novak P., Kern M., Schwarz K.P. and Heck B. (2001): On the determination of a band-limited gravimetric geoid from airborne gravimetry. Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Technical Report 30013: 1-222
- [23] Safari A. (2004): Ellipsoidal Boundary Value Problem for Geoid Computations via Gravimetry, Astronomical and Satellite Altimetry observations. Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, Faculty of Engineering, Tehran University, Tehran.
- [24] Sjöberg L.E. (1977): On the errors of spherical harmonic developments of gravity at the surface of the Earth. Rep 257, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- [25] Sjöberg L.E. (1980): On the convergence problem for the spherical harmonic expansion of the geopotential at the surface of the Earth. *Boll. Geod. Sci. Aff.*, 39(4):261–271.
- [26] Sjöberg L.E. (2007) The topographic bias by analytical continuation in physical geodesy. *J Geod* 81:345–350.
- [27] Sjöberg L.E. (2009): On the topographic bias in geoid determination by the external gravity field. *J Geod* 83:967–972.
- [28] Sjöberg L.E. and Bgherbandi M. (2011): The numerical study of the analytical downward continuation error in geoid computation by EGM2008. *Journal of Geodetic Science* 1:2–8.
- [29] Wang Y.M. (1994): On the error of analytical downward continuation under planar approximation. *Manuscr Geod* 19:119–128.
- [30] Wang Y.M. (1997): On the error of analytical downward continuation of the Earth's external gravitational potential on and inside the Earth's surface. *J Geod* 71:70–82.