

مدل‌سازی محلی میدان ثقل با استفاده از مشاهدات اختلاف جاذبه در امتداد خط دید ماهواره‌ی GRACE Follow-on و توابع پایه‌ی هارمونیک کلاه کرووی اصلاح‌شده

محسن فیضی*^۱، مهدی روفیان نایینی^۲، آناهیتا حاتمی^۵

^۱ دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی ژئودزی و ژئوماتیک
mfeizi@mail.kntu.ac.ir

^۲ دانشگاه لایپنیز هانوفر آلمان، گروه ژئودزی
mohsen.feizi@stud.uni-hannover.de

^۳ دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی ژئودزی و ژئوماتیک
mraoofian@kntu.ac.ir

^۴ دانشگاه نیوکاسل استرالیا، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست
mehdi.roofiannaeni@newcastle.edu.au

^۵ دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی ژئودزی و ژئوماتیک
Anahita.Hatami@email.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت: آبان‌ماه ۱۴۰۱، تاریخ تصویب: اسفندماه ۱۴۰۱)

چکیده

در این مطالعه، یک مدل منطقه‌ای برای میدان گرانش زمین در سراسر قطب جنوب ارائه می‌شود. در این مدل‌سازی از مشاهدات اختلاف گرانش در امتداد خط دید ماهواره (LGD)، حاصل از مأموریت گریس (GRACE-FO) استفاده‌شده و مدل برحسب بسط به توابع پایه‌ی هارمونیک‌های کرووی اصلاح‌شده (ASCH) محاسبه می‌گردد. توابع پایه ASCH با استفاده از معرفی ضریب مقیاس و اعمال یک نگاشت به دامنه و مرز مسئله، به ما این امکان را می‌دهد که از توابع لژاندر درجه و مرتبه صحیح (مشابه هارمونیک‌های جهانی) در مدل‌سازی استفاده کنیم و همچنان این مدل‌سازی ماهیت محلی داشته و قادر به نمایش جزئیات باشد. با توجه به ویژگی توابع پایه؛ نخست روشی نوین برای تبدیل داده‌های LGD به دامنه ASCH و محاسبه ضرایب هارمونیک ارائه می‌گردد. به‌منظور کاهش اثر خطای لبه‌ای، داده‌های شبکه‌بندی گرانشی فراتر از مرز منطقه‌ی مورد مطالعه با استفاده از یک مدل ژئوپتانسیل تولید می‌شوند. برای صحت‌سنجی مطالعه‌ی انجام‌شده، مجموعه‌ای از نقاط کنترل از بین داده‌های LGD و در مسیر پروفیل‌ها (مسیرهای مداری ماهواره GRACE بر روی منطقه مورد مطالعه) انتخاب می‌شوند تا صحت مدل‌های محلی را تأیید کنند. براین اساس، وقتی نتایج مدل محلی با نقاط کنترل مقایسه می‌گردد، ریشه میانگین مربعات خطا برابر ۱ نانو متر بر مجذور ثانیه حاصل می‌گردد؛ که با دقت داده‌های LGD یعنی ۰.۱۵ نانومتر بر مجذور ثانیه، قابل مقایسه است. از طرف دیگر، ریشه میانگین مربعات خطای مدل‌های ژئوپتانسیل جهانی در برابر داده‌های LGD برابر ۶ نانومتر بر مجذور ثانیه است. لذا، روش توابع هارمونیک محلی توانایی استخراج جزئیات بیشتری از میدان ثقل را داشته و می‌تواند مدل ژئوپتانسیل محلی دقیق‌تری ایجاد کند.

واژگان کلیدی: مدل‌سازی میدان ثقل محلی، تابع پایه هارمونیک کلاه کرووی اصلاح‌شده، مشاهدات اختلاف گرانش خط دید، ماهواره

GRACE-FO

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

مدل‌سازی میدان ثقل یکی از مباحثی است که از دیرباز در علم ژئودزی توسط دانشمندان مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است، چراکه اطلاعاتی از میدان ثقل و تغییرات آن، دانسیته زمین، تغییر جرم در داخل زمین و تغییرات هیدرولوژی و منابع آب‌های زیرزمینی را در اختیار ما قرار می‌دهد. همچنین در بحث اکتشاف، تعیین مدار ماهواره‌ها و نوبری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ابتدا مدل‌سازی میدان ثقل با استفاده از مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی مانند مسئله استوکس و مالدنسکی انجام می‌شد و در کنار مدل‌سازی میدان ثقل، سطوح مبنای ارتفاعی مانند ژئوئید و شبه ژئوئید نیز از طریق حل این مسائل تعیین می‌شدند. با توسعه تکنیک‌های اندازه‌گیری و به‌خصوص پرتاب ماهواره‌ها و در اختیار قرار گرفتن مشاهدات با پوشش مکانی و زمانی مناسب، بحث مدل‌سازی میدان ثقل وارد فاز جدیدی شد و مطالعه میدان ثقل از طریق حل مسائل مقدار مرزی، جای خود را به برآورد ضرایب ژئوپتانسیل در بسط پتانسیل به هارمونیک‌های کروی داد که این امر به‌نوبه خود منجر به حصول مدل‌های ژئوپتانسیلی به‌صورت جهانی یا محلی گردید. در بحث مدل‌سازی جهانی، ابتدا مدل‌های ژئوپتانسیل با استفاده از آنالیز اغتشاش مدار ماهواره‌ها به دست می‌آمدند که این مدل‌ها توانایی بازیابی ضرایب درجه بالا را نداشتند. سپس ماهواره‌هایی که خاص فعالیت‌های ثقل سنجی بودند، مانند ماهواره‌های گریس^۱، گوس^۲ و چمپ^۳ در مدار قرار گرفتند. این ماهواره‌ها با توجه به تکنیک مشاهداتی، امکان تعیین و مدل‌سازی میدان ثقل را تا درجات و مراتب بالاتر با پوشش سراسری و رزولوشن مناسب فراهم کردند. در بین این سه مأموریت ماهواره‌ای، گریس از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است زیرا هم عمر ماهواره طولانی‌تر بوده است و هم امکان اندازه‌گیری تغییرات زمانی میدان ثقل را فراهم می‌کند. مدل‌های جهانی میدان ثقل، قادر به بیان جزئیات فرکانس بالای میدان گرانش زمین نیست. از طرف دیگر برای رسیدن به قدرت تفکیک مکانی بالای میدان به‌وسیله مدل هارمونیک‌های کروی، نیاز است تا محاسبه‌ی پارامترهای بیشتر و حجم محاسبات بیشتری صورت گیرد که این به‌نوبه

خود باعث جلوگیری از دسترسی به جواب بهینه مسئله می‌گردد و از آن‌جا که تعیین میدان گرانش محلی مخصوصاً در حوزه‌ی فرکانسی بالا با درجات پایین‌تری (k_{max} کوچک‌تری) نسبت به مدل‌های جهانی امکان‌پذیر است، لذا در عمل نرخ همگرایی به جواب پایین می‌باشد [۱]. لذا برای افزایش دقت در کاربردهای محلی، مدل‌سازی محلی میدان گرانش مدنظر قرار می‌گیرد. یکی از روش‌های شناخته‌شده در این خصوص حل مسئله مقدار مرزی معادله لاپلاس به‌صورت محلی است. در مدل‌سازی محلی، به‌جای آن‌که اطلاعات در کل کره‌ی زمین در اختیار باشد، فرض می‌شود که اطلاعات گرانشی بر محدوده‌ای از زمین به‌عنوان نمونه به شکل کلاهک کروی، در اختیار باشد. هینز تئوری هارمونیک‌های کروی را برای مدل‌سازی میدان مغناطیس ارائه کرد [۲]. در این مدل، مرز مسئله یک کلاه کروی است که قطب آن روی مرکز منطقه مورد مطالعه قرار دارد. بر مبنای این روش، جواب معادله‌ی لاپلاس، با مقادیر مرزی تعریف‌شده بر روی ناحیه‌های به شکل کلاه کروی، قابل‌نمایش به‌صورت بسط به سری هارمونیک‌های کروی از درجه حقیقی و مرتبه صحیح است که به آن‌ها هارمونیک‌های کلاه کروی گفته می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، برخلاف بسط سری هارمونیک‌های کروی با مقادیر مرزی کره که در آن هارمونیک‌های کروی تنها از درجه و مرتبه صحیح ظاهر می‌شوند، در اینجا درجه هارمونیک‌های کروی هر عددی می‌تواند باشد و لذا نمایش ریاضی آن‌ها بر حسب چند جمله‌های لژاندر وابسته نخواهد بود. دی سنتیز در ادامه با اعمال بهبودی در این روش، هارمونیک‌های کلاه کروی اصلاح‌شده را معرفی نمود که در آن با اعمال برخی تکنیک‌های محاسباتی، موجب استفاده از تابع لژاندر با درجه صحیح به‌جای تابع لژاندر با درجه حقیقی گردید که این به‌نوبه خود افزایش دقت و سهولت در محاسبات را به دنبال داشته است. این روش تحت عنوان هارمونیک‌های کلاه کروی اصلاح‌شده (ASCH)^۴ شناخته می‌شود [۳].

در این میان مطالعه‌ی گسترده‌ای در زمینه‌ی مدل‌سازی با استفاده از توابع هارمونیک ASCH انجام‌شده است، به‌عنوان مثال، یونس در سال ۲۰۱۳ از مدل‌های گرانش جهانی برای تولید داده‌های شبکه‌بندی‌شده از میدان گرانش در بخشی از آلمان استفاده کرد که متعاقباً آن‌ها را به یک سیستم

۳ CHAMP (CHALLENGING Mini-satellite Payload)

۴ Adjusted spherical cap harmonics

۱ GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment)

۲ GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer)

مختصات کلاهدک کروی تبدیل کرد. در نتیجه، او از این اندازه‌گیری‌ها برای ایجاد مدلی از میدان گرانش محلی با استفاده از رویکرد ASCH استفاده نمود [۴]. یونس در سال ۲۰۱۵ از مشاهدات بردار گرانش زمینی برای مدل‌سازی نوسانات ژئوئید در آلمان با استفاده از روش ASCH استفاده کرد [۵]. فیضی و رئوفیان نائینی در سال ۲۰۱۷ مدل‌سازی منطقه‌ای داده‌های شبیه‌سازی‌شده‌ی ثقل سنجی هوایی را با استفاده از روش ASCH برای منطقه‌ای واقع در شمال غرب کشور ایران مورد بررسی قرار دادند [۶]. همچنین در سال ۲۰۱۸ فیضی و رئوفیان نائینی با استفاده از مشاهدات گرانی‌سنجی هوایی برداری، مدل‌سازی محلی میدان گرانش را با استفاده از دو دسته تابع ASCH و هارمونیک‌های مستطیلی (RHA) مورد بررسی قرار دادند [۷]. اخیراً فیضی و همکاران در سال ۲۰۲۱ مطالعه مقایسه‌ای بین توابع پایه هارمونیک ASCH و RHA انجام دادند. در این مطالعه، توانایی توابع محلی در مقایسه با مدل‌های جهانی برای بازیابی سیگنال‌های جاذبی با فرکانس بالا مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها در این مطالعه نشان دادند ASCH و RHA تخمین واقع‌بینانه‌ای از چگالی پوسته بالایی نسبت به مدل‌های جهانی ارائه می‌دهند. بعلاوه این دو مدل محلی از منظر همبستگی با داده‌های توپوگرافی منطقه نیز مورد بررسی قرار گرفتند [۸].

علیرغم نتایج عالی که تاکنون از مأموریت گریس در تعیین تغییرات جرم به‌دست‌آمده است، محتوای سیگنال گرانشی در مشاهدات ماهواره‌ای هنوز به‌طور کامل در همه حوزه‌های فرکانسی مورد بهره‌برداری قرار نگرفته است. یکی از دلایل اصلی از دست دادن اطلاعات در داده‌های گرانشی با طول‌موج کوتاه، استفاده از تابع پایه جهانی، یعنی هارمونیک‌های کروی، برای توصیف میدان‌های گرانشی به‌دست‌آمده از داده‌های ماهواره‌ای است. به دلیل عدم توانایی در بهره‌برداری کامل از سیگنال‌های گرانشی به‌ویژه در حوزه‌های فرکانس بالاتر، مدل‌سازی میدان ثقل با استفاده از مشاهدات ماهواره‌ای مانند هارمونیک کروی مؤثر نیست. علاوه بر این، دانشمندان زمین مانند اقیانوس‌شناسان، هیدرولوژیست‌ها و ژئوفیزیکدانان اغلب پدیده‌ها را بر اساس گستره منطقه‌ای خاص مطالعه و تفسیر می‌کنند. در نتیجه، یکی از دغدغه‌های اولیه در میان دانشمندان زمین، دستیابی به تغییرات جرم زمین در یک منطقه خاص از زمین به‌منظور تفسیر و مطالعه بهتر پدیده‌های ژئوفیزیکی بوده است.

تحقیقات متعددی در سال‌های اخیر برای تخمین مدل‌های میدان گرانشی منطقه‌ای با استفاده از مأموریت‌های ویژه ماهواره‌ای انجام شده است که از جمله آن‌ها به تحقیقات زیر اشاره می‌گردد. اشمیت و همکاران از موجک‌های کروی و داده‌های گریس برای ایجاد یک مدل گرانش متغیر زمانی در آمریکای جنوبی استفاده کردند [۹]. اشمیت و همکاران، مطالعات موردی را با استفاده از توابع پایه شعاعی و موجک‌های کروی برای ترکیب مشاهدات ماهواره‌های چمپ و گریس انجام دادند [۱۰]. در سال ۲۰۰۸ هان و سیمونز از میدان ژئوپتانسیل جهانی محلی‌سازی شده برای شناسایی سیگنال گرانش لرزه‌ای از مأموریت داده گریس استفاده کردند [۱۱]. کلیس و همکاران از موجک‌های پواسون برای مدل‌سازی میدان گرانش حاصل از مشاهدات گریس استفاده کردند. در این مطالعه، تعیین پهنای باند تابع پایه و موقعیت آن‌ها بر اساس سیگنال‌های گرانشی ماهواره به‌صورت بهینه انجام گردید [۱۲، ۱۳]. در سال ۲۰۱۲، ویگل و همکاران شکل و مکان توابع پایه شعاعی را به‌منظور تجزیه و تحلیل بهتر برآورد میدان ثقل حاصل از ماهواره گریس با استفاده از داده‌های میدان گرانشی ارزیابی کردند [۱۴]. در سال ۲۰۱۵ بوچا و همکاران مدل‌های میدان گرانش جهانی و منطقه‌ای را بر اساس مدار کینماتیکی گوس ارائه دادند. آن‌ها استراتژی‌هایی را برای کاهش اثر شکاف قطبی (به دلیل عدم پوشش ماهواره‌ای میدان گرانش برای قطبین) با استفاده از توابع پایه RBFs^۲ انجام دادند [۱۵]. در سال ۲۰۱۵ نعیمی و همکاران موضوع بد وضعی مدل‌های میدان گرانش محلی بر اساس توابع پایه شعاعی کروی و دو ماه اطلاعات حاصل از ماهواره گوس را در آفریقا مرکزی و آمازون بررسی کردند [۱۶]. نعیمی و همکاران در سال ۲۰۱۷ از توابع پایه شعاعی برای بررسی سهم مؤلفه‌های گرادیمتر گوس در برآورد بهتر میدان ثقل منطقه‌ای در آمازون و هیمالیا استفاده کردند [۱۷]. پیتوناک و همکاران (۲۰۱۷)، بازیابی منطقه‌ای میدان گرانش را با استفاده از گرادین‌های گرانشی ماهواره‌ای گوس در منطقه اروپای مرکزی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها سپس چندین استراتژی برای بهبود در حل مسائل معکوس و رفتار توابع پایه در لبه‌های منطقه مورد مطالعه (اثرات لبه) ارائه کردند [۱۸].

در این مطالعه بررسی مدل‌سازی میدان ثقل محلی با استفاده از مشاهدات واقعی اختلاف گرانش در امتداد خط دید دو ماهواره LGD^۳ به‌دست‌آمده از ماهواره گریس و

^۳ Line of sight gravity difference

^۲ Rectangular harmonic analysis

^۱ Poisson wavelets radial basis functions

گریس تغییرات فاصله نسبی میان دو ماهواره را توسط سیستم فاصله‌یابی باند K طیف الکترومغناطیس با دقت ۰.۱ میکرومتر بر ثانیه، اندازه‌گیری می‌کنند [۲۰]. در تکنیک فاصله‌یابی فرکانس دوگانه^۲ باند k از ترکیب اندازه‌گیری‌های فاز دو ماهواره به منظور کالیبراسیون و حذف اثرات یونسفری از اندازه‌گیری‌ها در مشاهدات^۳ SST استفاده می‌شود [۲۱]. فاصله نسبی زوج ماهواره گریس به ویژگی‌های میدان گرانش منطقه در حال عبور وابسته است این سیستم از طریق اختلاف فرکانس دریافتی و ارسالی سیگنال‌های رادویی باند K این فاصله را محاسبه می‌نماید [۲۲].

$$\rho = \mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AB} \quad (1)$$

در رابطه‌ی (۱)، ρ فاصله نسبی بین زوج ماهواره است که با استفاده از اختلاف بردارهای موقعیت دو ماهواره (\mathbf{r}_{AB}) به صورت رابطه (۱) ایجاد می‌شود و e_{AB} بردار واحد در امتداد خط دید دو ماهواره A و B می‌باشد. همچنین $\dot{\rho}$ تغییرات فاصله نسبی (سرعت نسبی) دو ماهواره A و B می‌باشد که از طریق مشتق فاصله دو ماهواره مطابق رابطه‌ی (۲) قابل محاسبه است:

$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AB} \quad (2)$$

بردار تغییرات فاصله نسبی دو ماهواره (بردار سرعت نسبی دو ماهواره) $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ ، همان اختلاف بردار سرعت ماهواره اول $\dot{\mathbf{r}}_A$ و دوم $\dot{\mathbf{r}}_B$ است. بردار اختلاف شتاب در امتداد خط دید بین دو ماهواره^۴ LL-SST به صورت رابطه (۳) قابل نمایش می‌باشد [۲۳]:

$$\mathbf{g}_{AB}^{LOS} = \ddot{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(|\dot{\mathbf{r}}_{AB}|^2 - \dot{\rho}^2 \right) \quad (3)$$

۳- مدل‌سازی میدان ثقل به روش ASCH

حل معادله لاپلاس برای مسئله مقدار مرزی روی کلاهک کروی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲۴]:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k(m)+1} \quad (4)$$

بر مبنای توابع پایه هارمونیک محلی ASCH صورت می‌گیرد به طوری که برای صحت سنجی ضرایب هارمونیک محلی به دست آمده از یکسری پروفایل‌های کنترلی استفاده می‌شود. جهت درک رفتار مدل ASCH و توانایی آن در مدل‌سازی سیگنال‌های جاذبی متغیر با زمان، این تابع پایه در درجات متفاوت ارزیابی شده و نتایج آن با مشاهدات LGD حاصل از مدل‌های L2 و مشاهدات واقعی LGD مقایسه می‌شود. مدل ژئوپتانسیل L2 در باند فرکانسی از درجه و مرتبه ۲ تا ۹۶، برآوردی از میدان جاذبه‌ی متوسط زمین را در بازه‌ی زمانی مشخصی، در اینجا ماه ژانویه سال ۲۰۱۹، از اندازه‌گیری‌های مأموریت ماهواره‌ی گریس-فو نمایش می‌دهد. این ضرایب برای بیان فرآیندهای هیدرولوژیکی زمین، یخ و فرآیندهای جامد زمین، بعلاوه فرآیندهای جوی و اقیانوسی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در این تحقیق نشان می‌دهیم که توابع پایه‌ی ASCH هم توانایی مدل‌سازی سیگنال‌های متغیر با زمان و هم توانایی بازیابی سیگنال‌های استاتیکی را دارا بوده و از منظر دقت نسبت به مدل‌های جهانی مانند مدل ماهیانه (L2) و مدل GOCO06s عملکرد بهتری دارد.

در این مقاله در ادامه در بخش ۲ از مشاهدات LGD ماهواره‌های گریس، در بخش ۳ در مورد تئوری هارمونیک کلاه کروی و در بخش ۴ در خصوص چگونگی تشکیل معادله نرمال بر مبنای مشاهدات LGD بحث می‌گردد. همچنین مطالعه عددی بر روی منطقه قطب جنوب و جنوبگان صورت می‌گیرد و سپس صحت سنجی و تأیید مدل ژئوپتانسیل انجام می‌شود. در بخش ۵ یک خلاصه از فرایند کار و نتایج به دست آمده مرور می‌گردد و بیان می‌شود که مدل‌های محلی توانایی بهبود مدل‌های جهانی با استفاده از توابع پایه با محمل محلی را دارند.

۲- مشاهدات LGD

یکی از ویژگی‌های ماهواره گریس اندازه‌گیری تغییرات زمانی میدان ثقل و به طبع آن تغییرات زمانی توزیع جرم در داخل زمین است. توانایی این ماهواره‌ها برای مدل کردن تغییرات زمانی میدان ثقل در درجه اول به سبب ابزار دقیق اندازه‌گیری KBR^۱ است [۱۹]. از این رو ماهواره‌های دوقلو

^۳ Satellite to Satellite Tracking

^۴ Low-Low Satellite to Satellite Tracking

^۱ K-band ranging system

^۲ Dual one-way microwave ranging system

معادله (۱) ظاهر می‌شوند. در این روش، مختصات کلاهدک کروی (θ, λ, r) به یک مختصات نیم‌کره (θ', λ', r') تصویر می‌شود [۳].

$$\theta' = S\theta, \quad \lambda' = \lambda, \quad r' = r \quad (۷)$$

که در رابطه‌ی (۷) ضریب مقیاس S برابر با $\pi/2\theta_0$ می‌باشد. (θ_0) زاویه‌ی کلاهدک کروی است) در نتیجه معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر تغییر داد [۳]:

$$V(r', \theta', \lambda') = \frac{GM}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r'}\right)^{n_k+1} \{C_k^m \cos(m\lambda') + S_k^m \sin(m\lambda')\} P_k^m(\cos\theta') \quad (۸)$$

تابع $P_k^m(\cos\theta')$ لژاندر درجه و مرتبه صحیح است و C_k^m و S_k^m ضرایب ASCH هستند و n_k یک عدد حقیقی است که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$n_k = \sqrt{S^2 k(k+1) + .25} - 0.5 \quad (۹)$$

با در نظر گرفتن روابط (۷)، مؤلفه‌های شتاب گرانشی در سیستم مختصات جدید به صورت زیر بیان می‌گردند [۳].

$$\begin{aligned} g_{\theta'} &= \frac{g_{\theta}}{S}, \\ g_{\lambda'} &= g_{\lambda} \times \frac{\sin(\theta)}{\sin(S\theta)}, \\ g_{r'} &= g_r \end{aligned} \quad (۱۰)$$

که $[g_{\theta'}, g_{\lambda'}, g_{r'}]$ به عنوان مؤلفه‌های بردار شتاب در فریم ASCH و $[g_{\theta}, g_{\lambda}, g_r]$ به عنوان بردارهای شتاب در سیستم مختصات کروی محسوب می‌شوند.

ماهیت تبدیل ASCH بر اساس معادله (۷) و (۱۰) متریک منطقه مرزی را تغییر می‌دهد (به دلیل اعمال ضریب مقیاس). در واقع، با در نظر گرفتن تبدیلات معادله‌ی (۷)، منطقه کلاهدک کروی به یک نیم‌کره تصویر می‌گردد. به این ترتیب، تمام کمیت‌ها تحت نوعی ضریب مقیاس قرار می‌گیرند. برای مؤلفه بردار گرانش، تبدیل به فریم ASCH از طریق معادله (۱۰) به دست می‌آید؛ بنابراین، اگر داده‌ها به صورت بردار گرانشی باشند، ابتدا باید داده‌ها را با استفاده

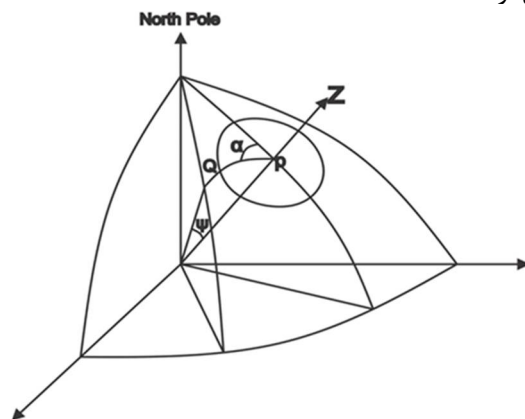
$$\{C_k^m \cos(m\lambda) + S_k^m \sin(m\lambda)\} P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)$$

که در آن $P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)$ تابع لژاندر درجه حقیقی و مرتبه صحیح است. M جرم زمین و G ثابت جاذبه‌ی جهانی و C_k^m و S_k^m ضرایب SCHA هستند و $n_k(m)$ درجه‌ی غیر صحیح تابع هارمونیک کلاه کروی است که با استفاده از شرایط مرزی در محدوده‌ی کلاهدک کروی به دست می‌آید [۲۵]. برای کلاهدک کروی واقع در یک ناحیه‌ی دلخواه از سطح زمین که لزوماً در ناحیه قطب قرار ندارد، سیستم مختصات جدید با موقعیت قطب جدید (مرکز منطقه) تعریف می‌گردد که نصف‌النهار اصلی به طور هم‌زمان از قطب شمال اصلی، قطب جدید و قطب جنوب به وجود می‌آید $[\lambda]$ (شکل ۱). در این سیستم مختصات جدید خواهیم داشت:

$$\cos(\psi) = \cos(\theta_p) \cos(\theta) + \sin(\theta_p) \sin(\theta) \cos(\lambda - \lambda_p) \quad (۵)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\theta) \sin(\lambda - \lambda_p)}{\sin(\lambda_p) \cos(\theta) - \cos(\theta_p) \sin(\theta) \cos(\lambda - \lambda_p)} \quad (۶)$$

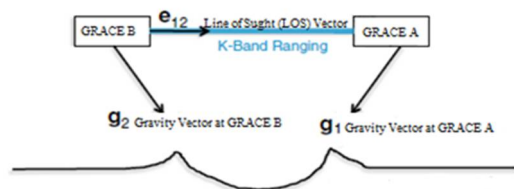
در معادله (۵) و (۶) θ_p و λ_p طول و عرض جغرافیایی قطب جدید کلاهدک کروی است و θ و λ طول و عرض جغرافیایی نقطه دلخواه است که به وسیله‌ی روابط فوق از سیستم مختصات ژئوسنتریک به سیستم مختصات کلاه کروی با پارامترهای فاصله کروی ψ و آزیموت α تبدیل می‌گردد.



شکل ۱- رابطه‌ی بین سیستم مختصات ژئوسنتریک و سیستم مختصات کلاه کروی [۲۴].

در سال ۱۹۹۲ دی سنتیز یک اصلاحی را در روش هینز SCHA پیشنهاد داد که به موجب آن توابع لژاندر با درجه و مرتبه صحیح به جای توابع لژاندر با درجه غیر صحیح در

که r_1 و r_2 بیانگر موقعیت بردارهای ماهواره‌های گریس-فو می‌باشد و " در رابطه (۱۱) بیانگر ضرب داخلی است (شکل ۲).



شکل ۲- یک توصیف شماتیک از تفاوت گرانشی LOS بین دو ماهواره گریس [۲۸].

تصویر کردن کمیت مشاهداتی LGD روی کلاه کروی اصلاح شده به سهولت تصویر کردن داده‌های بردار گرانش به روی کلاه کروی اصلاح شده نیست، درواقع، رابطه‌ی بین LGD و تصویر آن بر کلاه کروی اصلاح شده یک رابطه‌ی مستقیم نیست و نیاز به استفاده از یک روش نوین برای برقراری این ارتباط می‌باشد. برای غلبه بر این مشکل، ما یک رویکرد غیرمستقیم برای تبدیل LGD به فریم ASCH و استفاده از آن برای حل معادلات پیشنهاد می‌کنیم. برای این منظور از مدل‌های ماهیانه گریس مانند GRACE-FO Level-2 Monthly Geopotential Spherical Harmonics JPL Release 6.0 که به اختصار آن را با L2 نمایش می‌دهیم برای محاسبه LGD شبیه‌سازی شده و تصویر آن به فریم ASCH استفاده می‌شود. بدین صورت که ابتدا مؤلفه‌های بردار گرانش از مدل L2 تعیین می‌گردند و سپس این مؤلفه‌های برداری از طریق معادله‌ی (۱۰) به فریم ASCH تبدیل شده و با استفاده از آن‌ها، کمیت LGD در سیستم ASCH تعیین می‌گردد (LGD_{sim}^{ASCH}). از طرفی، به کمک مدل‌های L2 و بدون اعمال نگاهت رابطه (۱۰)، می‌توان کمیت LGD را قبل از انتقال به سیستم ASCH نیز محاسبه کرد (LGD_{sim}). بر این اساس، می‌توان یک ضریب مقیاس برای تبدیل داده‌های LGD تعریف نمود و از آن برای انتقال مشاهدات LGD واقعی نیز استفاده کرد. این ضریب مقیاس به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$S_{LGD} = \frac{LGD_{sim}^{ASCH}}{LGD_{sim}} \quad (13)$$

از معادله (۱۰) به مختصات ASCH تبدیل کرد و سپس آن‌ها را در معادله نرمال برای تعیین ضرایب هارمونیک استفاده نمود [۸].

۴- ماهواره ثقل‌سنجی گریس و گریس-فو و مشاهدات LGD

ماهواره‌های گریس در سال ۲۰۰۲ با مدار تقریباً قطبی باهدف مدل‌سازی دقیق میدان گرانش زمین و تغییرات زمانی آن به فضا پرتاب شدند. مأموریت گریس شامل دو ماهواره با ارتفاع مداری ۵۰۰ کیلومتر است که بافاصله ۲۰۰ کیلومتر به صورت پشت سر هم در یک صفحه حرکت می‌کنند. این ماهواره‌ها مجهز به سیستم KBR هستند. تکنیک LL-SST به کاررفته در ماهواره‌های گریس تغییرات فاصله بین دو ماهواره را به صورت پیوسته و با دقت چند میکرون ردیابی می‌کند. گیرنده‌های GPS نصب شده در هر ماهواره برای تعیین مدار ماهواره‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. علاوه شتاب‌های غیر جاذبی به واسطه شتاب سنج نصب شده بر روی هر ماهواره اندازه‌گیری می‌شود [۲۶]. گریس-فو^۱ مجهز به تداخل‌سنج لیزری LRI^۲ است. این سیستم تغییرات فاصله‌ی بین ماهواره‌ی را بسیار دقیق‌تر از سیستم ماکروویو گریس اندازه‌گیری می‌کند. مشاهدات تغییرات فاصله بین دو ماهواره در امکان اندازه‌گیری اختلاف بردار شتاب ثقل بین دو ماهواره در امتداد خط دید ماهواره را فراهم می‌کند [۲۳]. کمیت LGD را می‌توان برحسب اختلاف شتاب بین دو ماهواره به صورت زیر تعریف نمود [۲۷].

$$LGD = \delta g_{12}^{LOS} = (g_2^{ECEF} - g_1^{ECEF}) \cdot e_{12}^{LOS} \quad (11)$$

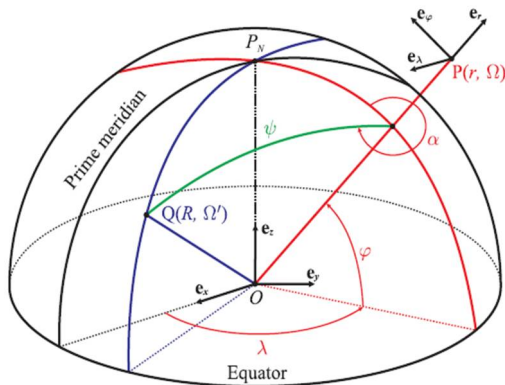
که g_1^{ECEF} و g_2^{ECEF} بردارهای جاذبی در سیستم مختصات زمین چسب زمین مرکز (ECEF)^۳ به دست آمده از ماهواره‌های گریس ۱ و ۲ می‌باشد، e_{12}^{LOS} هم بردار واحد در امتداد خط دید دو ماهواره (LOS)^۴ در سیستم مختصات ECEF می‌باشد و به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر بیان می‌گردد:

$$e_{12}^{LOS} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} \quad (12)$$

۳ Earth-Centered Earth-Fixed
۴ Line of Sight

۱ GRACE Follow on
۲ Laser Ranging Interferometric

شکل (۳) ارتباط بین بردارهای پایه در دو سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۳- رابطه‌ی بین بردار پایه در سیستم مختصات کلاهک کروی و بردار پایه در مختصات کارتزین زمین-چسب [۲۸].

علاوه بر این، بردار یکه در امتداد LOS در سیستم مختصات کلاهک کروی اصلاح‌شده با معادله‌ی زیر بیان می‌گردد:

$$b_{ASCH} = b_{\theta'} e_{\theta'} + b_{\lambda'} e_{\lambda'} + b_{r'} e_{r'} \quad (17)$$

مؤلفه‌های $(b_{\theta'}, b_{\lambda'}, b_{r'})$ با جایگزین کردن $b_{\mu} \rightarrow e_{\mu}, \mu \in \{r', \theta', \lambda'\}$ و $b_i \rightarrow e_i, i \in \{x, y, z\}$ مطابق رابطه‌ی (۱۶) قابل بیان است. با در نظر گرفتن معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) و تعریف LGD طبق رابطه (۱۱)، خواهیم داشت [۲۸]:

$$LGD = g_{12}^{LOS-ASCH} = \delta[\nabla V] \cdot b_{ASCH} = \delta \left[\frac{\partial V}{\partial r'} b_{r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial V}{\partial \theta'} b_{\theta'} + \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial V}{\partial \lambda'} b_{\lambda'} \right] \quad (18)$$

که δ نشان‌دهنده تفاوت بین یک تابع در دو مکان متمایز $(\theta'_1, \lambda'_1, r'_1)$ و $(\theta'_2, \lambda'_2, r'_2)$ می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۱۸) و رابطه‌ی (۱۵) که مشتقات پتانسیل را برحسب ضرایب هارمونیک بیان می‌کند، می‌توان ارتباط بین مشاهدات LGD و ضرایب هارمونیک را به‌صورت معادله زیر بیان نمود:

$$\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (19)$$

که در آن \mathbf{A} ماتریس طراحی، \mathbf{v} بردار خطاهای تصادفی مشاهدات، \mathbf{I} بردار مشاهدات (داده‌های LGD) و \mathbf{x} بردار پارامترهای مجهول است (ضرایب هارمونیک). با استفاده از

در معادله بالا، LGD_{sim}^{ASCH} مقیاس داده‌شده در فریم ASCH و LGD_{sim} داده‌های LGD غیر مقیاس شده و S_{LGD} ضریب مقیاسی است که LGD را به فریم ASCH تصویر می‌کند. با در نظر گرفتن معادله (۱۳)، برای مشاهدات واقعی LGD خواهیم داشت

$$LGD^{Scaled} = S_{LGD} \times LGD \quad (14)$$

که در رابطه فوق LGD ، مقدار واقعی این کمیت در سیستم مختصات تصویر نشده (مشاهدات واقعی LGD) و LGD^{Scaled} مقدار این کمیت در سیستم مختصات ASCH می‌باشد.

۴-۱- تشکیل معادله نرمال بر اساس مشاهدات LGD و تابع هارمونیک ASCH

بردار جاذبه بر اساس سیستم مختصات کلاهک کروی اصلاح‌شده با معادله‌ی زیر ارائه می‌شود [۸]:

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} g_{\theta'} \\ g_{\lambda'} \\ g_{r'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(r', \theta', \lambda')}{r' \partial \theta'} \\ \frac{\partial V(r', \theta', \lambda')}{r' \sin \theta' \partial \lambda'} \\ \frac{\partial V(r', \theta', \lambda')}{\partial r'} \end{bmatrix} = \frac{GM}{R^2} \times \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{K_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r'}\right)^{n_k+2} \{C_k^m \cos(m \lambda') + S_k^m \sin(m \lambda')\} \\ \frac{\partial P_{km}(\cos \theta')}{\partial \theta'} \\ \frac{1}{\sin \theta'} \sum_{k=0}^{K_{max}} \sum_{m=0}^k m \left(\frac{R}{r'}\right)^{n_k+2} \{S_k^m \cos(m \lambda') - C_k^m \sin(m \lambda')\} \\ P_{km}(\cos \theta') \\ \sum_{k=0}^{K_{max}} \sum_{m=0}^k -(n_k+1) \left(\frac{R}{r'}\right)^{n_k+2} \{C_k^m \cos(m \lambda') + S_k^m \sin(m \lambda')\} \\ P_{km}(\cos \theta') \end{bmatrix} \quad (15)$$

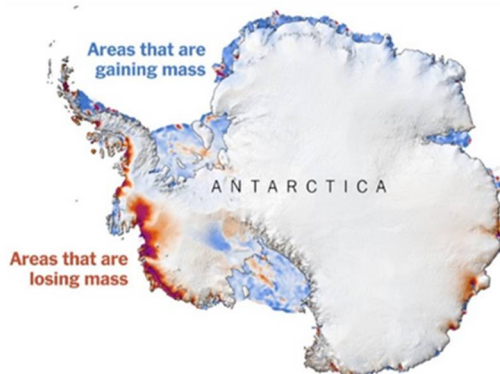
در رابطه‌ی (۱۲) K_{max} بیانگر ماکزیمم درجه در بسط به هارمونیک‌های کروی است. بردارهای پایه $(e_{\theta'}, e_{\lambda'}, e_{r'})$ در سیستم مختصات کلاهک کروی با استفاده از رابطه زیر به بردارهای پایه در سیستم مختصات ECEF (e_x, e_y, e_z) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} e_{r'} &= \sin \theta' \cos \lambda' e_x + \sin \theta' \sin \lambda' e_y + \cos \theta' e_z \\ e_{\theta'} &= -\cos \theta' \cos \lambda' e_x - \cos \theta' \sin \lambda' e_y + \sin \theta' e_z \\ e_{\lambda'} &= \sin \lambda' e_x - \cos \lambda' e_y \end{aligned} \quad (16)$$

حل معادله‌ی فوق به روش کمترین مربعات، مجهولات که همان ضرایب ژئوپتانسیل می‌باشند، محاسبه می‌گردد.

۵- مطالعه موردی، مدل‌سازی میدان ثقل در منطقه قطب جنوب

در این بخش، مدل‌سازی میدان گرانشی بر روی قطب جنوب زمین به‌عنوان یک مطالعه‌ی موردی مورد بحث قرار گرفته است. منطقه مورد مطالعه بین ۶۰- تا ۹۰- درجه عرض جغرافیایی و ۱۸۰- تا ۱۸۰+ درجه طول جغرافیایی در نظر گرفته شده است. (همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده می‌شود) سیستم مختصات محلی مورد استفاده در این مطالعه، سیستم مختصات کلاهک کروی است که دارای شعاع کلاهک ۳۰ ($\theta_0 = 30$) درجه و مختصات مرکز سیستم مختصات کلاهک کروی برابر با ۹۰- درجه عرض جغرافیایی و ۰ درجه طول جغرافیایی می‌باشد. در سیستم مختصات مورد استفاده یعنی سیستم مختصات کلاهک کروی، موقعیت مرکز و شعاع کلاهک کروی به‌گونه‌ای انتخاب شده که به‌طور کامل منطقه جنوبگان را احاطه می‌کند.

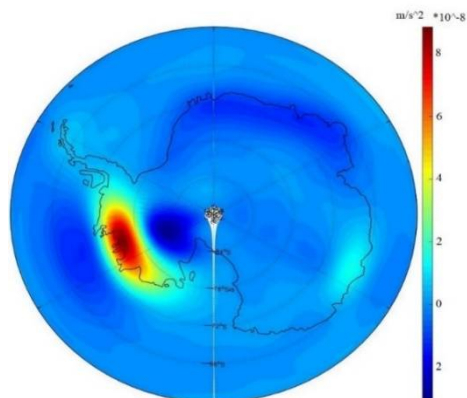


شکل ۴- منطقه مورد مطالعه [۲۹].

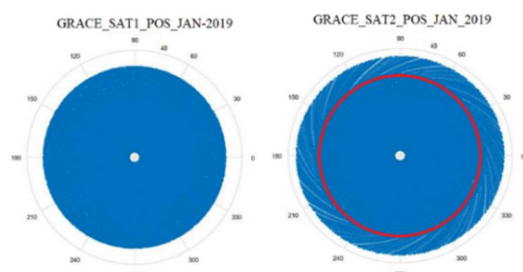
شکل (۵) تغییرات کمیت LGD حاصل از مشاهدات گریس را در منطقه‌ی جنوبگان نشان می‌دهد. همچنین، جهت درک بهتر موقعیت قرارگیری ماهواره‌های GRACE1 و GRACE2، موقعیت ماهواره‌ها در شکل (۶) بر اساس اندکس و زمان لحظه‌ای هر ماهواره نمایش داده شده است.

در مدل‌سازی گرانش محلی، یکی از مشکلات، رفتار تابع پایه گرانش محلی در نزدیکی مرز منطقه‌ی مورد مطالعه است، زیرا هیچ اطلاعاتی در مورد میدان‌های پتانسیل ثقل فراتر از منطقه مورد مطالعه وجود ندارد، لذا با افزودن داده‌های گرانشی گرید بندی شده فراتر از مناطق مورد مطالعه و در

ارتفاع برون‌یابی مکان ماهواره‌ها، عملکردهای توابع پایه در مرز بهتر محدود می‌شوند و اثر لبه‌ای کاهش می‌یابد [۲۳].

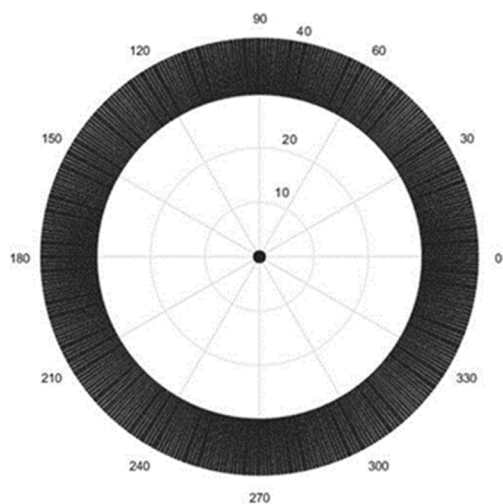


شکل ۵- تغییرات LGD پرفراز منطقه‌ی جنوبگان (شعاع کلاهک کروی برابر با ۳۰ درجه روی قطب جنوب).



شکل ۶- موقعیت هر دو ماهواره با اندکس (زمان) برابر.

از آنجایی که داده‌های LGD را نمی‌توان به‌عنوان داده‌های شبیه‌سازی شده روی گرید منظم تعریف کرد، در اینجا، مؤلفه‌ی شعاعی گرانش در فراتر از منطقه مورد مطالعه به‌صورت گرید منظم تولید شده و از آن جهت کنترل خطای لبه‌ای استفاده می‌کنیم [۸] (شکل ۷).



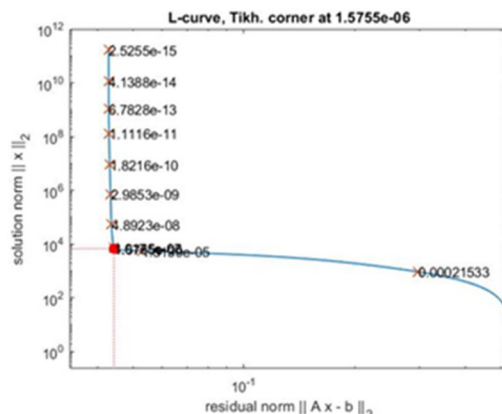
شکل ۷- موقعیت داده‌های شبکه‌بندی شده فراتر از مرز.

۵-۱- مدل‌سازی محلی میدان ثقل برمبنای توابع هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده ASCH بر روی منطقه جنوبگان

در این بخش، ابتدا فاکتور مقیاس برای انتقال مشاهدات گرانشی LGD محاسبه و با اعمال ضرایب مقیاس محاسبه‌شده به داده‌های واقعی LGD، مشاهدات در فریم ASCH به دست می‌آیند، سپس با محاسبه‌ی ماتریس ضرایب از طریق رابطه‌ی (۱۸) و تشکیل معادله نرمال، ضرایب ژئوپتانسیل حاصل از توابع هارمونیک ASCH با استفاده از روش‌های حل مسائل معکوس و پایدارسازی به دست می‌آیند. در این تحقیق، روش پایدارسازی تیخونوف مورد استفاده قرار گرفته است. روش تیخونوف را در حالت کلی می‌توان در قالب مینیمم‌سازی تابع تیخونوف به صورت زیر تعریف نمود:

$$F_{Tikhonov}(x; \alpha) = \min(\|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2) \quad (20)$$

در رابطه‌ی (۲۰)، پارامتر پایدارسازی است. این پارامتر برای تنظیم وزن دهی به بردار مجهولات $\|x\|_2^2$ متناسب با حداقل نرم باقی‌مانده‌ها $\|Ax - b\|_2^2$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش ال^۱ برای انتخاب پارامتر پایدارسازی روش مناسبی است زیرا گوشه نمودار ال با بیشترین انحنا، تعادل بین بایاس و واریانس جواب را برقرار می‌کند و بیانگر این ویژگی است که نرم بردار باقیمانده‌ها و نرم بردار جواب به صورت بهینه‌ای مینیمم می‌گردد.



شکل ۸- پارامتر پایدارسازی α مقدار $1.5755e-06$ را در گوشه‌ی منحنی ال نشان می‌دهد.

برای ارزیابی ضرایب ژئوپتانسیل محلی، تابع پایه هارمونیک منطقه‌ای توسط پروفایل‌های کنترل داده‌های LGD ارزیابی می‌شوند. به این صورت که با ضرایب به دست آمده یک مدلی از LGD ایجاد می‌کنیم و بعد با LGDهای محاسبه‌شده در نقاط کنترل مقایسه می‌کنیم. در واقع طی دو مرحله یک‌بار با residualها (مقادیر \hat{V}) و یک‌بار با نقاط کنترلی ارزیابی انجام می‌شود. اگر residualها کوچک شوند، یعنی مدل سرشکنی درست عمل کرده است ولی اگر در مقایسه با نقاط کنترل انطباق خوبی نداشته باشد باید روش پایدارسازی را تغییر دهیم یا نیاز هست تا درجه K را افزایش دهیم.

این پروفایل‌های کنترلی حاوی داده‌های LGD هستند که در مسئله معکوس استفاده نمی‌شوند و در سراسر منطقه‌ی جنوبگان پوشش خوبی دارند (شکل ۹). به منظور نشان دادن عملکرد بهتر توابع پایه محلی در مدل‌سازی LGD، دقت مدل ASCH با دقت مدل ماهیانه گریس نیز مقایسه شده است (شکل ۱۰) در پروفایل آمده در شکل (۱۰)، تایم ایندکس براساس تعداد نقاط مورد محاسبه به محور X ها اختصاص داده می‌شود.

۲۱۸۵۸۳ نقطه شامل موقعیت ماهواره‌های گریس و کمیت‌های اسکالر LGD جمع‌آوری شده است که ۱۲۰۰ عدد از این مشاهدات به عنوان نقاط کنترل میانی و لبه‌ای در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر RMSE که در اینجا ارائه شده مربوط به ۶۰۰ نقطه کنترلی میانی می‌باشد. در جدول ۱، مقدار RMSE و MEAN اختلاف بین داده‌های LGD واقعی، مدل ASCH و مدل L2 مطابق روابط (۲۱) و (۲۲) نشان داده شده است.

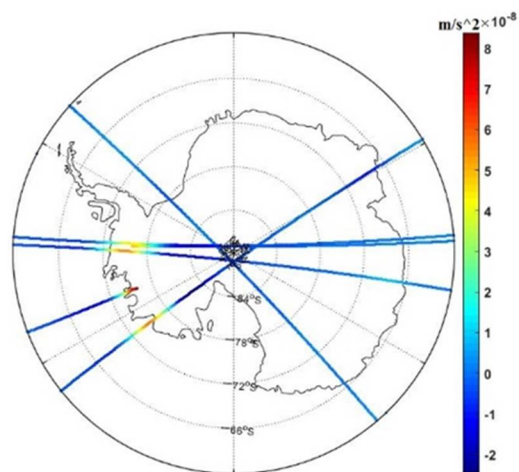
$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (LGD^{computed} - LGD^{observation})^2}{N}} \quad (21)$$

$$MEAN = \frac{\sum_{i=1}^N |LGD^{computed} - LGD^{observation}|}{N} \quad (22)$$

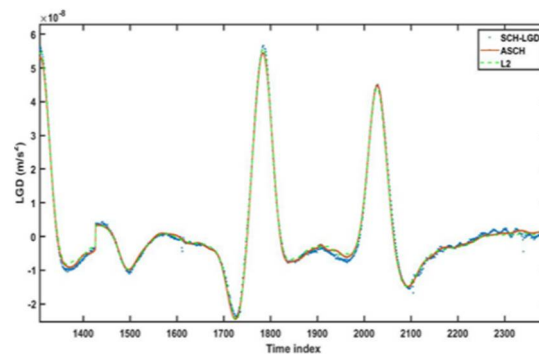
در رابطه بالا N بیانگر تعداد معادلات است.

با مقایسه نتایج حاصل از مدل محلی ASCH با نتایج حاصل از مدل جهانی ملاحظه می‌گردد مدل محلی علاوه بر اینکه می‌تواند در مطالعه‌ی منطقه‌ای خاص برای مثال

منطقه‌ی جنوبگان مفید باشد، می‌تواند جزئیات بیشتری از تغییرات میدان ثقل در مطالعات ماهواره‌ای ارائه کند.



شکل ۹- پروفایل‌های کنترلی.



شکل ۱۰- مقایسه LGD مدل ۱- ASCH (خط قرمز)، ۲- GRACE-FO Level-2 (خط سبز) برای Capsize=30.

جدول ۱. مقدار RMSE و MEAN LGD به دست آمده از مدل ASCH GRACE-FO Level-2 در پروفایل کنترلی.

METHOD	RMSE	MEAN	K_{max}
ASCH	$9.7039e-10$	$7.0705e-10$	۲۰
L2	$6.3598e-09$	$-2.9193e-10$	۵۰

در خصوص تحلیل بیشتر رابطه (۱۴) مطابق آنچه در جداول ۲ و ۳ آمده، مقایسه‌ای میان مقادیر LGD محاسباتی و مشاهداتی در دو حالت مقیاس داده شده و بدون مقیاس در روش مدل سازی ASCH در نقاط کنترلی آورده شده است.

جدول ۲. مقدار RMSE و MEAN به دست آمده از مدل ASCH در نقاط کنترلی در حالت مقیاس داده شده

نقاط کنترل (mgal)		درجه (K_{max})
MEAN	RMSE	
$2.0723e-04$	$3.4928e-04$	۱۰
$7.0705e-05$	$9.7039e-05$	۲۰
$6.6938e-05$	$9.5705e-05$	۳۰
$6.1996e-05$	$9.1688e-05$	۴۰

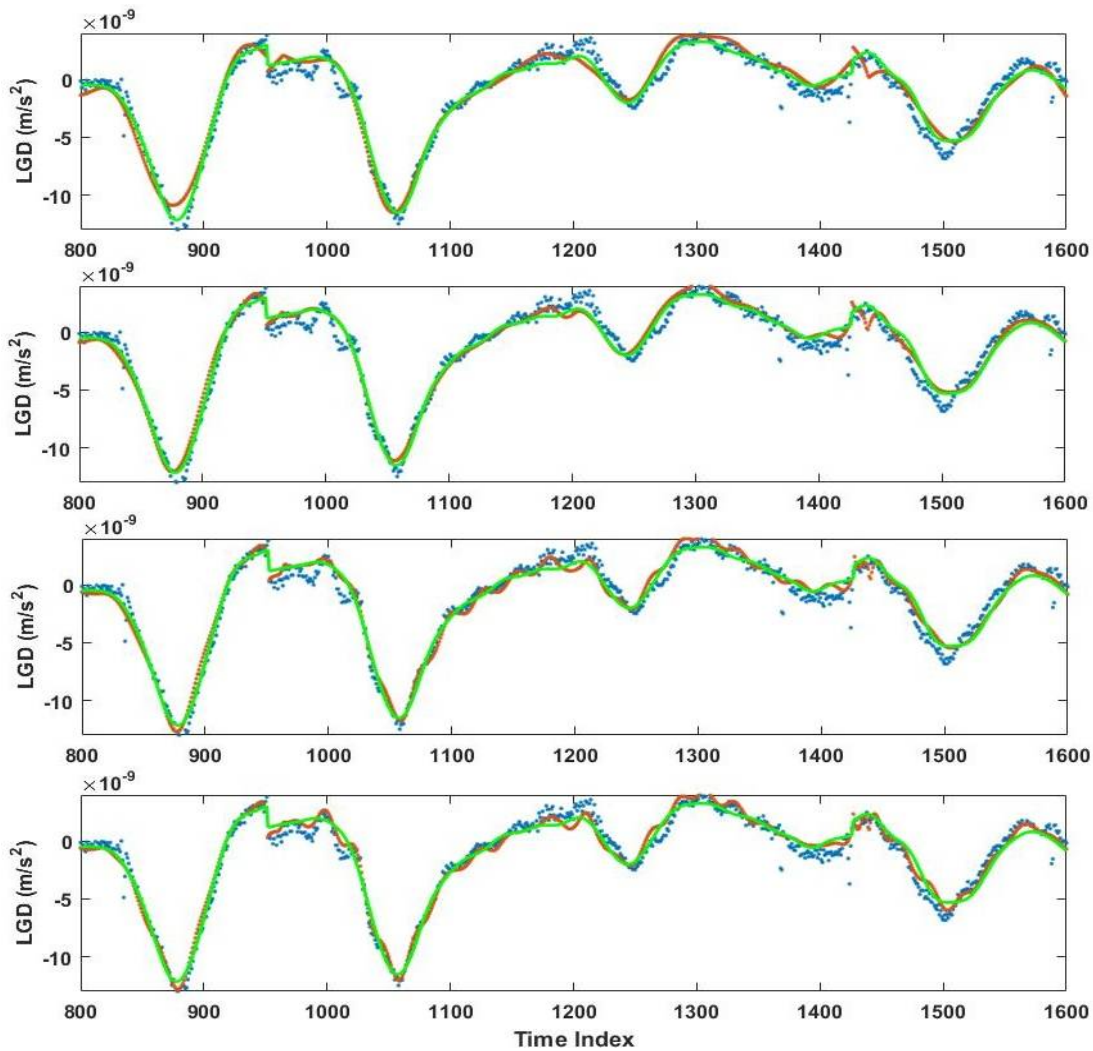
جدول ۳. مقدار RMSE و MEAN به دست آمده از مدل ASCH در نقاط کنترلی در حالت بدون مقیاس

نقاط کنترل (mgal)		درجه (K_{max})
MEAN	RMSE	
$4.5443e-04$	$8.0846e-04$	۱۰
$3.8007e-04$	$6.3063e-04$	۲۰
$2.4189e-04$	$3.6865e-04$	۳۰
$1.5603e-04$	$2.1823e-04$	۴۰

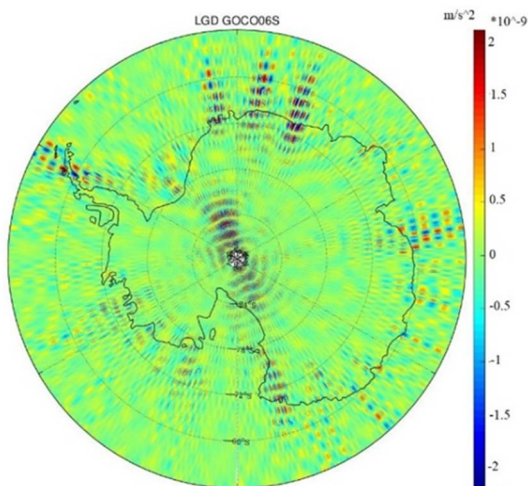
بر اساس نتایجی که از آنالیزهای عددی به دست آمده، مدل محلی کلاه کروی اصلاح شده در حالت اعمال ضریب با استفاده از روش مطرح شده، با RMSE برابر ۱ نانومتر بر مجذور ثابته، رزولوشن مکانی بهتری را نسبت به روش ASCH بدون اعمال مقیاس، با RMSE برابر با ۶ نانومتر بر مجذور ثابته ارائه می‌دهد. لذا، روش استفاده از مقیاس در ASCH باعث بهبود دقت برازش میدان ثقل منطقه‌ای می‌گردد.

در ادامه مدل ژئوپتانسیل محلی در بعد تخمین سیگنال‌های جاذبی مرتبط با زمان (سیگنال‌های با فرکانس کمتر) و همچنین در بعد تخمین سیگنال‌های جاذبی استاتیک (سیگنال‌های با فرکانس بالاتر) بررسی می‌شود. در ابتدا بررسی و ارزیابی مدل ژئوپتانسیل محلی را در قسمت فرکانس پایین برای درجات ۲۰، ۳۰، ۴۰ و نهایتاً برای درجه‌ی $K_{max} = 50$ انجام می‌دهیم و نتایج حاصل شده را با مدل جهانی مقایسه می‌کنیم (شکل ۱۱).

از مقایسه‌ی نتایج شکل (۱۱) ملاحظه می‌گردد که مدل محلی ASCH به خوبی در همه‌ی درجه‌های هارمونیک توانسته نسبت به مدل L2 دقت و رزولوشن مکانی بهتری را ارائه نماید؛



شکل ۱۱- مقایسه نتایج بدست‌آمده از مدل ASCH (رنگ قرمز) و مدل L2 (رنگ سبز) و مشاهدات LGD (رنگ آبی) برای درجات مختلف مدل هارمونیک محلی ASCH از بالا به پایین ۱- $K_{MAX}=20$ ۲- $K_{MAX}=30$ ۳- $K_{MAX}=40$ ۴- $K_{MAX}=50$



شکل ۸- مشاهدات LGD به‌دست‌آمده از مدل GOCO06s.

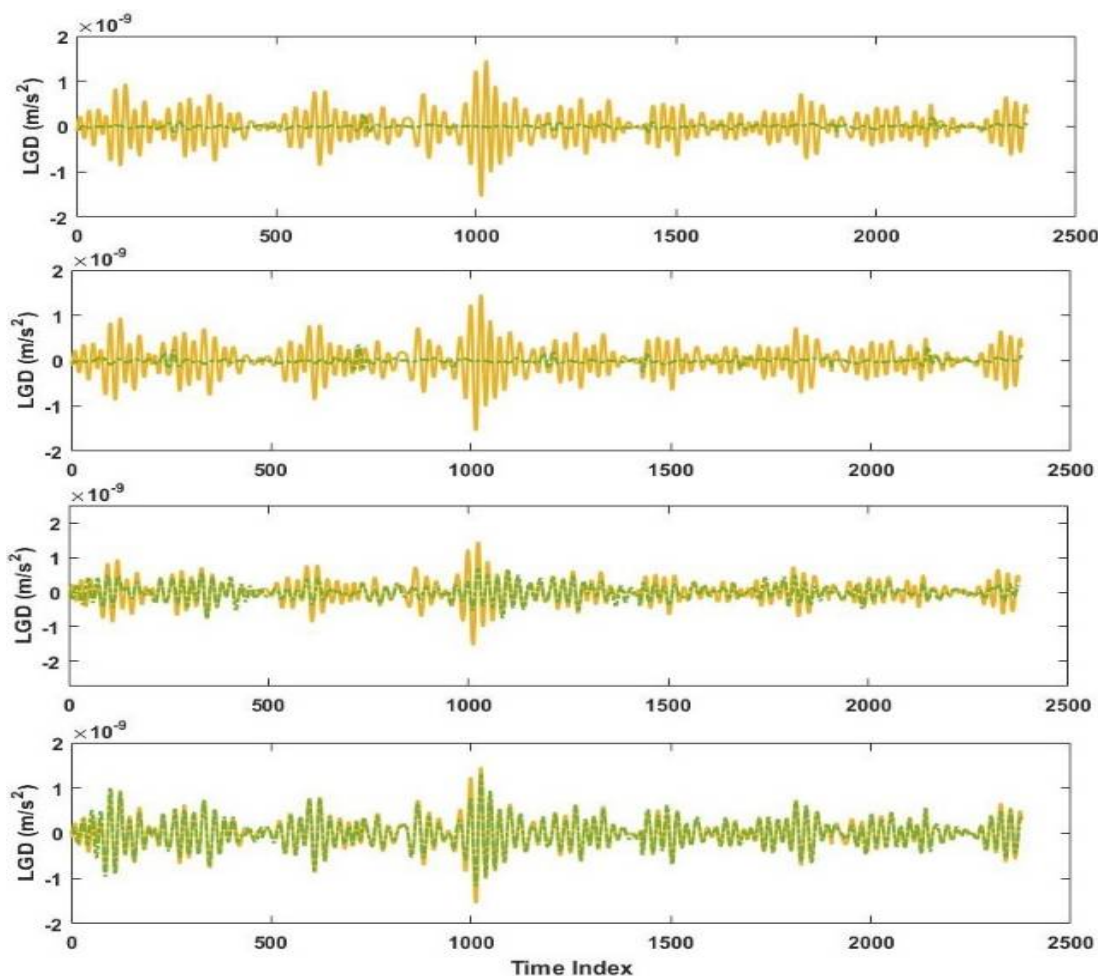
درواقع شکل (۱۱) نشان می‌دهد که مدل ASCH می‌تواند بخش طول موج بلند میدان جاذبه را با دقت مکانی بالا مدل‌سازی نماید. این مسئله با مقایسه رفتار LGD حاصل از مدل L2 با LGD حاصل از ASCH مشخص می‌شود. در طول موج‌های بلند مشاهدات LGD که عموماً شامل سیگنال‌های جاذبی متغیر با زمان است [۲۳]، عملکرد ASCH به نسبت L2 بهتر است. از طرفی، شکل (۱۰) نشان می‌دهد که در فرکانس‌های بالاتر که تغییرات LGD شدیدتر است، مدل L2 قادر به مدل‌سازی رفتار LGD نبوده اما مدل ASCH این تغییرات فرکانسی بالاتر را نیز مدل کرده است. تغییرات فرکانسی بالا در مشاهدات LGD دربرگیرنده سیگنال‌های استاتیکی می‌باشد [۲۳] و این نشان می‌دهد که روش ASCH در این باند فرکانسی نیز عملکرد قابل قبولی داشته است.

گرانشی، از مدل ژئوپتانسیل GOCO06s استفاده می‌شود؛ برای این منظور با استفاده از مدل GOCO06s و در باند فرکانسی از درجه و مرتبه‌ی ۹۷ تا درجه‌ی ۳۰۰ کمیت روی موقعیت لحظه‌ای ماهواره‌های گریس در ماه ژانویه محاسبه می‌گردد (شکل ۱۲).

سپس مشاهدات شبیه‌سازی شده برای تولید مدل ASCH با K_{max} مختلف استفاده شده و نتایج روی پروفایل‌های کنترلی مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند (شکل ۱۳).

به‌منظور آنالیز بیشتر و برای آنکه نشان دهیم مدل ASCH توانایی مدل‌سازی فرکانس‌های بالا و سیگنال‌های استاتیکی را دارا می‌باشد، از مدل GOCO06s استفاده می‌کنیم.

مدل GOCO06s به جهت جمع‌آوری داده در مدت ۱۵ سال با استفاده از مشاهدات ماهواره‌های گرانی سنجی به‌عنوان مدل ژئوپتانسیل استاتیک با دقت مکانی و فرکانسی بالا مطرح می‌شود، به همین دلیل در ادامه، جهت ارزیابی مدل محلی ASCH در حوزه‌ی فرکانسی بالاتر میدان



شکل ۹- مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از مدل ASCH (رنگ سبز) و مدل GOCO06s (رنگ زرد) برای درجات مختلف مدل هارمونیک محلی ASCH از بالا به پایین ۱- $K_{MAX}=20$ ۲- $K_{MAX}=30$ ۳- $K_{MAX}=40$ ۴- $K_{MAX}=50$

رزولوشن مکانی و فرکانسی را فراهم می‌نماید و می‌تواند منجر به تحلیل دقیق‌تر پدیده‌های محیط زیستی گردد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه مدل‌سازی میدان گرانش محلی با استفاده از مشاهدات LGD ماهواره گریس و توابع ASCH بر روی

با تحلیل اشکال (۱۱) و (۱۳) می‌توان دریافت که مدل هارمونیک محلی ASCH هم توانایی برآورد سیگنال‌های متغییر بازمان (فرکانس پایین) موجود در مدل‌های L2 را دارد و هم توانایی برآورد سیگنال‌های استاتیک (فرکانس بالا) که در مدل‌های GOCO06s وجود دارد را داراست؛ این مسئله امکان بهبود رزولوشن مدل‌های متغییر با زمان از بعد

منطقه مورد مطالعه به کمک مدل‌های جهانی تولید شده، و ناپایداری مسئله در نواحی مرزی با این ترفند بهبود می‌یابد. برای ارزیابی مدل ژئوپتانسیل محلی از پروفایل‌های کنترلی داده‌های LGD استفاده کرده‌ایم. این داده‌ها در تعیین ضرایب ژئوپتانسیل و مدل‌سازی محلی استفاده نمی‌شوند. همچنین، به کمک آنالیزهای عددی متفاوت نشان دادیم که مدل ASCH توانایی بازیابی سیگنال‌های جاذبی از باندهای فرکانسی مختلف را دارا می‌باشد.

قطب جنوب انجام شده است. استفاده از مشاهدات LGD به منظور مدل‌سازی محلی با استفاده از توابع پایه ASCH یکی از نوآوری‌های این تحقیق است. از طرفی در این تحقیق ایده‌ای برای تبدیل مشاهدات LGD به سیستم مختصات ASCH نیز ارائه شده است. پس از تشکیل معادلات مشاهدات، ضرایب ژئوپتانسیل با استفاده از روش کمترین مربعات و پایداری‌سازی به دست می‌آیند. به منظور کاهش خطای لبه‌ای در مدل‌سازی محلی، داده‌های گرانشی شبکه‌بندی شده در خارج از مرز

مراجع

- [1] Thébault, E., J. Schott, and M. Manda, *Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2006. **111**(B1).
- [2] Haines, G., *Magsat vertical field anomalies above 40° N from spherical cap harmonic analysis*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1985. **90**(B3): p. 2593-2598.
- [3] De Santis, A., *Conventional spherical harmonic analysis for regional modelling of the geomagnetic field*. Geophysical research letters, 1992. **19**(10): p. 1067-5.
- [4] Younis, G., *Regional gravity field modeling with adjusted spherical cap harmonics in an integrated approach*. 2013: TUprints-TU Darmstadt publication service.
- [5] Younis, G., *Local earth gravity/potential modeling using ASCH*. Arabian Journal of Geosciences, 2015. **8**(10): p. 8681-8685.
- [6] Raoofian Naeeni, M. and M. Feizi, *Regional Gravity Field Modelling using Adjusted Spherical Cap Harmonic Analysis*. Journal of Geomatics Science and Technology, 2017. **7**(1): p. 115-124.
- [7] Feizi, M. and M. Raoofian Naeeni, *Local gravity field modeling using basis functions of harmonic nature and vector airborne Gravimetry, Case Study: Gravity field modeling over north-east of Tanzania region*. Journal of the Earth and Space Physics, 2018. **44**(3): p. 523-534.
- [8] Feizi, M., M. Raoofian-Naeeni, and S.-C. Han, *Comparison of spherical cap and rectangular harmonic analysis of airborne vector gravity data for high-resolution (1.5 km) local geopotential field models over Tanzania*. Geophysical Journal International, 2021. **227**: (3) p. 1465-1479.
- [9] Schmidt, M., et al., *Regional high-resolution spatiotemporal gravity modeling from GRACE data using spherical wavelets*. Geophysical Research Letters, 2006. **33**: (8)
- [10] Schmidt, M., et al., *Regional gravity modeling in terms of spherical base functions*. Journal of Geodesy, 2007. **81**(1): p. 17-38.
- [11] Han, S.C. and F.J. Simons, *Spatiospectral localization of global geopotential fields from the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) reveals the coseismic gravity change owing to the 2004 Sumatra-Andaman earthquake*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2008. **113**(B1).
- [12] Klees, R., et al., *A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions*. Journal of Geodesy, 2008. **82**(8): p. 457. ۴۷۱ -
- [13] Wittwer, T. *Regional gravity field modelling with radial basis functions*. in *PUBLICATIONS ON GEODESY 72*. 2009. Citeseer.
- [14] Weigelt, M., W. Keller, and M. Antoni. *On the comparison of radial base functions and single layer density representations in local gravity field modelling from simulated satellite observations*. in *VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*. 2012. Springer.
- [15] Bucha, B., et al., *Global and regional gravity field determination from GOCE kinematic orbit by means of spherical radial basis functions*. Surveys in Geophysics, 2015. **36**(6): p. 773-801.

- [16] Naeimi, M., J. Flury, and P. Brieden, *On the regularization of regional gravity field solutions in spherical radial base functions*. *Geophysical Journal International* : (۲)۲۰۲ . ۲۰۱۵ ,p. 1041-1053.
- [17] Naeimi, M. and J. Bouman, *Contribution of the GOCE gradiometer components to regional gravity solutions*. *Geophysical Journal International*, 2017. **209**(2): p. 559-569.
- [18] Pitoňák, M., M. Šprlák, and R. Tenzer, *Possibilities of inversion of satellite third-order gravitational tensor onto gravity anomalies: a case study for central Europe*. *Geophysical Journal International*, 2017. **209**(2): p. 799-812.
- [19] Ghobadi-Far, K., et al., *GRACE gravitational measurements of tsunamis after the 2004, 2010, and 2011 great earthquakes*. *Journal of Geodesy*, 2020. **94**(7): p. 1-9.
- [20] Ghobadi-Far, K., et al., *GRACE Follow-On laser ranging interferometer measurements uniquely distinguish short-wavelength gravitational perturbations*. *Geophysical Research Letters*, 2020. **47**(16): p. e2020GL089445.
- [21] Kornfeld, R.P., et al., *GRACE-FO: the gravity recovery and climate experiment follow-on mission*. *Journal of spacecraft and rockets*, 2019. **56**(3): p. 931-951.
- [22] Kim, J., *Simulation study of a low-low satellite-to-satellite tracking mission*. 2000: The University of Texas at Austin.
- [23] Ghobadi-Far, K., et al., *A transfer function between line-of-sight gravity difference and GRACE intersatellite ranging data and an application to hydrological surface mass variation*. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2018. **123**(10): p. 9186-9201.
- [24] Haines, G., *Spherical cap harmonic analysis*. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1985. **90**(B3): p. 2583-2591.
- [25] De Santis, A. and J. Torta, *Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation*. *Journal of Geodesy*, 1997. **71**(9): p. 526-532.
- [26] Liu, X., *Global gravity field recovery from satellite-to-satellite tracking data with the acceleration approach*. 2008.
- [27] Han, S.C., *Determination and localized analysis of intersatellite line of sight gravity difference: Results from the GRAIL primary mission*. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2013. **118**(11): p. 2323-2337.
- [28] Šprlák, M., S.-C. Han, and W. Featherstone, *Integral inversion of GRAIL inter-satellite gravitational accelerations for regional recovery of the lunar gravitational field*. *Advances in Space Research*, 2020. **65**(1): p. 630-649.
- [29] Pierre-Louis, K., H. Fountain, and D. Lu, *A Satellite Lets Scientists See Antarctica's Melting Like Never Before*, in *The New York Times*. 2020.